

**PERBANDINGAN METODE KUADRAT TERKECIL DENGAN
METODE THEIL UNTUK REGRESI KUADRATIK**

(Studi Kasus : Tinggi dan Berat Badan Bayi)

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

MILA SARI
10654004483



**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2011**

PERBANDINGAN METODE KUADRAT TERKECIL DENGAN METODE THEIL UNTUK REGRESI KUADRATIK

(Studi Kasus : Tinggi dan Berat Badan Bayi)

MILA SARI
10654004483

Tanggal Sidang : 31 Januari 2011
Periode Wisuda : Februari 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini akan membahas tentang perbandingan metode kuadrat terkecil dengan metode Theil untuk regresi kuadratik. Regresi kuadratik adalah regresi linier dengan dua variabel bebas. Model regresi kuadratik secara umum dinyatakan sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon, \quad i=1,2,\dots,n$$

dengan y_i adalah variabel tidak bebas, x_i adalah variabel bebas, β_0, β_1 dan β_2 adalah parameter-parameter yang tidak diketahui dan ε adalah kesalahan (*error*). Penelitian ini juga diaplikasikan ke dalam data tinggi dan berat badan bayi, dengan jumlah data $n = 11$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa persamaan regresi yang dihasilkan oleh metode Theil lebih sesuai untuk data pengamatan ini jika dibandingkan dengan metode kuadrat terkecil.

Kata Kunci : metode kuadrat terkecil, metode theil, regresi kuadratik.

COMPARISON OF LEAST SQUARE METHOD WITH THEIL METHOD FOR QUADRATIC REGRESSION

(Case Study : High and Heavy Body Baby)

MILA SARI
10654004483

Date of Final Exam : January 31, 2011
Graduation Cremony Priod : February 2011

Mathematic Departement
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This research will discuss about the comparison of least square method with theil method for quadratic regression . Quadratic regression is linear regression by two independent. The model of quadratic regression is stated as fallow :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon, \quad i=1,2,\dots,n$$

With y_i is dependent variable, x_i is independent variable, β_0 , β_1 end β_2 are unknow parameters end ε is error. The research has applications in data to high and heavy body baby with data equal $n = 11$, result of research shows that regression equation which is resultant by Theil method is more suitable for research data than least square method.

Keyword: *least square method, theil method, quadratic regression.*

DAFTAR ISI

	Halaman
LEMBAR PERSETUJUAN	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL.....	iv
LEMBAR PERNYATAAN	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK.....	vii
<i>ABSTRACT</i>	viii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR LAMBANG	xiii
DAFTAR TABEL.....	xiv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang Masalah	I-1
1.2 Rumusan Masalah	I-3
1.3 Batasan Masalah.....	I-3
1.4 Tujuan.....	I-4
1.5 Manfaat.....	I-4
1.6 Sistematika Penulisan.....	I-4
BAB II LANDASAN TEORI	
2.1 Analisis Regresi.....	II-1
2.2 Regresi Linier	II-1
2.3 Metode Kuadrat Terkecil.....	II-2
2.4 Koefisien Determinan.....	II-4
2.5 Koefisien Korelasi	II-5

2.6 Metode Theil	II-6
2.7 Contoh Regresi Linier	II-6
 BAB III METODOLOGI PENELITIAN	
3.1 Metode Kuadrat Tekecil	III-1
3.2 Metode Theil	III-3
 BAB IV PEMBAHASAN	
4.1 Regresi Kuadratik	IV-1
4.2 Metode Kuadrat Terkecil untuk Regresi Kuadratik	IV-2
4.3 Metode Theil untuk Regresi Kuadratik	IV-4
4.4 Aplikasi untuk Regresi Kuadratik	IV-5
 BAB V PENUTUP	
5.1 Kesimpulan	V-1
5.2 Saran	V-1
 DAFTAR PUSTAKA	
LAMPIRAN	
DAFTAR RIWAYAT HIDUP	

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi pada saat ini sudah sangat maju dan berlaku untuk semua bidang. Kemajuan ini merupakan manifestasi kemajuan dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Sehingga tidak mengherankan apabila Matematika sebagai bagian dari ilmu pengetahuan turut mendukung perkembangan teknologi dan memegang peranan yang penting.

Beberapa cabang ilmu terapan dalam bidang Matematika, seperti: ilmu statistika, komputasi, aljabar dan lain sebagainya. Dalam ilmu statistika dikenal suatu istilah yang disebut analisis regresi. Analisis regresi adalah analisis statistika yang mempelajari bagaimana membangun sebuah model fungsional dari data untuk dapat menjelaskan ataupun meramalkan suatu fenomena alam atas dasar fenomena yang lain. Analisis regresi merupakan salah satu teknik statistika yang digunakan secara luas dalam ilmu pengetahuan terapan. Regresi disamping digunakan untuk mengetahui bentuk hubungan antar variabel regresi, juga dapat dipergunakan untuk peramalan.

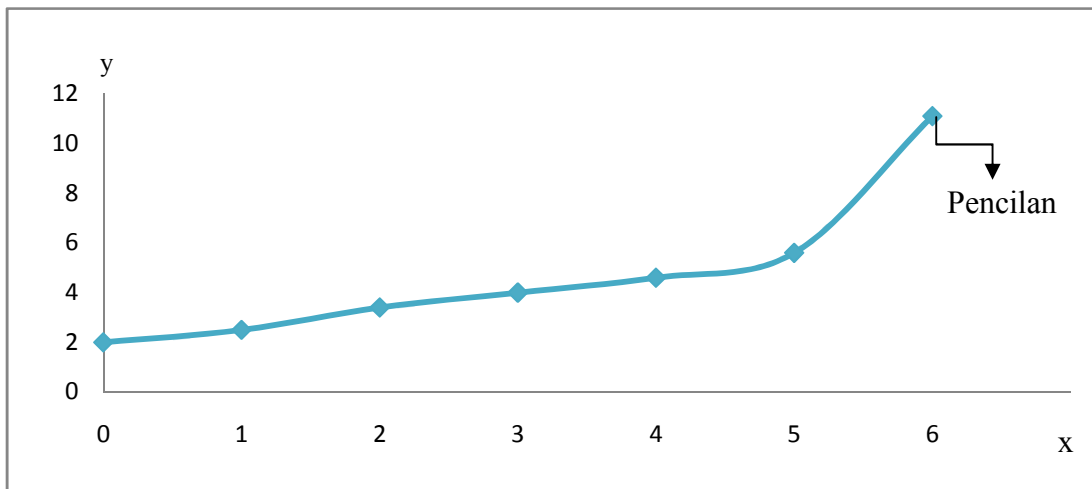
Menggunakan n pengamatan maka suatu model linier sederhana dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

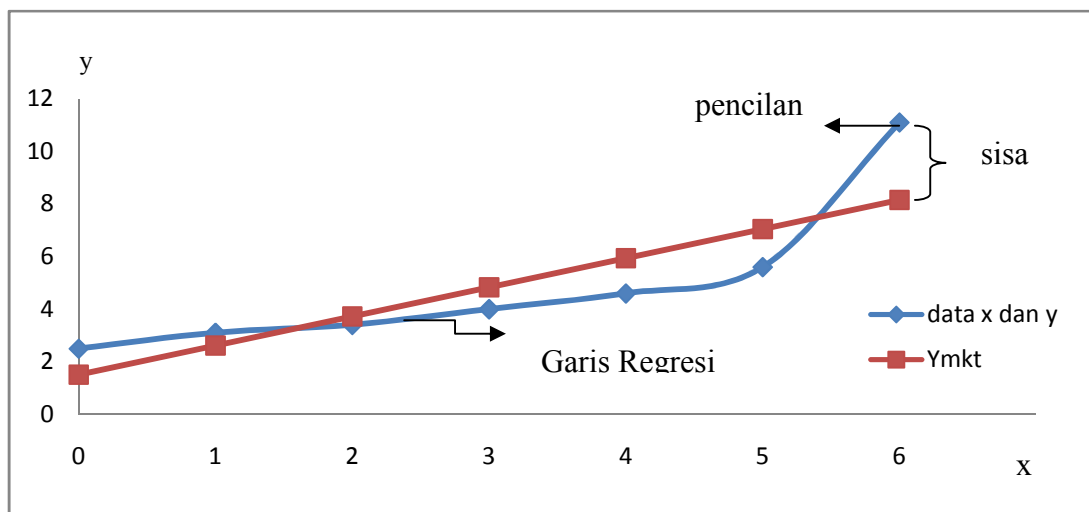
dengan y_i adalah variabel tidak bebas, x_i adalah variabel bebas, β_0 dan β_1 adalah parameter-parameter yang tidak diketahui dan ε_i adalah kesalahan (*error*).

Metode klasik untuk mencari model regresi linier adalah metode kuadrat terkecil (MKT). Y_{MKT} adalah simbol persamaan garis regresi untuk metode kuadrat terkecil sedangkan Y_{THEIL} adalah simbol persamaan regresi untuk metode Theil. Model regresi yang dihasilkan dari metode kuadrat terkecil adalah terbaik jika asumsinya terpenuhi, namun penyimpangan terhadap asumsi itu bisa saja terjadi.

Misalnya untuk data pengamatan yang di dalamnya terdapat data terpencil (*outlier*), yaitu data yang jauh dari kelompok data yang lainnya seperti yang ditunjukkan dalam gambar 1.1. Garis regresi untuk data pada gambar 1.1 dapat ditunjukkan pada gambar 1.2. berdasarkan gambar tersebut menunjukkan bahwa garis regresi yang dihasilkan dengan metode kuadrat terkecil tidak sesuai untuk data pengamatan. Hal ini disebabkan bahwa sebagian besar titik-titik sisa berada dekat dengan garis regresi, tetapi ada satu titik yang jauh dari garis regresi maupun dari titik-titik data lain. Titik yang jauh dari data pengamatan disebut data pencilan (*outlier*). Adanya data pencilan ini akan mempengaruhi garis regresi, dengan menarik garis regresi mengikuti pola adanya data pencilan, akibatnya beberapa titik estimasi menjauh dari titik-titik data pengamatan sehingga perlu dicari garis regresi yang lebih sesuai sebuah variasi dari prosedur nonparametrik untuk mencari model regresi.



Gambar 1.1 Diagram Pencar data x dan y



Gambar 1.2 Grafik Regresi dengan Metode Kuadrat Terkecil

Gambar 1.2 ini dapat diselesaikan dengan metode Theil yang dikenalkan oleh Theil (1950). Adanya data pencilan tidak mempunyai pengaruh yang besar dalam membuat garis regresi yang sesuai, karena garis regresi yang dihasilkan metode Theil terbentuk melalui median dari seluruh pengamatan

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik mengajukan judul tugas akhir yaitu: **“Perbandingan Metode Kuadrat Terkecil dengan Metode Theil untuk Regresi Kuadratik”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, maka dapatlah dirumuskan masalah dalam penelitian ini yakni: ”Bagaimana menentukan model yang terbaik antara metode kuadrat terkecil dengan Metode Theil untuk regresi kuadratik”.

1.3 Batasan Masalah

Pembahasan tentang perbandingan metode kuadrat terkecil dengan metode Theil untuk regresi kuadratik dibatasi hanya menentukan model persamaan regresinya saja.

1.4 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai adalah untuk mengetahui hasil perbandingan metode kuadrat terkecil dengan metode Theil untuk regresi kuadratik.

1.5 Manfaat

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

- a. Penulis dapat mengembangkan wawasan keilmuan dalam Matematika mengenai analisis regresi.
- b. Penulis dapat mengetahui lebih banyak tentang materi regresi linier yang tentunya akan sangat memberikan kontribusi untuk mempermudah dalam menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan analisis regresi.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab, yang memberikan gambaran secara menyeluruh, yaitu:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan tentang deskripsi umum isi tugas akhir yang meliputi latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan mengenai penjelasan teori-teori dasar yang mendukung dalam penyelesaian tugas akhir.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini memuat uraian tentang langkah-langkah kerja metode kuadrat terkecil dan metode Theil untuk regresi kuadratik.

BAB IV Hasil dan Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan tentang hasil dan pembahasan dari tugas akhir ini.

BAB V Penutup

Bab ini akan dijelaskan mengenai kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Landasan teori dalam penyusunan skripsi ini menggunakan beberapa teori pendukung yang akan penulis gunakan dalam membahas skripsi dengan judul **“Perbandingan Metode Kuadrat Terkecil dengan Metode Theil untuk Regresi Kuadratik”**.

2.1 Analisis Regresi

Analisis regresi merupakan salah satu analisis statistika yang sering digunakan untuk menganalisis hubungan antara dua variabel atau lebih. Hubungan yang didapat pada umumnya dinyatakan dalam bentuk persamaan matematika yang menyatakan hubungan fungsional antara variabel bebas (*independent variable*) x dan variabel tak-bebas (*dependent variable*) y . Hubungan yang hanya memuat variabel bebas berderajat satu dikenal dengan regresi linier.

Definisi. 2.1.1 (Mendenhall & Mc Clave, 1996)

Analisis regresi merupakan suatu cabang metodologi statistika (*statistical methodology*) mengenai hubungan sebuah reaksi y terhadap sekelompok variabel bebas atau *predictor* x_1, x_2, \dots, x_n .

2.2 Regresi Linier

Suatu model regresi linier dengan satu variabel bebas secara umum dinyatakan sebagai:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (2.1)$$

dengan y adalah variabel tidak bebas, x adalah variabel bebas, β_0 adalah titik potong (*intercept*) y dari garis regresi, β_1 adalah kemiringan (*slope*) garis regresi,

dan ε yang merupakan kekeliruan model, parameter β_0 dan β_1 akan diestimasi dengan menggunakan metode kuadrat terkecil.

2.3 Metode Kuadrat Terkecil

Metode kuadrat terkecil merupakan suatu metode yang digunakan untuk menaksir parameter regresi dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat kekeliruan (*error*) pada persamaan (2.1), Jumlah kuadrat kekeliruan (*error*) untuk persamaan regresi linier sederhana, yaitu :

$$J = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 ; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

Estimasi persamaan regresi linier sederhana, yaitu :

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i ; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

dengan mensubsitusikan persamaan (2.3) kepersamaan (2.2), maka diperoleh jumlah kuadrat kekeliruan, yaitu :

$$J = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 ; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

dengan meminimumkan persamaan (2.4) terhadap b_1 , maka :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial b_1} &= \sum 2(y_i - b_0 - b_1 x_i)(-x_i) = 0 \\ -2 \sum (y_i - b_0 - b_1 x_i)(x_i) &= 0 \\ \sum (y_i - b_0 - b_1 x_i)(x_i) &= 0 \\ \sum (y_i x_i - b_0 x_i - b_1 x_i^2) &= 0 \\ \sum y_i x_i - \sum b_0 x_i - \sum b_1 x_i^2 &= 0 \\ \sum y_i x_i - b_0 \sum x_i - b_1 \sum x_i^2 &= 0 \\ \sum y_i x_i - \left(\frac{\sum y_i}{n} - \frac{b_1 \sum x_i}{n} \right) \sum x_i - b_1 \sum x_i^2 &= 0 \\ \sum y_i x_i - \left(\frac{\sum y_i}{n} \sum x_i - \frac{b_1 \sum x_i}{n} \sum x_i \right) - b_1 \sum x_i^2 &= 0 \\ \sum y_i x_i - \left(\frac{\sum y_i}{n} \sum x_i - \frac{b_1 (\sum x_i)^2}{n} \right) - b_1 \sum x_i^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\sum y_i x_i - \frac{\sum y_i}{n} \sum x_i + \frac{b_1 (\sum x_i)^2}{n} - b_1 \sum x_i^2 = 0$$

$$\sum y_i x_i - \frac{\sum y_i}{n} \sum x_i = b_1 \left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right)$$

$$b_1 = \frac{\sum y_i x_i - \frac{\sum y_i}{n} \sum x_i}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}$$

$$b_1 = \frac{n \sum y_i x_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b_1 = \frac{\sum (x_i - (\sum x_i)/n)(\sum y_i)/n}{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n}$$

Selanjutnya minimumkan persamaan (2.4) terhadap b_0 , maka :

$$\frac{\partial f}{\partial b_0} = \sum 2(y_i - b_0 - b_1 x_i)(-1) = 0$$

$$-2 \sum (y_i - b_0 - b_1 x_i)(1) = 0$$

$$\sum (y_i - b_0 - b_1 x_i)(1) = 0$$

$$\sum (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0$$

$$\sum y_i - \sum b_0 - \sum b_1 x_i = 0$$

$$\sum y_i - n b_0 - b_1 \sum x_i = 0$$

$$-n b_0 = -\sum y_i + b_1 \sum x_i$$

$$b_0 = \frac{\sum y_i - b_1 \sum x_i}{n}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

Estimasi b_1 dan b_0 dari persamaan regresi linier sederhana dengan menggunakan metode kuadrat terkecil dinotasikan dengan $\hat{\beta}_1$ yaitu nilai yang diduga dari b_1 dan $\hat{\beta}_0$ yaitu nilai yang diduga dari b_0 dengan rumus yaitu :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum y_i x_i - (\sum x_i)(\sum y_i)/n}{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n} \quad (2.5)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (2.6)$$

dengan n adalah jumlah data pengamatan \bar{y} adalah nilai rata-rata y . Setelah $\hat{\beta}_1$ dan $\hat{\beta}_0$ diperoleh maka estimasi persamaan regresi linier sederhana menjadi :

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \varepsilon ; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

Model regresi yang diperoleh dari metode kuadrat terkecil merupakan model regresi yang terbaik jika memenuhi beberapa asumsi diantaranya yaitu:

1. Nonmultikolinearitas artinya antara variabel bebas yang satu dengan variabel bebas yang lain dalam model regresi tidak saling berhubungan secara sempurna atau mendekati sempurna.
2. Homoskedastisitas artinya varians semua variabel adalah sama.
3. Nilai rata-rata kesalahan populasi sama dengan nol.
4. Distribusi kesalahan adalah menyebar secara distribusi normal.

2.4 Koefisien Determinasi

Koefisien determinasi yang diberi simbol R^2 merupakan ukuran yang dapat digunakan untuk mengetahui besarnya pengaruh variabel bebas terhadap variabel tak bebas dari suatu persamaan regresi. Nilai koefisien determinasi menunjukkan persentase variasi nilai variabel tak bebas yang dapat dijelaskan oleh model regresi yang dihasilkan.

Besarnya koefisien determinasi dinyatakan dalam bilangan bergerak antara 0 sampai 1. Apabila koefisien determinasi mendekati 0, maka semakin kecil pengaruh variabel bebas terhadap variabel tak bebas. Sebaliknya jika koefisien determinasi mendekati 1, maka semakin besar pengaruh variabel bebas terhadap variabel tak bebas. Nilai koefisien determinasi dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(y - \hat{y})^2}{\sum(y - \bar{y})^2} \quad (2.8)$$

dengan $0 \leq R^2 \leq 1$, y adalah nilai variabel tak bebas yang diperoleh dari data, \hat{y} adalah nilai variabel tak bebas yang diduga, \bar{y} adalah rata-rata variabel tak bebas.

2.5 Koefisien Korelasi

Koefisien korelasi yang dinotasikan ρ merupakan ukuran yang dapat digunakan untuk mengukur derajat hubungan variabel bebas dengan variabel tak bebas. Besarnya koefisien korelasi adalah akar dari koefisien determinasi atau secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$\rho = \sqrt{R^2} \quad (2.9)$$

Koefisien korelasi ρ dinyatakan dengan bilangan bergerak antara 0 sampai ± 1 . Apabila ρ mendekati +1 atau -1 berarti terdapat hubungan yang kuat (terdapat hubungan positif sempurna atau negatif sempurna), sebaliknya apabila ρ mendekati 0 berarti terdapat hubungan yang lemah atau tidak ada hubungan. Multikolinearitas artinya variabel bebas yang satu dengan variabel bebas yang lain dalam model regresi saling berhubungan secara sempurna.

Koefisien korelasi juga dapat digunakan untuk mengetahui arah hubungan antara dua variabel. Tanda (+) pada nilai koefisien korelasi menunjukkan hubungan yang searah. Artinya apabila nilai variabel bebas naik, maka nilai variabel tak bebas juga naik. Sebaliknya, tanda (-) pada nilai koefisien korelasi menunjukkan hubungan yang berlawanan arah artinya apabila nilai variabel bebas naik, maka nilai variabel tak bebas turun.

Dalam konteks regresi, koefisien determinasi (R^2) merupakan ukuran yang lebih bermakna dibandingkan dengan koefisien korelasi (ρ). Seperti yang telah diuraikan sebelumnya bahwa koefisien determinasi mampu memberikan informasi mengenai variasi nilai variabel tak bebas yang dapat dijelaskan oleh regresi yang diperoleh. Sedangkan koefisien korelasi hanya merupakan ukuran mengenai derajat hubungan antara dua variabel.

2.6 Metode Theil

Theil (1950) mengusulkan perkiraan kemiringan (*slope*) garis regresi sebagai median kemiringan dari seluruh pasangan garis dan titik-titik dengan nilai x yang berbeda, metode ini disebut metode Theil. Misalkan ada n pasangan data $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ dengan model regresi linier seperti pada persamaan (2.1). Estimasi untuk β_0 dan β_1 dengan notasi masing-masing $\tilde{\beta}_0$ dan $\tilde{\beta}_1$ akan dihitung dengan metode Theil. Setiap data berpasangan (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) , nilai kemiringan dengan notasi b_{ij} dirumuskan sebagai berikut :

$$b_{ij} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}, 1 \leq i < j \leq n \quad (2.10)$$

Penduga bagi β_1 yang dinotasikan $\tilde{\beta}_1$ dinyatakan sebagai median dari nilai-nilai b_{ij} sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\tilde{\beta}_1 = \text{med} \{b_{ij}\} \quad (2.11)$$

Sedangkan estimasi bagi β_0 yang dinotasikan $\tilde{\beta}_0$ adalah :

$$\tilde{\beta}_0 = \text{med} \{y_i - \tilde{\beta}_1 x_i\} \quad (2.12)$$

dengan menggunakan $\tilde{\beta}_1$ dan $\tilde{\beta}_0$ pada persamaan (2.11) dan (2.12), maka diperoleh pendekatan untuk model (2.1) berbentuk

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_i + \varepsilon \quad (2.13)$$

2.7 Contoh untuk Regresi Linier

Diberikan data x dan y dalam tabel 2.1 di bawah ini

Tabel 2.1 Data Kode Barang yang Baik dan Kode Barang yang Cacat

n	Kode Barang yang Baik (x)	Kode Barang yang Cacat (y)
1	0	2,5
2	1	3,1
3	2	3,4
4	3	4,0

5	4	4,6
6	5	5,1
7	6	11,1

Berdasarkan data di atas diketahui bahwa jumlah pengamatan sebanyak $n=7$, untuk mencari persamaan regresi liniernya, dapat digunakan metode kuadrat terkecil. Nilai parameter $\hat{\beta}_1$ dan $\hat{\beta}_0$ dicari dengan menggunakan rumus pada persamaan (2.5) dan (2.6) diperoleh :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum y_i x_i - (\sum x_i)(\sum y_i)/n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(1324) - (21)/7 (338)}{7(91) - (144)/7}$$

$$\hat{\beta}_1 = 1,1071$$

dan

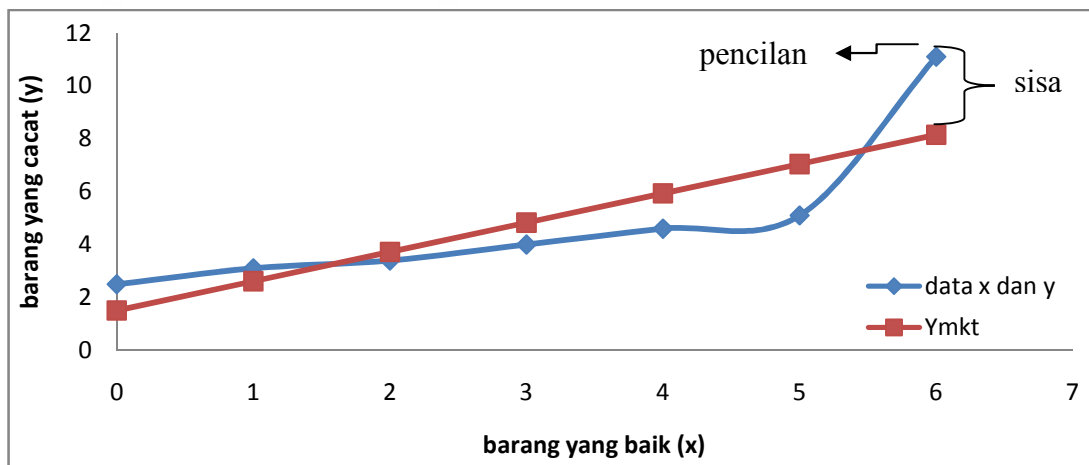
$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_0 = 4,8285 - 1,1071 (3)$$

$$\hat{\beta}_0 = 1,5071$$

sehingga persamaan regresi liniernya adalah :

$$\hat{Y}_{MKI} = 1,5071 + 1,1071x$$



Gambar 2.1 Grafik Regresi Linier dengan Metode Kuadrat Terkecil.

Berdasarkan gambar 2.1 terlihat bahwa titik-titik estimasi tidak tepat berada di titik-titik pengamatan. Selisih masing-masing titik data dengan titik estimasi pada garis regresi $(y_i - \hat{y}_i)$, adalah 0,99291; 0,48577; -0,32137; -0,82851; -1,33565; -1,94279; 2,95007, sehingga diperoleh jumlah sisanya sebesar 0,00043. Nilai yang mendekati nol ini menunjukkan bahwa garis regresi yang dihasilkan metode kuadrat terkecil adalah yang terbaik, karena metode kuadrat terkecil bertujuan meminimumkan jumlah kesalahan. Tetapi adanya data pencilan membuat garis regresi mengikuti pola adanya data pencilan, akibatnya beberapa titik estimasi menjauh dari titik-titik data pengamatan. Hal ini menyebabkan garis regresi yang dihasilkan metode kuadrat terkecil tidak sesuai untuk data pengamatan, sehingga perlu dicari garis regresi yang lebih sesuai. Selanjutnya digunakan metode Theil untuk mencari persamaan regresi liniernya. Pertama tentukan dulu nilai b_{ij} dengan rumus pada persamaan (2.10) sehingga :

$$b_{12} = \frac{3,1-2,5}{1-0} = 0,6000$$

$$b_{67} = 0,450$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$b_{67} = 6,000$$

dari b_{ij} yang berbeda secara aljabar dan lebih memungkinkan untuk menulisnya dalam sebuah matriks segitiga atas yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} & \cdots & b_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.600 & 0.450 & 0.300 & 0.525 & 0.520 & 1.433 \\ 0 & 0 & 0.300 & 0.450 & 0.500 & 0.500 & 1.600 \\ 0 & 0 & 0 & 0.600 & 0.600 & 0.567 & 1.900 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.600 & 0.550 & 2.367 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.500 & 3.250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.000 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas, sesuai dengan syarat $1 \leq i \leq j \leq \infty$ terlihat ada 21 b_{ij} dalam matriks ini kemudian urutkan nilai-nilai b_{ij} dari yang terkecil ke yang terbesar diperoleh mediannya adalah nilai yang ke-11 yaitu $\tilde{\beta}_1 = 0,567$. Selanjutnya cari nilai $\tilde{\beta}_0$ dengan menggunakan rumus (2.12) sehingga :

$$\tilde{\beta}_1 = 2,5 - 0,567(0) = 2,5$$

$$\tilde{\beta}_2 = 3,1 - 0,567(1) = 2,533$$

$$\tilde{\beta}_3 = 3,4 - 0,567(2) = 2,266$$

$$\tilde{\beta}_4 = 4,0 - 0,567(3) = 2,299$$

$$\tilde{\beta}_5 = 4,6 - 0,567(4) = 2,332$$

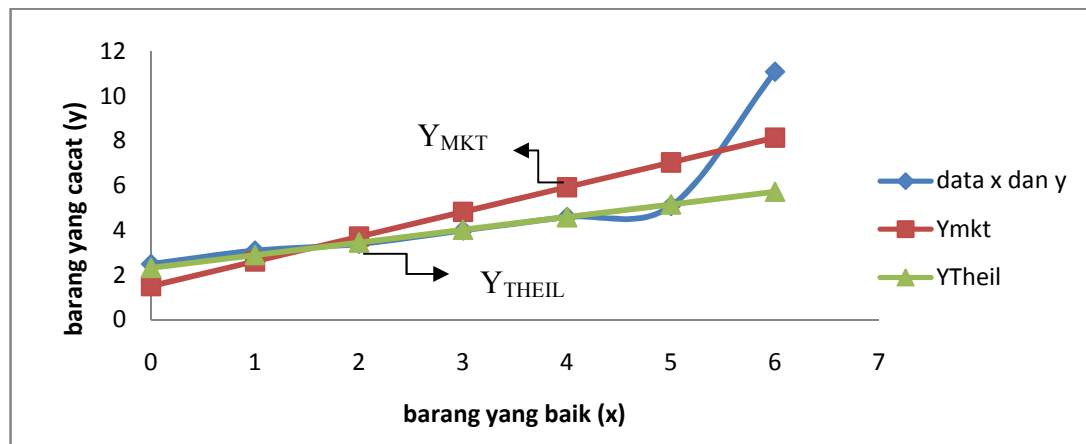
$$\tilde{\beta}_6 = 5,1 - 0,567(5) = 2,262$$

$$\tilde{\beta}_7 = 11,1 - 0,567(6) = 7,698$$

Kemudian urutkan nilai-nilai tersebut dari yang terkecil ke yang terbesar sehingga diperoleh median dari $\tilde{\beta}_0 = 2,332$. Dengan diketahuinya nilai $\tilde{\beta}_1$ dan $\tilde{\beta}_0$ maka dapat kita peroleh garis regresi yang sesuai yaitu :

$$\hat{Y}_{THEIL} = 2,332 + 0,567x$$

dengan grafik persamaan regresi liniernya diberikan pada gambar 2.2, yaitu :



Gambar 2.2 Grafik Regresi Linier dengan Metode Kuadrat Terkecil dan Metode Theil

Garis regresi yang dihasilkan metode Theil menunjukkan bahwa hampir semua titik estimasi berada dekat bahkan sama dengan titik-titik data pengamatan. Hanya ada satu titik data pengamatan yang jauh dari titik estimasi. Selisih masing-masing titik data dengan titik estimasi pada garis regresi yaitu: $(y_i - \hat{y}_i)$, maka diperoleh sisanya adalah: 0,168; 0,201; -0,066; -0,033; 0; -0,067; 5,366. Nilai sisa dari titik data pencilan adalah (6;11,1) sebesar 5,366, ini tidak mempengaruhi garis regresi yang dihasilkan metode Theil, karena garis regresi yang dihasilkan metode Theil terbentuk melalui median dari seluruh data pengamatan. Jika tidak memasukkan nilai pengamatan data pencilan, maka diperoleh persamaan regresi linier sederhana dengan metode Theil sebagai berikut :

$$\hat{Y}_{THEIL2} = 2,4 + 0,52x$$

Sedangkan untuk pengamatan tanpa data pencilan dengan metode kuadrat terkecil diperoleh persamaan regresi liniernya sebagai berikut :

$$\hat{Y}_{MKT2} = 2,4905 + 0,5171x$$

Persamaan regresi linier tanpa data pencilan yang dihasilkan oleh metode kuadrat terkecil mempunyai nilai yang mendekati nilai persamaan regresi linier tanpa data pencilan yang dihasilkan oleh metode Theil. Berarti data pencilan mempengaruhi persamaan regresi linier yang dihasilkan metode kuadrat terkecil, sedangkan persamaan regresi linier yang dihasilkan metode Theil tetap sesuai untuk data pengamatan tanpa data pencilan maupun dengan data pencilan.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang penulis gunakan adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

3.1 Metode Kuadrat Terkecil

1. Diberikan data x dan y
2. Menyelesaikan nilai-nilai dari:
 - $\sum x_i$ dan $\sum y_i$
 - $\sum x_i^2$, $\sum x_i^3$ dan $\sum x_i^4$
 - $\sum x_i y_i$ dan $\sum x_i^2 y_i$
3. Menyusun nilai-nilai yang diperoleh pada point 2 dalam sebuah matriks $Ax=b$.

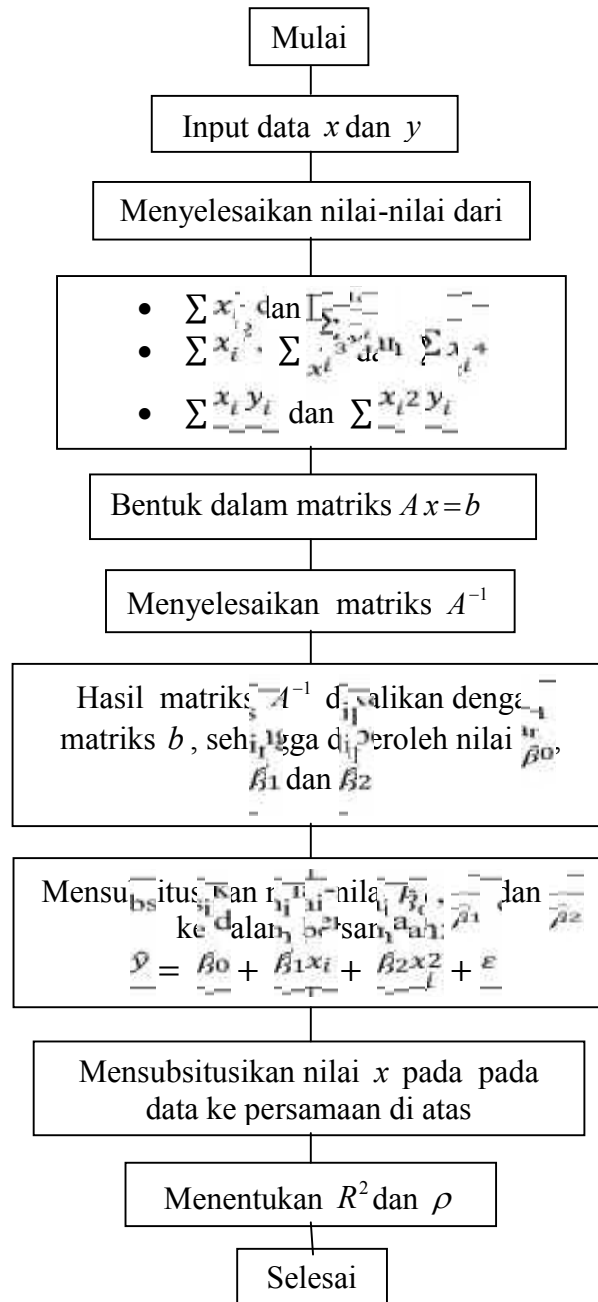
$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

4. Menyelesaikan matriks A^{-1}

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

5. Menentukan nilai-nilai $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ dan $\hat{\beta}_2$ maka kalikanlah hasil matriks A^{-1} dengan matriks b .
6. Mensubstitusikan nilai $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ dan $\hat{\beta}_2$ ke dalam persamaan $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \hat{\beta}_2 x_i^2 + \varepsilon$
7. Mensubstitusikan nilai x yang ada pada data ke persamaan pada point 6
8. Menentukan nilai R^2 dan ρ .

Langkah-langkah metodologi penelitian dengan metode kuadrat terkecil di atas dapat digambarkan dalam *flow chart* sebagai berikut:

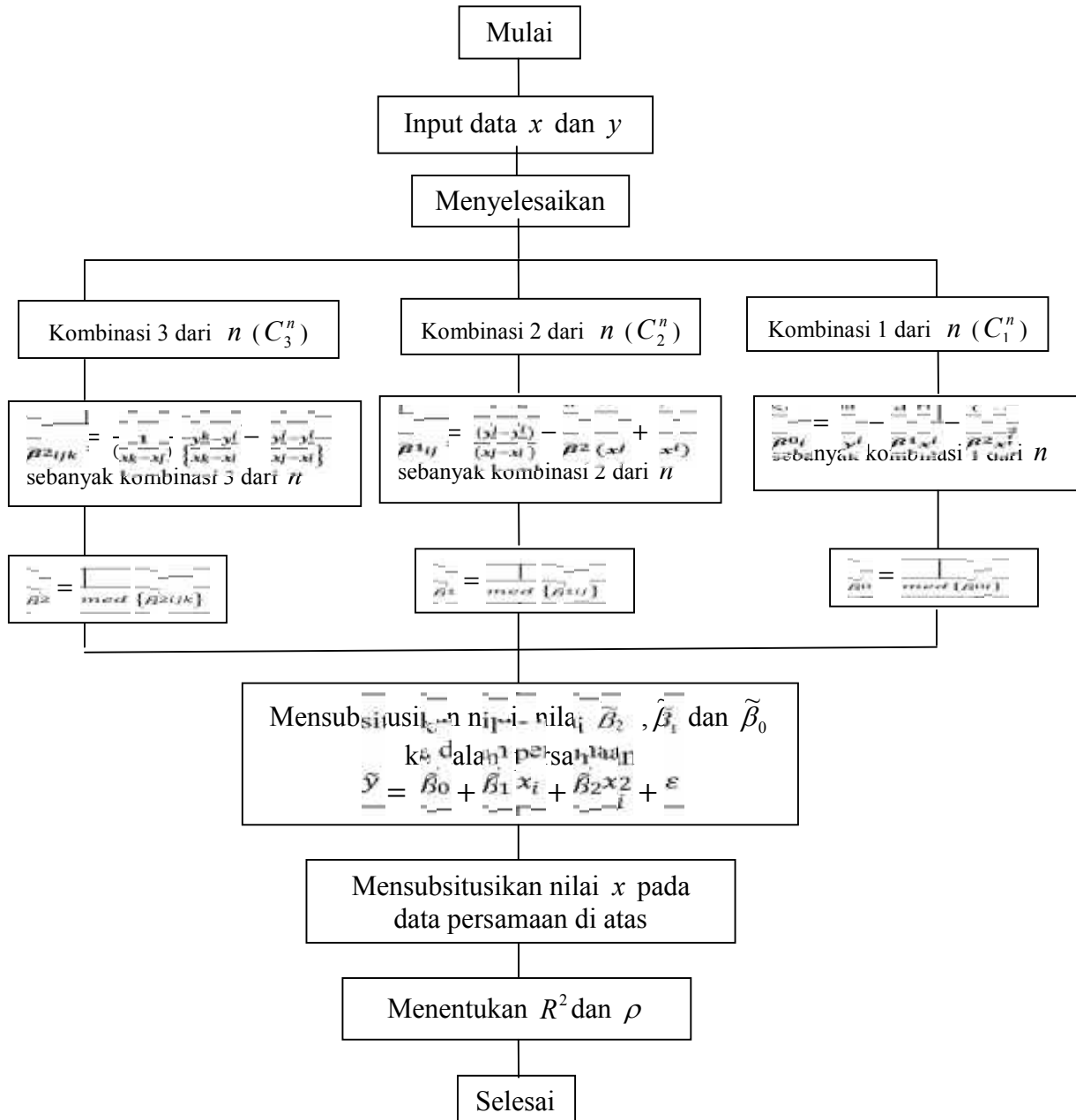


Gambar 3.1 Flow Chart Metode Kuadrat Terkecil

3.2 Metode Theil

1. Diberikan data x dan y
2. Menyelesaikan :
 - Kombinasi 3 dari n (C_3^n)
 - $\tilde{\beta}_{2_{ijk}} = \frac{1}{(x_k - x_j)} \left\{ \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i} - \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \right\}$, sebanyak kombinasi 3 dari n
 - $\tilde{\beta}_2 = med \{ \tilde{\beta}_{2_{ijk}} \}$
3. Menyelesaikan :
 - Kombinasi 2 dari n (C_2^n)
 - $\tilde{\beta}_{1_{ij}} = \frac{(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)} - \tilde{\beta}_2 (x_j + x_i)$, sebanyak kombinasi 2 dari n
 - $\tilde{\beta}_1 = med \{ \tilde{\beta}_{1_{ij}} \}$
4. Menyelesaikan :
 - Kombinasi 1 dari n (C_1^n)
 - $\tilde{\beta}_{0_i} = y_i - \tilde{\beta}_1 x_i - \tilde{\beta}_2 x_i^2$, sebanyak kombinasi 1 dari n
 - $\tilde{\beta}_0 = med \{ \tilde{\beta}_{0_i} \}$
5. Mensubstitusikan nilai- nilai $\tilde{\beta}_2$, $\tilde{\beta}_1$ dan $\tilde{\beta}_0$ ke dalam persamaan
$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_i + \tilde{\beta}_2 x_i^2 + \epsilon$$
6. Mensubstitusikan nilai x yang ada pada data ke persamaan pada point 5
7. Menentukan nilai R^2 dan ρ .

Langkah-langkah metodologi penelitian dengan metode Theil di atas dapat digambarkan dalam *flow chart* sebagai berikut :



Gambar 3.2 Flow Chart Metode Theil

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Regresi kuadratik adalah regresi linier dengan dua variabel bebas. Model regresi kuadratik secara umum dinyatakan sebagai berikut:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

Hasil penelitian untuk data tinggi dan berat badan bayi dengan menggunakan metode kuadrat terkecil dan metode Theil yaitu :

1. Persamaan regresi kuadratik yang dihasilkan oleh metode kuadrat terkecil tidak sesuai untuk data tinggi dan berat badan bayi, karena terdapatnya data pencilan.
2. Persamaan regresi kuadratik yang dihasilkan oleh metode theil sesuai untuk data tinggi dan berat badan bayi, dengan data pencilan atau tanpa data pencilan.

Jadi garis regresi kuadratik yang dihasilkan oleh metode Theil lebih sesuai untuk data tinggi dan berat badan bayi dibandingkan dengan garis regresi kuadratik yang dihasilkan oleh metode kuadrat terkecil.

5.2 Saran

Tugas akhir ini membahas tentang perbandingan metode kuadrat terkecil dengan metode Theil untuk regresi kuadratik. Oleh karena itu, penulis menyarankan bagi pembaca yang ingin melanjutkan tugas akhir ini agar dapat melanjutkannya dengan mencari perbandingan metode lain untuk regresi kuadratik.

BAB IV

PERBANDINGAN METODE KUADRAT TERKECIL DENGAN METODE THEIL UNTUK REGRESI KUADRATIK

Bab ini akan membahas tentang perbandingan metode kuadrat terkecil dengan metode Theil untuk regresi kuadrat. Pembahasan ini akan dimulai dengan menggunakan metode kuadrat terkecil kemudian dilanjutkan dengan metode Theil selanjutnya akan ditentukan nilai-nilai parameternya.

4.1 Regresi Kuadratik

Shao (1980) menjelaskan bahwa pembahasan regresi linier didasarkan pada anggapan bahwa hubungan rata-rata antara kedua variabel dapat digambarkan dengan sebuah garis lurus. Tetapi, untuk beberapa data pengamatan tertentu anggapan itu dapat menjadi tidak terpenuhi karena berdasarkan pengamatan terhadap diagram pencar datanya, garis yang dapat ditarik dari pencaran data tidak berbentuk garis lurus, sehingga garis regresi linier tidak sesuai untuk data pengamatan.

Dengan penambahan x^2 pada persamaan regresi linier derajat satu akan diperoleh persamaan regresi derajat dua, atau disebut persamaan regresi kuadratik yang modelnya adalah :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 \quad (4.1)$$

dengan y adalah variabel tidak bebas, x adalah variabel bebas, β_0 adalah titik potong y dari garis regresi, β_1 adalah kemiringan garis regresi, β_2 adalah koefisien kuadratik dan ε yang merupakan kekeliruan model.

Dalam persamaan (4.1) terdapat 3 buah parameter yaitu : β_0 , β_1 dan β_2 yang tidak diketahui. Parameter β_2 menunjukkan bagaimana bentuk kurva regresi bila nilai-nilai estimasi y itu disajikan dalam bentuk gambar. Bila nilai β_2 adalah positif, maka kurva akan berbentuk cekung (*upward-opening vertical parabola*). Bila nilai

β_2 adalah negatif, maka kurva akan berbentuk cembung (*downward-opening vertical parabola*).

4.2 Metode Kuadrat Terkecil untuk Regresi Kuadratik

Nilai estimasi parameter $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ dan $\hat{\beta}_2$ pada persamaan (4.1) dapat ditentukan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil yaitu dengan meminimumkan jumlah kuadrat kekeliruan (error) dari persamaan (4.1), yaitu :

$$J = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

Estimasi persamaan regresi kuadratik, yaitu :

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.3)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (4.3) ke persamaan (4.2), maka di peroleh persamaan yaitu :

$$J = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2)^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

Pertama, minimumkan persamaan (4.4) terhadap b_0 , maka di peroleh persamaannya yaitu :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial b_0} &= \sum 2 (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2)(-1) = 0 \\ &-2 \sum (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2)(1) = 0 \\ &\sum (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2)(1) = 0 \\ &\sum (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2) = 0 \\ &\sum y_i - \sum b_0 - \sum b_1 x_i - \sum b_2 x_i^2 = 0 \\ &\sum y_i - n b_0 - b_1 \sum x_i - b_2 \sum x_i^2 = 0 \\ &\sum y_i = n b_0 + b_1 \sum x_i + b_2 \sum x_i^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Kedua, minimumkan persamaan (4.4) terhadap b_1 , yaitu :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial b_1} &= \sum 2 (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2)(-x_i) = 0 \\ &-2 \sum (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2)(x_i) = 0 \\ &\sum (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2)(x_i) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum (y_i x_i - b_0 x_i - b_1 x_i^2 - b_2 x_i^3) &= 0 \\
\sum y_i x_i - \sum b_0 x_i - \sum b_1 x_i^2 - \sum b_2 x_i^3 &= 0 \\
\sum y_i x_i - b_0 \sum x_i - b_1 \sum x_i^2 - b_2 \sum x_i^3 &= 0 \\
\sum y_i x_i &= b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 + b_2 \sum x_i^3
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Terakhir adalah meminimumkan persamaan (4.4) terhadap b_2 , yaitu :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial b_2} &= \sum 2 (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2) (-x_i^2) = 0 \\
-2 \sum (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2) (x_i^2) &= 0 \\
\sum (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2) (x_i^2) &= 0 \\
\sum (y_i x_i^2 - b_0 x_i^2 - b_1 x_i^3 - b_2 x_i^4) &= 0 \\
\sum y_i x_i^2 - \sum b_0 x_i^2 - \sum b_1 x_i^3 - \sum b_2 x_i^4 &= 0 \\
\sum y_i x_i^2 - b_0 \sum x_i^2 - b_1 \sum x_i^3 - b_2 \sum x_i^4 &= 0 \\
\sum y_i x_i^2 &= b_0 \sum x_i^2 + b_1 \sum x_i^3 + b_2 \sum x_i^4
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Persamaan (4.5), (4.6) dan (4.7) disusun seperti di bawah ini :

$$\begin{aligned}
\sum y_i &= n b_0 + b_1 \sum x_i + b_2 \sum x_i^2 \\
\sum y_i x_i &= b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 + b_2 \sum x_i^3 \\
\sum y_i x_i^2 &= b_0 \sum x_i^2 + b_1 \sum x_i^3 + b_2 \sum x_i^4
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Persamaan (4.8) dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu :

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Selanjutnya matriks (4.9) dapat disederhanakan menjadi matriks berikut ini, yaitu:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Parameter b_0 , b_1 dan b_2 adalah penduga nilai parameter $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ dan $\hat{\beta}_2$, sehingga matriks (4.10) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

dengan n adalah jumlah data pengamatan, $i=1,2,\dots,n$, x adalah variabel bebas, y adalah variabel tak bebas dan $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ dan $\hat{\beta}_2$ adalah parameter dari persamaan regresi kuadrat.

4.3 Metode Theil untuk Regresi Kuadrat

Estimasi parameter β_0 , β_1 dan β_2 pada persamaan (4.1) dengan menggunakan pengembangan metode Theil dapat diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan dibawah ini, yaitu :

$$\begin{aligned} y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 \\ y_j &= \beta_0 + \beta_1 x_j + \beta_2 x_j^2 \\ y_k &= \beta_0 + \beta_1 x_k + \beta_2 x_k^2 \end{aligned} \quad , \quad 1 \leq i \leq j \leq k \leq n \quad (4.12)$$

Estimasi untuk parameter β_2 dengan notasi $\tilde{\beta}_2$ sebagai koefisien kuadratnya adalah:

$$\tilde{\beta}_2 = \text{med} \{ \tilde{\beta}_{2ijk} \} \quad (4.13)$$

dengan

$$\tilde{\beta}_{2ijk} = \frac{1}{(x_k - x_j)} \left\{ \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i} - \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \right\} \quad (4.14)$$

Estimasi parameter β_1 dengan notasi $\tilde{\beta}_1$ adalah :

$$\tilde{\beta}_1 = \text{med} \{ \tilde{\beta}_{1ij} \} \quad (4.15)$$

dengan

$$\tilde{\beta}_{1ij} = \frac{(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)} - \tilde{\beta}_2 (x_j + x_i) \quad (4.16)$$

Estimasi parameter β_0 dengan notasi $\tilde{\beta}_0$ adalah :

$$\tilde{\beta}_0 = \text{med} \{ \tilde{\beta}_{0i} \} \quad (4.17)$$

dengan

$$\tilde{\beta}_{0i} = y_i - \tilde{\beta}_1 x_i - \tilde{\beta}_2 x_i^2 \quad (4.18)$$

Dengan menggunakan $\tilde{\beta}_2$, $\tilde{\beta}_1$ dan $\tilde{\beta}_0$ pada persamaan (4.13), (4.15) dan (4.17), maka diperoleh persamaan regresi kuadrat adalah :

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_i + \tilde{\beta}_2 x_i^2 + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.19)$$

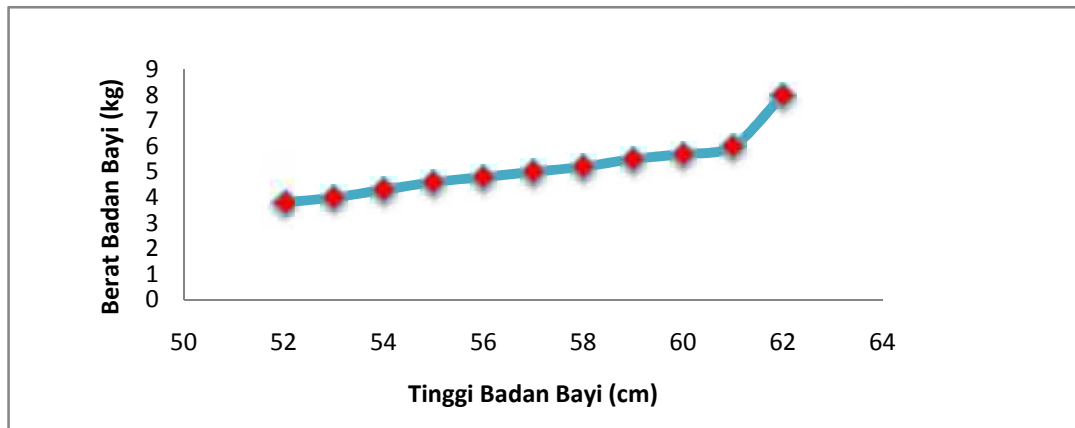
4.4 Aplikasi untuk Regresi Kuadrat

Supaya memberikan gambaran yang lebih jelas tentang teori yang telah dibahas mengenai model regresi kuadrat dengan menggunakan metode kuadrat terkecil dan metode Theil, maka akan diberikan contoh datanya. Data untuk contoh ini diambil dari Klinik Rumah Bersalin Annisa tentang tinggi dan berat badan bayi umur 0-5 bulan, yang datanya disajikan dalam tabel 4.1. Persamaan regresi kuadrat akan dicari dengan menggunakan dua metode yaitu metode kuadrat terkecil dan metode Theil.

Tabel 4.1 Data Tinggi Badan Bayi dan Berat Badan Bayi

n	Tinggi Badan (cm)	Berat Badan (kg)
1	52	3,8
2	53	4,0
3	54	4,3
4	55	4,6
5	56	4,8
6	57	5,0
7	58	5,2
8	59	5,5
9	60	5,7
10	61	6,0
11	62	8,0

Diagram pencar untuk data tersebut dapat dilihat pada Gambar 4.2 berikut ini :



Gambar 4.2 Diagram pencar Tinggi dan Berat badan bayi

Persamaan regresi kuadratik dari data pada tabel 4.1 akan dicari dengan menggunakan metode kuadrat terkecil, untuk itu terlebih dahulu dicari nilai-nilai yang diperlukan seperti dalam tabel 4.3 berikut ini :

Tabel 4.3 Nilai–nilai yang diperlukan untuk Mencari Persamaan Regresi Kuadratik

n	x	y	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	52	3,8	2704	140608	7311616	197,6	10275,2
2	53	4,0	2809	148877	7890481	212	11236
3	54	4,3	2916	157464	8503056	232,2	12538,8
4	55	4,6	3025	166375	9150625	253	13915
5	56	4,8	3136	175616	9834496	268,8	15052,8
6	57	5,0	3249	185193	10556001	285	16245
7	58	5,2	3364	195112	11316496	301,6	17492,8
8	59	5,5	3481	205379	12117361	342	19145,5
9	60	5,7	3600	216000	12960000	342	20520

10	61	6,0	3721	226981	13845841	366	22326
11	62	8,0	3844	238328	14776336	496	30752
Σ	627	56,9	35849	2055933	118262309	3278,7	189499,1

Berdasarkan data di atas, diketahui bahwa jumlah $n=11$. Berdasarkan persamaan (4.8) maka diperoleh sistem persamaannya adalah

$$56,9 = 11\beta_0 + 627\beta_1 + 35849\beta_2$$

$$3278,7 = 627\beta_0 + 35849\beta_1 + 2055933\beta_2$$

$$189499,1 = 35849\beta_0 + 2055933\beta_1 + 118262309\beta_2$$

Kemudian ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 11 & 627 & 35849 \\ 627 & 35849 & 2055933 \\ 35849 & 2055933 & 118262309 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56,9 \\ 3278,7 \\ 189499,1 \end{bmatrix}$$

maka matriks di atas disederhanakan menjadi

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 627 & 35849 \\ 627 & 35849 & 2055933 \\ 35849 & 2055933 & 118262309 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 56,9 \\ 3278,7 \\ 189499,1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86,4912 \\ -3,1857 \\ 0,0307 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh estimasi persamaan regresi kuadratnya adalah :

$$\hat{Y}_{MKI} = 86,4912 - 3,1857x + 0,0307x^2 \quad (4.20)$$

Selanjutnya substitusikan nilai-nilai x pada persamaan di atas:

$$\hat{Y}_1 = 86,4912 - 3,1857(52) + 0,0307(52)^2$$

$$\hat{Y}_2 = 86,4912 - 3,1857(53) + 0,0307(53)^2$$

$$\hat{Y}_3 = 86,4912 - 3,1857(54) + 0,0307(54)^2$$

$$\hat{Y}_4 = 86,4912 - 3,1857(55) + 0,0307(55)^2$$

$$\hat{Y}_5 = 86,4912 - 3,1857(56) + 0,0307(56)^2$$

$$\hat{Y}_6 = 86,4912 - 3,1857(57) + 0,0307(57)^2$$

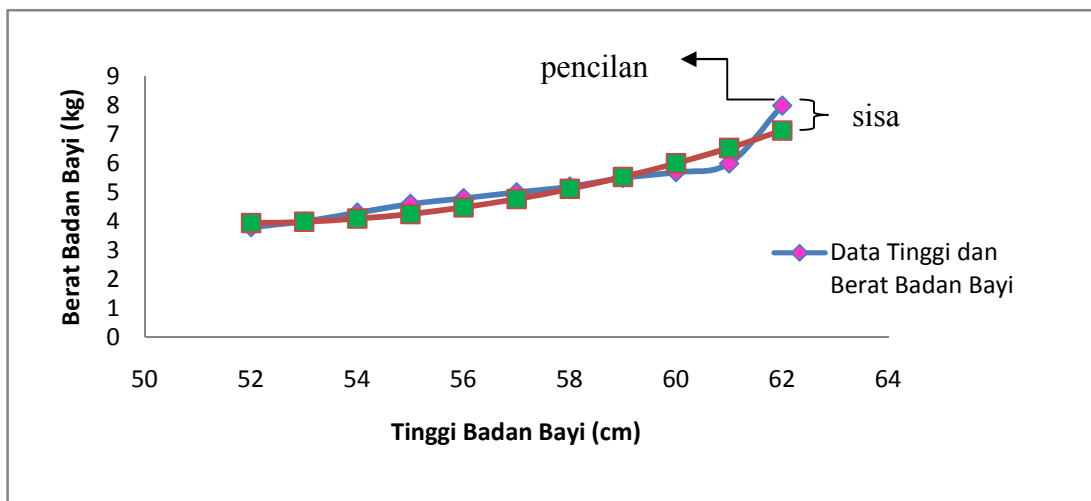
$$\hat{Y}_7 = 86,4912 - 3,1857(58) + 0,0307(58)^2$$

$$\hat{Y}_8 = 86,4912 - 3,1857(59) + 0,0307(59)^2$$

$$\hat{Y}_9 = 86,4912 - 3,1857(60) + 0,0307(60)^2$$

$$\hat{Y}_{10} = 86,4912 - 3,1857(61) + 0,0307(61)^2$$

$$\hat{Y}_{11} = 86,4912 - 3,1857(62) + 0,0307(62)^2$$



Gambar 4.3 Grafik Regresi Kuadratik dengan Metode Kuadrat Terkecil

Selanjutnya diperoleh nilai koefisien determinasi R^2 dengan menggunakan rumus pada persamaan (2.8) sehingga diperoleh $R^2 = 0,999$. Ini berarti besarnya pengaruh tinggi badan bayi terhadap berat badan bayi adalah sebesar 99,9 % dan sisanya 0,1% dipengaruhi oleh faktor lain selain tinggi badan bayi. Sedangkan nilai koefisien korelasi ρ dapat dicari dengan menggunakan rumus pada persamaan (2.9), sehingga diperoleh $\rho = 0,999$. Ini artinya bahwa keeratan hubungan antara tinggi badan bayi terhadap berat badan bayi adalah sebesar 99,9 %. Tanda positif pada ρ menunjukkan adanya hubungan searah antara dua variabel tersebut. Nilai ρ mendekati +1 berarti antara dua variabel tersebut terdapat hubungan yang mendekati

sempurna. Ini menunjukkan terjadinya penyimpangan yaitu: adanya multikolinearitas terhadap asumsi (anggapan) nonmultikolinearitas dari metode kuadrat terkecil dan adanya data pencilan. Hal ini menyebabkan model regresi kuadrat yang diperoleh dengan metode kuadrat terkecil bukan model regresi yang terbaik, untuk itu diperoleh metode lain yang dapat menghasilkan model regresi yang lebih sesuai untuk data tinggi dan berat badan bayi. Selanjutnya digunakan pengembangan metode Theil untuk mencari persamaan regresi kuadrat yang lebih sesuai.

Berdasarkan sistem persamaan (4.12), substitusikan nilai-nilai tinggi dan berat badan bayi ke dalam persamaan tersebut, maka diperoleh sistem persamaannya adalah:

$$3,8 = \beta_0 + \beta_1(52) + \beta_2(52)^2$$

$$4,0 = \beta_0 + \beta_1(53) + \beta_2(53)^2$$

$$4,3 = \beta_0 + \beta_1(54) + \beta_2(54)^2$$

$$4,6 = \beta_0 + \beta_1(55) + \beta_2(55)^2$$

$$4,8 = \beta_0 + \beta_1(56) + \beta_2(56)^2$$

$$5,0 = \beta_0 + \beta_1(57) + \beta_2(57)^2$$

$$5,2 = \beta_0 + \beta_1(58) + \beta_2(58)^2$$

$$5,5 = \beta_0 + \beta_1(59) + \beta_2(59)^2$$

$$5,7 = \beta_0 + \beta_1(60) + \beta_2(60)^2$$

$$6,0 = \beta_0 + \beta_1(61) + \beta_2(61)^2$$

$$8,0 = \beta_0 + \beta_1(62) + \beta_2(62)^2$$

dengan membuat susunan yang berbeda dari tiap-tiap kali diambil subkumpulan sebanyak tiga, yang dalam hal ini disebut kombinasi dengan rumus umumnya adalah:

$$C_r^n = \frac{(n!)}{r!(n-r)!} \quad (4.21)$$

Jadi, $C_3^{11} = \frac{(11!)}{3!(11-3)!} = 165$ buah subkumpulan.

Parameter β_2 untuk tiap-tiap subkumpulan dari 165 buah subkumpulan yang

dinotasikan dengan $\tilde{\beta}_{2(ijk)}$ adalah :

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{2_{123}} &= \frac{1}{(x_3-x_2)} \left\{ \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \right\} \\ \tilde{\beta}_{2_{124}} &= \frac{1}{(x_4-x_2)} \left\{ \frac{y_4-y_1}{x_4-x_1} - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \right\} \\ &\vdots \\ \tilde{\beta}_{2_{91011}} &= \frac{1}{(x_{11}-x_{10})} \left\{ \frac{y_{11}-y_9}{x_{11}-x_9} - \frac{y_{10}-y_9}{x_{10}-x_9} \right\}\end{aligned}$$

Jika nilai-nilai dari data x dan y pada tabel 4.1 dimasukkan ke dalam persamaan diatas maka diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{2_{123}} &= 0,05 \\ \tilde{\beta}_{2_{124}} &= 0,033 \\ &\vdots \\ \tilde{\beta}_{2_{91011}} &= 0,85\end{aligned}$$

Estimasi parameter β_2 dengan notasi $\tilde{\beta}_2$ untuk tiap-tiap subkumpulan $\tilde{\beta}_{2(ijk)}$ dicari dengan menggunakan persamaan (4.13) sehingga diperoleh $\tilde{\beta}_2 = 0,0059$.

Estimasi parameter β_1 yang dinotasikan dengan $\tilde{\beta}_{1(ij)}$ digunakan dengan susunan yang berbeda dari tiap-tiap kali diambil subkumpulan sebanyak dua, maka jumlah susunannya adalah sebanyak $C_2^{11} = \frac{(11!)}{2!(11-2)!} = 55$ buah subkumpulan.

Parameter β_1 untuk tiap-tiap subkumpulan dari 55 buah subkumpulan yang dinotasikan dengan $\tilde{\beta}_{1(ij)}$ adalah :

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{1_{12}} &= \frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)} - \tilde{\beta}_2(x_2 + x_1) \\ \tilde{\beta}_{1_{13}} &= \frac{(y_3-y_1)}{(x_3-x_1)} - \tilde{\beta}_2(x_3 + x_1)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_{11011} = \frac{(y_{11}-y_{10})}{(x_{11}-x_{10})} - \tilde{\beta}_2(x_{11} + x_{10}) \end{array}$$

Jika nilai-nilai dari data x dan y pada tabel 4.1 dimasukkan ke dalam persamaan di atas maka diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \tilde{\beta}_{112} = -0,4247 \\ \tilde{\beta}_{113} = -0,3807 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_{11011} = 1,268 \end{array}$$

Estimasi parameter β_1 dengan notasi $\tilde{\beta}_1$ untuk tiap-tiap subkumpulan $\tilde{\beta}_{1(i)}$ dicari dengan menggunakan persamaan (4.15) sehingga diperoleh : $\tilde{\beta}_1 = -0,4271$. Selanjutnya estimasi parameter β_0 yang dinotasikan dengan $\tilde{\beta}_{0(i)}$ yang dalam hal ini digunakan susunan yang berbeda dari tiap-tiap kali diambil subkumpulan sebanyak satu, maka jumlah susunannya adalah sebanyak : $C_1^{11} = \frac{(11!)}{1(11-1)!} = 11$ buah subkumpulan.

Parameter β_0 untuk tiap-tiap subkumpulan dari 11 buah subkumpulan yang dinotasikan $\tilde{\beta}_{0(i)}$ adalah :

$$\begin{array}{l} \tilde{\beta}_{01} = y_1 - \tilde{\beta}_1 x_1 - \tilde{\beta}_2 x_1^2 \\ \tilde{\beta}_{02} = y_2 - \tilde{\beta}_1 x_2 - \tilde{\beta}_2 x_2^2 \\ \tilde{\beta}_{03} = y_3 - \tilde{\beta}_1 x_3 - \tilde{\beta}_2 x_3^2 \\ \tilde{\beta}_{04} = y_4 - \tilde{\beta}_1 x_4 - \tilde{\beta}_2 x_4^2 \\ \tilde{\beta}_{05} = y_5 - \tilde{\beta}_1 x_5 - \tilde{\beta}_2 x_5^2 \\ \tilde{\beta}_{06} = y_6 - \tilde{\beta}_1 x_6 - \tilde{\beta}_2 x_6^2 \\ \tilde{\beta}_{07} = y_7 - \tilde{\beta}_1 x_7 - \tilde{\beta}_2 x_7^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{08} &= y_8 - \tilde{\beta}_1 x_8 - \tilde{\beta}_2 x_8^2 \\ \tilde{\beta}_{09} &= y_9 - \tilde{\beta}_1 x_9 - \tilde{\beta}_2 x_9^2 \\ \tilde{\beta}_{010} &= y_{10} - \tilde{\beta}_1 x_{10} - \tilde{\beta}_2 x_{10}^2 \\ \tilde{\beta}_{011} &= y_{11} - \tilde{\beta}_1 x_{11} - \tilde{\beta}_2 x_{11}^2\end{aligned}$$

Jika nilai-nilai dari data x dan y pada tabel 4.1 dimasukkan ke dalam persamaan diatas maka diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{01} &= 9,9214 \\ \tilde{\beta}_{02} &= 9,9238 \\ \tilde{\beta}_{03} &= 10,0143 \\ \tilde{\beta}_{04} &= 10,0928 \\ \tilde{\beta}_{05} &= 10,0595 \\ \tilde{\beta}_{06} &= 9,9981 \\ \tilde{\beta}_{07} &= 9,9572 \\ \tilde{\beta}_{08} &= 10,2881 \\ \tilde{\beta}_{09} &= 9,9072 \\ \tilde{\beta}_{010} &= 9,9144 \\ \tilde{\beta}_{011} &= 11,6096\end{aligned}$$

Estimasi parameter β_0 dengan notasi $\tilde{\beta}_0$ untuk tiap-tiap subkumpulan $\tilde{\beta}_{0(i)}$ dicari dengan menggunakan persamaan (4.17) sehingga diperoleh $\tilde{\beta}_0 = 9,9981$. Dengan menggunakan nilai-nilai $\tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_1$ dan $\tilde{\beta}_0$ di atas maka diperoleh persamaan regresi kuadratnya adalah :

$$\tilde{y}_{THEIL} = 9,9981 - 0,4271 x + 0,0059 x^2 \quad (4.22)$$

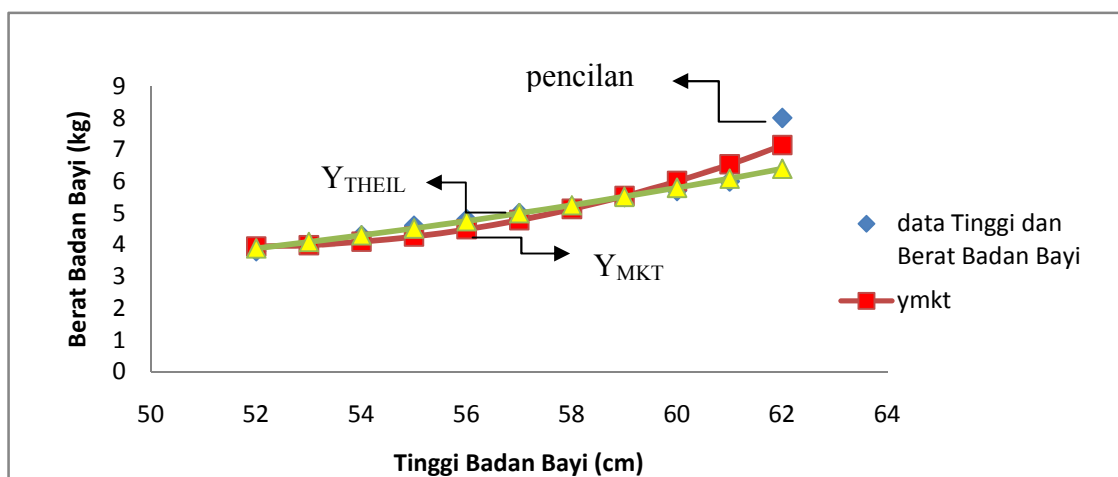
Selanjutnya masukkan nilai x kedalam persamaan di atas, yaitu :

$$\tilde{y}_1 = 9,9981 - 0,4271 (52) + 0,0059 (52)^2$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_2 &= 9,9981 - 0,4271 (53) + 0,0059 (53)^2 \\ \hat{y}_3 &= 9,9981 - 0,4271 (54) + 0,0059 (54)^2 \\ \hat{y}_4 &= 9,9981 - 0,4271 (55) + 0,0059 (55)^2 \\ \hat{y}_5 &= 9,9981 - 0,4271 (56) + 0,0059 (56)^2 \\ \hat{y}_6 &= 9,9981 - 0,4271 (57) + 0,0059 (57)^2 \\ \hat{y}_7 &= 9,9981 - 0,4271 (58) + 0,0059 (58)^2 \\ \hat{y}_8 &= 9,9981 - 0,4271 (59) + 0,0059 (59)^2 \\ \hat{y}_9 &= 9,9981 - 0,4271 (60) + 0,0059 (60)^2 \\ \hat{y}_{10} &= 9,9981 - 0,4271 (61) + 0,0059 (61)^2 \\ \hat{y}_{11} &= 9,9981 - 0,4271 (62) + 0,0059 (62)^2 \end{aligned}$$

Nilai koefisien determinasi R^2 dengan menggunakan rumus pada persamaan (2.8), sehingga diperoleh $R^2 = 0,999$. Ini berarti besarnya pengaruh tinggi badan bayi terhadap berat badan bayi adalah sebesar 99,9 % dan sisanya 0,1% yang dipengaruhi oleh faktor lain selain tinggi badan bayi.

Persamaan regresi kuadratik dengan metode kuadrat terkecil dan metode Theil dapat dibandingkan dalam gambar 4.4 dibawah ini :



Gambar 4.4 Grafik Regresi Kudratik dengan Menggunakan Metode Kuadrat Terkecil dan Metode Theil

Berdasarkan gambar 4.4 terlihat dengan jelas bahwa titik data pencilan (62;8) berpengaruh besar dalam membuat garis regresi yang terbaik. Untuk grafik regresi menggunakan metode kuadrat terkecil terlihat bahwa titik-titik estimasi tidak tepat berada di titik-titik data tinggi dan berat badan bayi. Perbedaan dari titik-titik estimasi dengan titik-titik data tinggi dan berat badan bayi disebut sisa.

Nilai masing-masing sisanya adalah: -0,1; 0; 0,2; 0,3; 0,3; 0,2; 0,1; 0; -0,3; -0,5; 0,9. Jumlah seluruh sisanya adalah : 1,1. Jumlah sisa yang mendekati +1 ini menunjukkan bahwa garis regresi yang dihasilkan oleh metode kuadrat terkecil ini adalah yang terbaik jika tidak ada data pencilan. Namun jika terdapat data pencilan maka data pencilan ini akan mempengaruhi garis regresi, dengan menarik garis regresi mengikuti pola adanya data pencilan, akibatnya beberapa titik estimasi menjauh dari titik-titik data tinggi dan berat badan bayi. Hal ini yang menguatkan bahwa garis regresi yang dihasilkan dengan metode kuadrat terkecil tidak sesuai untuk data tinggi dan berat badan bayi.

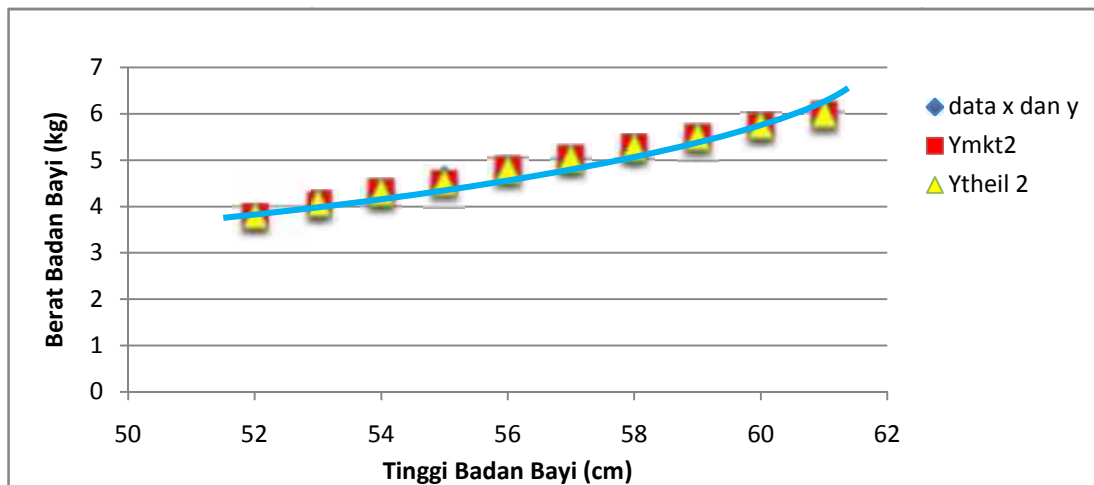
Berdasarkan grafik regresi kuadratik dengan metode Theil terlihat bahwa garis regresi yang dihasilkan metode Theil menunjukkan bahwa beberapa titik estimasi berada sangat dekat bahkan sama dengan titik-titik data tinggi dan berat badan bayi, tapi ada satu titik data tinggi dan berat badan bayi yang jauh dari titik estimasi. Selisih masing-masing titik data dengan titik estimasi pada garis regresi adalah : -0,06669; -0,06432; 0,02615; 0,10472; 0,07139; 0,02616; -0,03097; 0;-0,08093; -0,07376; 1,62151. Nilai sisa dari titik (62; 8) sebesar 1,62151 ini tidak berpengaruh terhadap garis regresi yang dihasilkan oleh metode Theil, karena garis regresi yang dihasilkan oleh metode Theil terbentuk melalui median dari seluruh data tinggi dan berat badan bayi. Jika tidak memasukkan nilai tinggi dan berat badan bayi data pencilan, maka diperoleh persamaan regresi kuadratik dengan metode Theil adalah :

$$\bar{Y}_{THEIL_2} = -8,67 + 0,24 x \quad (4.23)$$

Sedangkan untuk data tinggi dan berat badan bayi tanpa data pencilan dengan metode kuadrat terkecil diperoleh persamaan regresi kuadratnya adalah :

$$(4.24)$$

Grafik untuk persamaan (4.23) dan (4.24) di atas adalah sebagai berikut :



Gambar 4.5 Garis Regresi dengan Metode Kuadrat Terkecil dan Metode Theil untuk Data Tinggi Badan dan Berat Badan Bayi tanpa Data Pencilan

Berdasarkan gambar 4.5 terlihat bahwa garis regresi yang dihasilkan metode kuadrat terkecil mendekati nilai yang diberikan oleh prosedur Theil. Ini berarti bahwa data pencilan mempengaruhi persamaan regresi kuadrat yang dihasilkan metode kuadrat terkecil. Sedangkan persamaan regresi kuadrat yang dihasilkan metode Theil tetap sesuai untuk data tinggi dan berat badan bayi dengan data pencilan atau tanpa data pencilan. Jadi jelas bahwa regresi kuadrat yang dihasilkan metode Theil lebih sesuai untuk data tinggi dan berat badan bayi dibandingkan dengan garis regresi kuadrat yang dihasilkan metode kuadrat terkecil.

DAFTAR PUSTAKA

- Chatterjee, S & I, Olkin. *Nonparametric estimation for quadratic regression*. Statistics & Probability Letters. Elsevier, New York. 2006.
- Djarwanto & Subagyo. *Statistik Induktif*. Edisi keempat. BPEE. Yogyakarta. 1993.
- Dwi, R. S dan Harry, M. K. *Analisis Regresi*. Andi Offset. Yogyakarta. 1994.
- Mangkuatmodjo, S. *Statistik lanjutan*. Rineka cipta. Jakarta. 1999.
- Makridakis, S. *Metode dan Aplikasi Peramalan*. Edisi kedua. Erlangga Jakarta. 1999.
- Sembiring, RK. *Analisis Regresi*. Edisi kedua. ITB. Bandung. 1995.
- Soemartini, Dra. *Regresi Linier Non Parametrik melalui Metode Theil*. Bandung. 2008.
- Sprent, P. *Metode Statistik Nonparametrik Terapan*. Universitas Indonesia. Jakarta. 1991.
- Sudjana. *Metode Statistika*, edisi keenam. Tarsito. Bandung. 1989.
- Supangat, A. *Statistika dalam kajian Deskriptif, Inferensi dan Nonparametrik*. Kencana. Jakarta. 2008.

DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
2.1 Barang yang Bagus dan Cacat.....	II-6
4.1 Tinggi Badan dan Berat Badan Bayi.....	IV-5
4.3 Nilai-nilai yang diperlukan untuk Regresi Kuadratik	IV-6

DAFTAR LAMBANG

y	: variabel tak bebas
x	: variabel bebas
ε	: Epsilon
β_0	: Beta Nol
β_1	: Beta Satu
β_2	: Beta Dua
R^2	: koefisien determinasi
ρ	: Rho
Y_{MKT}	: Persamaan Regresi Kuadratik untuk Metode Kuadrat Terkecil
Y_{THEIL}	: Persamaan Regresi Kuadratik untuk Metode Theil

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan pada tanggal 22 Desember 1987 di Pekanbaru sebagai anak ketiga dari empat bersaudara dari pasangan bapak Kodiman dan ibu Parni. Penulis masuk TK Ibadah Rw-04, Kelurahan Tangkerang Tengah Pekanbaru. Tahun 1993-1994. Pada tahun 1994-2000. Penulis melanjutkan Sekolah Dasar Negeri 013, Wonorejo, Sukajadi Pekanbaru. Pada tahun 2003 Penulis Menyelesaikan pendidikan lanjutan pertama di Madrasah Tsanawiyah Negeri (MTsN) Pekanbaru, dan menamatkan pendidikan menengah atas dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam 1 (IPA 1) di Madrasah Aliyah Negeri 1 (MAN 1) Pekanbaru pada tahun 2006. Pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikannya ke perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Pekanbaru Riau.

Pada Tahun 2009 penulis mengikuti kuliah kerja nyata (KKN) di desa Bagan Laguh Kecamatan Bunut, Kabupaten Pelalawan. Pada tahun 2010 tepatnya semester delapan penulis melaksanakan kerja praktek di Badan Pemberdayaan Perempuan, Masyarakat dan Keluarga Berencana (BPPMKB), di jalan Puyuh No. 2 Pekanbaru dengan judul “ **Perbandingan PUS Hamil dan IAS pada Bulan Januari dan Februari Menggunakan Metode *Paired Comparison*** ” dibawah bimbingan ibu Fitri Aryani, M.Sc, dari tanggal 01 s.d 30 April 2010 dan diseminarkan pada tanggal 24 Mei 2010.

Penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul “ ***Perbandingan Metode Kuadrat Terkecil dengan Metode Theil untuk Regresi Kuadratik*** ” dibawah bimbingan ibu Ari Pani Desvina, M.Sc, Pada tanggal 31 Januari 2011 di Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan Matematika dengan predikat memuaskan.

Lampiran 1
 Nilai-nilai $\tilde{\beta}_{2ijk}$

NO	$\tilde{\beta}_{2ijk}$	NO	$\tilde{\beta}_{2ijk}$	NO	$\tilde{\beta}_{2ijk}$	NO	$\tilde{\beta}_{2ijk}$
1	0,0500	21	-0,0058	41	0,0008	61	-0,0160
2	0,0330	22	-0,0041	42	0,0590	62	-0,0133
3	0,0166	23	-0,0036	43	0,0069	63	-0,0055
4	0,0100	24	0,0220	44	0,0912	64	-0,0059
5	0,0066	25	-0,0100	45	0,1755	65	-0,0033
6	0,0071	26	-0,0083	46	0,0000	66	0,0296
7	0,0053	27	-0,0024	47	-0,0166	67	-0,0100
8	0,0055	28	-0,0031	48	-0,0166	68	0,0000
9	0,0244	29	-0,0011	49	-0,0150	69	-0,0024
10	0,0166	30	0,0283	50	-0,0100	70	0,0000
11	0,0000	31	0,2330	51	-0,0095	71	0,0388
12	-0,0033	32	0,0014	52	-0,0071	72	0,0010
13	-0,0042	33	-0,0008	53	0,0180	73	0,0014
14	-0,0014	34	0,0011	54	-0,0333	74	0,0033
15	-0,0021	35	0,0360	55	-0,0250	75	0,0511
16	-0,0008	36	0,0095	56	-0,0200	76	-0,0071

NO	β_{2Ljk}	NO	β_{2Ljk}	NO	β_{2Ljk}	NO	β_{2Ljk}
17	0,0212	37	0,0021	57	-0,0125	77	0,0000
18	-0,0160	38	0,0037	58	-0,0114	78	0,0648
19	-0,0130	39	0,0466	59	-0,0083	79	0,0071
20	-0,0108	40	-0,0053	60	0,0206	80	0,1008
81	0,1940	103	0,0594	125	1,0227	147	0,0166
82	-0,0500	104	-0,0066	126	0,0042	148	0,0166
83	-0,0333	105	0,0014	127	0,0869	149	0,1000
84	-0,0250	106	0,0742	128	0,0133	150	-0,0166
85	-0,0150	107	0,0095	129	0,1328	151	0,0000
86	-0,0133	108	0,1146	130	0,2524	152	0,1166
87	-0,0095	109	0,2196	131	0,0000	153	0,0166
88	0,0232	110	0,0000	132	0,0166	154	0,1833
89	-0,0166	111	0,0000	133	0,0083	155	0,3500
90	-0,0125	112	0,0083	134	0,0100	156	-0,0500
91	-0,0033	113	0,0050	135	0,0666	157	0,0166
92	-0,0042	114	0,0066	136	0,0333	158	0,1333
93	-0,0014	115	0,0476	137	0,0125	159	0,0500
94	0,0354	116	0,0000	138	0,0133	160	0,3166
95	-0,0083	117	0,0125	139	0,0833	161	0,5833

NO	β_{2Ljk}	NO	β_{2Ljk}	NO	β_{2Ljk}	NO	β_{2Ljk}
96	0,0035	118	0,0066	140	-0,0083	162	0,8500
97	0,0000	119	0,0083	141	0,0033	163	0,0160
98	0,0024	120	0,0571	142	0,0998	164	0,2550
99	0,0458	121	0,0250	143	1,0666	165	0,4400
100	0,0150	122	0,0100	144	0,1542		
101	0,0042	123	0,0111	145	0,2933		
102	0,0059	124	0,0714	146	0,0500		

Lampiran 2
 Nilai-nilai $\tilde{\beta}_{1ij}$

NO	$\tilde{\beta}_{1ij}$	NO	$\tilde{\beta}_{1ij}$	NO	$\tilde{\beta}_{1ij}$	NO	$\tilde{\beta}_{1ij}$	NO	$\tilde{\beta}_{1ij}$
1	-0,4248	12	-0,3426	23	-0,4414	34	-0,2104	45	-0,1080
2	-0,3807	13	-0,3818	24	-0,4323	35	-0,4723	46	-0,3961
3	-0,3707	14	-0,4045	25	-0,4449	36	-0,4783	47	-0,4521
4	-0,3926	15	-0,4204	26	-0,4414	37	-0,4509	48	-0,4414
5	-0,4085	16	-0,4164	27	-0,2277	38	-0,4652	49	-0,0140
6	-0,4212	17	-0,4295	28	-0,4604	39	-0,4561	50	-0,5080
7	-0,4176	18	-0,4283	29	-0,4664	40	-0,1687	51	-0,4640
8	-0,4289	19	-0,2398	30	-0,4723	41	-0,4842	52	0,1134
9	-0,4279	20	-0,3485	31	-0,4533	42	-0,4402	53	-0,4199
10	3,5217	21	-0,1545	32	-0,4642	43	-0,4628	54	0,4241
11	-0,3366	22	-0,4271	33	-0,4568	44	-0,4521	55	1,2681

Lampiran 3
Nilai-nilai $\tilde{\beta}_{0i}$

NO	$\tilde{\beta}_{0i}$
1	9,9214
2	9,9238
3	10,0142
4	10,0928
5	10,0595
6	10,0142
7	9,9571
8	9,9881
9	9,9072
10	9,91437
11	11,6096