Trace Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat

Fitri Aryani[1], Maulidya Zawarnii[2], Krisni Susilowati[3], Yuslenita Muda[4]
Corry Corazon Marzuki[5], Rahmawati[6]
[1,2,3,4,5,6]Prodi MatematikaFakultas Sains dan TeknologiUIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
e-mail: [1]khodijah_fitri@uin-suska.ac.id,,[5]corry@uin-suska.ac.id, [6]rahmawat@uin-suska.ac.id

Abstrak

Artikel ini membahas mengenai trace matriks segitiga ukuran 4×4 berpangkat bilangan bulat. Untuk mendapatkan trace matriks tersebut, dilakukan pencarian bentuk umum perpangkatan matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat. Selanjutnya, dari bentuk umum perpangkatan matriks tersebut, akan diperoleh rumus umum trace matriks segitiga ukuran 4×4. Berdasarkan hasil dalam penelitian ini diperoleh rumus umum perpangkatan matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat positif, dan berpangkat bilangan bulat negatif, serta rumus umum trace matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat. Lebih lanjut, rumus ini akan diaplikasikan dalam bentuk penyelesaian soal mengenai trace matriks segitiga ukuran 4×4 berpangkat bilangan bulat.

***Kata kunci:** matriks segitiga, trace matiks, perpangkatan matriks.*

Abstract

The main aim of this paper is to find a general formula of trace of integer power of 4×4 triangular matrix. To obtain its formula, first we find the general formula for integer power of 4×4 triangular matrix by using matrix multiplication rule. Furthermore, the general formula of trace of integer power of 4×4 triangular matrix is obtained directly. Its results show three formula is achieved simultaneously, which is, the form of trace of positive integer, negative integer and integer power of 4×4 triangular matrix. Additionally, we present the application of formula obtained by solving a problem which involve trace of integer power matrix.

***Keywords**: triangular matrix, trace matrix, power of matrix, matrix multiplication*

1. Pendahuluan

Jumlahan elemen-elemen diagonal utama dari suatu matriks bujursangkar di dalam teori matriks dikenal dengan nama *trace* dari suatu matriks. Berdasarkan definisi, untuk mencari *trace* matriks bujursangkar tentu bukan merupakan suatu masalah. Namun, bagaimana jika *trace* yang akan dicari adalah *trace* matriks berpangkat?. Secara logika, hal yang harus ditentukan terlebih dahulu adalah mencari bentuk umum perpangkatan matriks, kemudian rumus umum *trace* matriks berpangkat otomatis akan diperoleh. Bagaimana jika matriksnya berpangkat n, dengan n suatu bilangan bulat?

Datta [5] telah mendapatkan algoritma penghitungan *trace* matriks berpangkat $Tr(A^k)$, dengan k adalah bilangan bulat dan A adalah matriks Hassenberg dengan unit *codiagonal*. Selanjutnya Chu. Mt [4] telah membahas mengenai kalkulasi simbolik pada *trace* matriks tridiagonal yang berpangkat. Tahun 1990 Pan.V [9] pada makalahnya menentukan nilai eigen suatu matriks simetris, juga memberikan prosedur dasar dalam mengestimasi *trace* (A^n) dan (A^{-n}) dengan n adalah bilangan bulat. Menurut Zarelua [10] pada teori bilangan dan kombinatorik, *trace* matriks berpangkat bilangan bulat berhubungan dengan kekongruenan Euler, yaitu:

$$Tr(Ap^r) = Tr(Ap^{r-1}) mod(p^r)$$

Untuk semua matriks A bilangan bulat, p adalah bilangan prima dan r adalah bilangan bulat. Artikel tersebut juga membahas mengenai invariant pada sistem dinamik yang digambarkan sebagai bentuk *trace* matriks berpangkat bilangan bulat. Contoh yang diberikan pada makalah tersebut adalah bilangan Lefschetz.

Pahade [8] yang membahas mengenai *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan adalah $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dan hasil yang diperoleh yaitu:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$tr(A^n)=\sum_{r=0}^{n/2}\frac{(-1)^r}{r!}n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r},n \text{ genap}$$

$$tr(A^n)=\sum_{r=0}^{(n-1)/2}\frac{(-1)^r}{r!}n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r},n \text{ ganjil}$$

Selanjutnya Aryani [2] membahas mengenai *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif yang menggunakan matriks Pahade [6]. Hasil yang diperoleh yaitu:

$$tr\left(A^{-n}\right)=\frac{tr\left(A^n\right)}{\left(\det\left(A\right)\right)^n}=\frac{\sum_{r=0}^{n/2}\frac{(-1)^r}{r!}n\left[n-(r+1)\right]\left[n-(r+2)\right]\cdots\left[n-\left(r+(r-1)\right)\right]\left(\det\left(A\right)\right)^r\left(tr\left(A\right)\right)^{n-2r}}{\left(\det\left(A\right)\right)^n},n \text{ genap}$$

$$tr\left(A^{-n}\right)=\frac{tr\left(A^n\right)}{\left(\det\left(A\right)\right)^n}=\frac{\sum_{r=0}^{n-1/2}\frac{(-1)^r}{r!}n\left[n-(r+1)\right]\left[n-(r+2)\right]\cdots\left[n-\left(r+(r-1)\right)\right]\left(\det\left(A\right)\right)^r\left(tr\left(A\right)\right)^{n-2r}}{\left(\det\left(A\right)\right)^n},n \text{ ganjil}$$

Aryani [3] mencoba menggunakan matriks 3×3 berbentuk khusus, berpangkat bilangan bulat positif dengan bentuk sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & a\\ 0 & b & b\end{bmatrix}, \forall a,b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

dan hasil yang didapatkan bentuk umum dari *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif pada Persamaan (1) adalah sebagai berikut:

$$tr\left(A^n\right)=1+\left(a+b\right)^n$$

Berdasarkan penelitian-penelitian di atas, maka peneliti mencoba lagi mengenai *trace* matriks berpangkat pada matriks yang berbeda. Matriks yang digunakan kali ini adalah matrisk segitiga bentuk khusus dengan ukuran 4×4dan berpangkat bilangan bulat. Matriks yang digunakan berbentuk sebagai berikut:

$$A_4=\begin{bmatrix}a & b & c & d\\ 0 & a & b & c\\ 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & 0 & a\end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

$$B_4=\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ b & a & 0 & 0\\ c & b & a & 0\\ d & c & b & a\end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

2. MetodePenelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur atau kajian pustaka. Beberapa landasan teori yang digunakan akan dipaparkan untuk mendapatkan hasil penelitian yang diinginkan. Namun sebelumnya diberikan terlebih dahulu langkah-langkah yang dilakukan untuk mendapatkan hasil penelitian ini.

1) Diberikan matriks segitiga 4×4 bentuk khusus pada Persamaan (2) dan Persamaan (3).
2) Menentukan perpangkatan masing-masing matriks dari pangkat -10.sampai pangkat 10.
3) Menduga bentuk umum matriks $A_4^{\ n}$ dan $B_4^{\ n}$ dengan n bilangan bulat.
4) Membuktikan bentuk umum $A_4^{\ n}$ dan $B_4^{\ n}$ dengan n bilangan bulat menggunakan induksi matematika.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

5) Membuktikan bentuk umum $tr\left(A_4{}^n\right)$dan $tr\left(B_4{}^n\right)$ dengan n bilangan bulat menggunakan pembuktian langsung.
6) Mengaplikasikan bentuk umum $tr\left(A_4{}^n\right)$dan $tr\left(B_4{}^n\right)$dengan n bilangan bulat dalam bentuk contoh soal.

2.1 Landasan Teori
Definisi 1[1] Matriks bujursangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah dan matriks bujursangkar yang semua entri dibawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas. Suatu matriks, baik segitiga bawah atau segitiga atas disebut matriks segitiga. Suatu matriks segitiga umum dapat ditulis sebagai berikut.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$, bentuk umum matriks segitiga atas.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$, bentuk umum matriks segitiga bawah

Definisi 2 [1]Jika A adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat bilangan bulat taknegatif dari A adalah
$A^0 = I$ dan $A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n\ faktor} \quad (n>0)$
Selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat bilangan bulat negatif dari A adalah

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{n\ faktor}$$

Teorema 1 [1]) Jika A adalah matriks bujursangkar dan r dan s adalah bilangan bulat, maka
a. $A^r A^s = A^{r+s}$
$(A^r)^s = A^{rs}$

Definisi 3 [6]*Trace* matriks adalah jumlah elemen diagonal utama pada matriks bujursangkar. Jika matriks A adalah matriks bujursangkar ukuran $n \times n$, maka *trace* matriks A dinyatakan $tr(A)$. Jika diketahui matriks A adalah:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka *trace* dari matriks A adalah
$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$
sehingga,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{jj}$$

dengan a_{ij} merupakan elemen baris ke-i dan kolom ke-j.

Teorema 2 [6]Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [a_{ij}]$ adalah matriks persegi berukuran $n \times n$, maka *trace* dari A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal A dan dinotasikan $tr(A)$, yaitu $tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$. Maka berlaku sifat-sifat berikut:

(i) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

(ii) $tr(kA) = ktr(A)$

(iii) $tr(A^T) = tr(A)$

Induksi Matematika [7] Prinsip induksi sederhana berbunyi sebagai berikut: Misalkan $p(n)$ adalah menyatakan suatu pernyataan bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ tersebut benar untuk semua bilangan positif n, maka untuk membuktikan pernyataan ini digunakan aturan sebagai berikut:

1) Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, dan
2) Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benaruntuk $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan positif n.

Langkah pertama dinamakan basis induksi, sedangkan langkah kedua dinamakan langkah induksi. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan $p(n)$ benar. Dan akan dibuktikan bahwa $p(n+1)$ jugabenar, asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila sudah ditunjukkan kedua langkah tersebut benar maka sudah dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan n.

Teorema3 [1] Jika A adalahmatrikssegitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitigabawah, atau diagonal) maka $\det(A)$ adalahhasilkalidarientri-entripada diagonal utamamatrikstersebut; yaitu $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Definisi 4 [1]Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Disebut matriks kofaktor dari A. Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari A, dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

Definisi5 [1] Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik *(invertible)* dan B disebut sebagai invers *(inverse)*dari A.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Teorema4 [1]Jika A adalah matriks yang dapatdibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil penelitian ini diperoleh setelah mengikuti langkah-langkah yang telah dijelaskan pada metode penelitian d atas. Ada tiga bentuk umum yang diperoleh pada hasil penelitian ini.

3.1. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Segitiga 4×4 Dengan Pangkat Bilangan Bulat Positif

Teorema 5 Diberikan matriks segitiga atas pada Persamaan (2), maka diperoleh:

$$A_4^{\,n} = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall\ n \in Z^+$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

Misal:

$$p(n): A_4^{\,n} = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall\ n \in Z^+$$

1) Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, yaitu:

$$A_4^{\,1} = \begin{bmatrix} a^1 & 1a^{1-1}b & 1a^{1-1}c + \frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}b^2 & 1a^{1-1}d + 1(1-1)a^{1-2}bc + \frac{(1-1)^3-(1-1)}{6}a^{1-3}b^3 \\ 0 & a^1 & 1a^{1-1}b & 1a^{1-1}c + \frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^1 & 1a^{1-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

dengan memperhatikan Persamaan (2) maka $p(1)$ benar.

2) Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A_4^{\,k} = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}d + k(k-1)a^{k-2}bc + \frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}a^{k-3}b^3 \\ 0 & a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}, \forall\ k \in Z^+$$

Akan ditunjukkan $p(k+1)$ juga benar, yaitu:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$p(k+1): A_4^{\,k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + \frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 & (k+1)a^k d + (k+1)ka^{k-1}bc + \frac{(k)^3-(k)}{6}a^{k-2}b^3 \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + \frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$A_4^{\,k+1} = A_4^{\,k}.A_4$$

$$= \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}d + k(k-1)a^{k-2}bc + \frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}a^{k-3}b^3 \\ 0 & a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & a^k b + ka^k b & a^k c + ka^{k-1}b^2 + ka^k c + \frac{1}{2}k(k-1)ka^{k-1}b^2 & a^k d + ka^{k-1}bc + ka^{k-1}bc + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^3 + ka^k d + k(k-1)a^{k-1}bc + \frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}a^{k-2}b^3 \\ 0 & a^{k+1} & a^k b + ka^{k-1+1}b & a^k c + ka^{k-1}b^2 + ka^k c + \frac{1}{2}k(k-1)ka^{k-1}b^2 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & a^k b + ka^k b \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + \frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 & (k+1)a^k d + (k+1)ka^{k-1}bc + \frac{(k)^3-(k)}{6}a^{k-2}b^3 \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + \frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

dengan memperhatikan Persamaan $p(k+1)$ maka Teorema 4terbukti.

Teorema 6 Diberikan matriks segitiga bawah pada Persamaan (3), maka diperoleh:

$$B_4^{\,n} = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n & 0 \\ na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}a^{n-3}b^3 & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{bmatrix}, \forall\, n \in Z^+$$

Bukti: Dengan cara yang sama pada Teorema 5, maka Teorema 6 terbukti.

3.2. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Segitiga 4×4 Dengan Pangkat Bilangan Bulat Negatif

Teorema 7 Diberikan matriks segitiga atas pada Persamaan (2), maka diperoleh:

$$A_4^{\,-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{{}^1\!/_2\, n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-{}^1\!/_6\, n(n+1)(n+2)b^3 - na^2d + n(n+1)\,abc}{a^{n+3}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{{}^1\!/_2\, n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan aturan invers yaitu: $A_4{}^n\, A_4{}^{-n} = A_4{}^{-n}\, A_4{}^n = I$. Untuk membuktikan teorema tersebut maka diperlukan $A_4{}^n$ dengan n bilangan bulat positif. Hal tersebut sudah ada pada Teorema 5, maka akan ditunjukkan $A_4{}^n\, A_4{}^{-n} = I$, yaitu:

$$A_4{}^n . A_4{}^{-n} = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3(n-1)}{6}a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3 - na^2d + n(n+1)\,abc}{a^{n+3}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

Misalkan

$$A_4{}^n\, A_4{}^{-n} = \begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} \\ i_{21} & i_{22} & i_{23} & i_{24} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} & i_{34} \\ i_{41} & i_{42} & i_{43} & i_{44} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$i_{11} = a^n \frac{1}{a^n} = 1$$

$$i_{12} = \frac{a^n(-nb)}{a^{n+1}} + \frac{na^{n-1}b}{a^n} = -\frac{a^n nb}{a^n a} + \frac{a^n a^{-1} nb}{a^n} = -\frac{nb}{a} + \frac{nb}{a} = 0$$

$$i_{13} = \frac{\left(-nca + \frac{1}{2}n(n+1)b^2\right)a^n}{a^{n+2}} + \frac{na^{n-1}b(-nb)}{a^{n+1}} + \frac{na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2}{a^n} = 0$$

$$i_{14} = \frac{a^n\left(-n\,d\,a^2 + n(n+1)abc - \frac{1}{6}n\ (n+1)(n+2)b^3\right)}{a^{n+3}} + \frac{na^{n-1}b\left(-n\,ca + \frac{1}{2}n(n+1)b^2\right)}{a^{n+2}} + \frac{\left(na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2\right)(-n\,b)}{a^{n+1}}$$
$$+ \frac{na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{1}{6}\left((n-1)^3 - (n-1)\right)a^{n-3}b^3}{a^n} = 0$$

$$i_{21} = 0.\left(\frac{1}{a^n}\right) + a^n.(0) + na^{n-1}b.(0) + na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3 - (n-1)}{6}a^{n-3}b^3.(0) = 0$$

$$i_{22} = a^n \frac{1}{a^n} = 1$$

$$i_{23} = \frac{a^n(-nb)}{a^{n+1}} + \frac{na^{n-1}b}{a^n} = -\frac{a^n nb}{a^n a} + \frac{a^n a^{-1} nb}{a^n} = -\frac{nb}{a} + \frac{nb}{a} = 0$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$i_{24}=\frac{a^n\left(-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2\right)}{a^{n+2}}+\frac{na^{n-1}b(-nb)}{a^{n+1}}+\frac{na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2}{a^n}=0$$

$$i_{31}=0.\left(\frac{1}{a^n}\right)+0.(0)+a^n.(0)+na^{n-1}b.(0)=0$$

$$i_{32}=\frac{a^n(-nb)}{a^{n+1}}+\frac{na^{n-1}b}{a^n}=-\frac{a^n nb}{a^n a}+\frac{a^n a^{-1}nb}{a^n}=-\frac{nb}{a}+\frac{nb}{a}=0$$

$$i_{33}=a^n\frac{1}{a^n}=1$$

$$i_{34}=\frac{a^n(-nb)}{a^{n+1}}+\frac{na^{n-1}b}{a^n}=-\frac{a^n nb}{a^n a}+\frac{a^n a^{-1}nb}{a^n}=-\frac{nb}{a}+\frac{nb}{a}=0$$

$$i_{41}=0.\left(\frac{1}{a^n}\right)+0.(0)+0.(0)+a^n.(0)=0$$

$$i_{42}=0.\left(-\frac{nb}{a^{n+1}}\right)+0.\left(\frac{1}{a^n}\right)+0.(0)+a^n.(0)=0$$

$$i_{43}=0.\left(\frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2-nac}{a^{n+2}}\right)+0.\left(-\frac{nb}{a^{n+1}}\right)+0.\left(\frac{1}{a^n}\right)+a^n.(0)=0$$

$$i_{44}=a^n\frac{1}{a^n}=1$$

Berdasarkan hasil perkalian matriks tersebut maka diperoleh:

$$A_4^{\,n}A_4^{\,-n}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=I$$

Hal yang sama berlaku juga untuk $A_4^{\,-n}\ A_4^{\,n}=I$. Berdasarkan pembuktian tersebut maka Teorema 7 terbukti. ■

Teorema 8 Diberikan matriks segitiga atas pada Persamaan (3), maka diperoleh:

$$B_4^{\,-n}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a^n}&0&0&0\\ \frac{-nb}{a^{n+1}}&\frac{1}{a^n}&0&0\\ \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2-nac}{a^{n+2}}&\frac{-nb}{a^{n+1}}&\frac{1}{a^n}&0\\ \frac{-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3-na^2d+n(n+1)abc}{a^{n+3}}&\frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2-nac}{a^{n+2}}&\frac{-nb}{a^{n+1}}&\frac{1}{a^n}\end{bmatrix}$$

Bukti: Pembuktian dilakukan dengan cara yang sama pada Teorema 7 di atas, maka Teorema 8 terbukti.

3.3. *Trace* Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat

Teorema 9 Diberikan matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (2) dan Persamaan (3), maka diperoleh:

a. *Trace* matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (2) dan Persamaan (3), berpangkat bilapan bulat positif, yaitu:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$tr(A_4{}^n) = tr(B_4{}^n) = 4(a^n)\ , \forall n \in Z^+$$

b. *Trace* matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (2) dan Persamaan (3), berpangkat bilapan bulat negatif, yaitu:

a. $$tr(A_4{}^{-n}) = tr(B_4{}^{-n}) = 4\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Bukti:

a. *trace* matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (2) dan Persamaan (3), berpangkat bilapan bulat positif, Berdasarkan Teorema 5 dan Teorema 6 diketahui bahwa entri-entri pada diagonal utamanya bernilaisamayaitu a^n dan berdasarkan definisi *trace* matriks, maka diperoleh:

$$tr(A_4{}^n) = tr(B_4{}^n) = a^n + a^n + a^n + a^n = 4(a^n)$$

b. *trace* matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (2) dan Persamaan (3), berpangkat bilapan bulat negatif, Berdasarkan Teorema 7 dan Teorema 8 diketahui bahwa entri-entri pada diagonal utamanya bernilai sama yaitu $\frac{1}{a^n}$ dan berdasarkan definisi *trace* matriks, maka diperoleh:

$$tr(A_4{}^{-n}) = tr(B_4{}^{-n}) = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} = 4\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Teorema 9 terbukti ▪

3.4.Aplikasi *trace* Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat

Contoh 1. Diberikan matriks $A_4 = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, hitunglah $A_4{}^9$ dan $tr\left(A_4{}^9\right)$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Teorema5 diperoleh:

$$A_4{}^9 = \begin{bmatrix} (-262.144) & (-3.538.944) & (-22.413.312) & (-93.192.192) \\ 0 & (-262.144) & (-3.538.944) & (-22.413.312) \\ 0 & 0 & (-262.144) & (-3.538.944) \\ 0 & 0 & 0 & (-262.144) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 9 maka:

$$tr\left(A_4{}^9\right) = tr\begin{bmatrix} (-262.144) & (-3.538.944) & (-22.413.312) & (-93.192.192) \\ 0 & (-262.144) & (-3.538.944) & (-22.413.312) \\ 0 & 0 & (-262.144) & (-3.538.944) \\ 0 & 0 & 0 & (-262.144) \end{bmatrix} = 4(-262.144) = (-1.048.576)$$

Contoh 2. Diberikan matriks $A_4 = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

maka dengan menggunakan Teorema 7 sehingga diperoleh:

$$A_4^{-2}=\begin{bmatrix} \frac{1}{(-4)^2} & \frac{-2(-1)}{(-4)^{2+1}} & \frac{{}^1\!/_2(2)(2+1)(-1^2)-(2)(-4)(-3)}{(-4)^{2+2}} & \frac{\frac{-2(2+1)(2+2)(-1^3)}{6}-2(-4^2)(-2)+2(2+1)(-4)(-1)(-3)}{(-4)^{2+3}} \\ 0 & \frac{1}{(-4)^2} & \frac{-2(-1)}{(-4)^{2+1}} & \frac{{}^1\!/_2(2)(2+1)(-1^2)-(2)(-4)(-3)}{(-4)^{2+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(-4)^2} & \frac{-2(-1)}{(-4)^{2+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(-4)^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{16} & -\frac{2}{64} & -\frac{21}{256} & \frac{-4}{1024} \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{2}{64} & -\frac{21}{256} \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & -\frac{2}{64} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Teorema 9 diperoleh:

$$tr(A_4^{-2})=4\frac{1}{(-4)^2}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

Contoh 3. Diberikan matriks $B_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ maka dengan menggunakan Teorema 8 sehingga

$$B_4^{-4}=\begin{bmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-8}{1} & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ \frac{26}{1} & \frac{-8}{1} & \frac{1}{1} & 0 \\ \frac{-12}{1} & \frac{26}{1} & \frac{-8}{1} & \frac{1}{1} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Teorema 9 diperoleh: $tr(B_4^{-2})=4\frac{1}{(1)^2}=4$

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan di atas, maka terdapat teorema-teorema yang menjadi kesimpulan dari hasil yang diperoleh. Jika diberikan matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (2) dan (3), maka diperoleh:

a. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, yaitu:

$$A_4^n=\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d+n(n-1)a^{n-2}bc+\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall\ n\in Z^+$$

$$B_4^n=\begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n & 0 \\ na^{n-1}d+n(n-1)a^{n-2}bc+\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}a^{n-3}b^3 & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{bmatrix}, \forall\ n\in Z^+$$

b. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, yaitu:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$A_4^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3 - na^2d + n(n+1)abc}{a^{n+3}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

$$B_4^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 \\ \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 \\ \frac{-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3 - na^2d + n(n+1)abc}{a^{n+3}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

c. Bentuk Umum *Trace* Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat, yaitu:

$$tr(A_4{}^n) = tr(B_4{}^n) = 4(a^n)\ , \forall\, n \in Z^+$$

$$tr(A_4{}^{-n}) = tr(B_4{}^{-n}) = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} = 4\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Daftar Pustaka

[1] Anton H, Rorres C.Dasar-Dasar Aljabar inear Versi Aplikasi. Edisi Ketujuh. Jakarta: Erlangga. 2004.
[2] Aryani F, Solihin M. Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bula Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.* 2017;3 (2).
[3] Aryani F, Andesta R. Trace Matriks BerbentukKhusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. 2020;6 (1).
[4] Chu MT, Raleigh. Symbolic Calculation of the Trace of the Power of a Tridiagonal Matrix.*Computing*. 1985; 35: 257-268.
[5] Data BN, Datta K. An Algorithm for Computing Power of a Hessenberg Matrix and its Applictions, *Linear Algebra and its Application.* 1976; 14: 273-284.
[6] GentleJE. Matrix Algebra.NewYork: Springer. 2007.
[7] Lipschutz S,Marc L.Matematika Diskrit. Jakarta: SalembaTeknika. 2001.
[8] Pahade J, Jha M. Trace of Positive Integer Power of Real 2×2 matrices.*Advancesin Linear Algebra & Matrix Theory*. 2015; 5: 150-155.
[9] Pan V. Estimating the Extremal Eigenvalues of a Symetric Matrix.*Computers & Mathematics with Applications*. 1990; 20: 17-22.
[10] Zarelua AV. *On Congruences for the Trace of Power of Some Matrices*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2008; 263: 78-98.