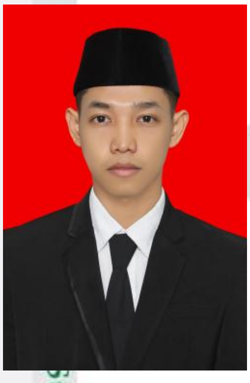
TRACE MATRIKS TOEPLITZ-HESSENBERG BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF EMPAT

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika



Oleh:

<u>MUHAMMAD ABDUL HADI</u>
11454105899

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2020

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS TOEPLITZ-HESSENBERG BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF EMPAT

TUGAS AKHIR

Oleh:

MUHAMMAD ABDUL HADI
11454105899

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan Tugas Akhir
di Pekanbaru, 25 Juni 2020

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Rahmawati, S.Si, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIK. 130517046**

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS TOEPLITZ-HESSENBERG BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF EMPAT

TUGAS AKHIR

Oleh:

MUHAMMAD ABDUL HADI
11454105899

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 25 Juni 2020

Pekanbaru, 25 Juni 2020
Mengesahkan,

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Rahmadeni, M.Si.**
Sekretaris	**: Rahmawati, S.Si, M.Sc.**
Anggota I	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota II	**: Ade Novia Rahma, M.Mat.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau serta terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 25 Juni 2020.

Yang membuat pernyataan,

MUHAMMAD ABDUL HADI
11454105899

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala nikmat rahmat dan hidayah-Nya sehingga terselesaikannya Tugas Akhir ini. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada baginda Nabi besar Muhammad SAW, dengan lafadz: "Allahummashalli'ala sayyidina muhammad wa'ala ali sayyidina muhammad".

Karya ini kupersembahkan untuk orang terkasih dan tersayang:

Ornamen keraguan yang selama ini membentang telah terhapus sudah
Terimakasih ketulusanmu wahai "ranking-1"ku di Dunia... mak, ayah...
Engkau telah sabar memberi kasih sayang yang tak ada batasnya
Kenakalan, kesalahan dan kelalaian telah banyak aku lakukan
Namun selalu senyum tulus yang engkau berikan dan lantunan do'a malam yang engkau panjatkan untukku
Beribu kata maaf dariku tak kan cukup untuk semua khilaf itu
Lembaran-lembaran ini bagian kecil bakti kasihku untukmu.
"Allahummaghfirli zunubi waliwaalidayya warhamhumaa kamaa rabbayaanii shoghiiro, aamiin ya rabbal 'alamiin".

Untuk abangku, terimakasih atas nasihat dan do'a-do'anya,
Untuk adik-adikku, gurauan kecilmu yang menjadi suntikan semangatku.

Untuk semua Dosen Jurusan Matematika serta Almamaterku:

Terimakasih untuk Bapak/Ibu atas semua yang tak dapat kubalaskan baik itu ilmu, tempat, nasehat, bimbingan serta motivasi yang telah diberikan selama ini, semoga bisa aku terapkan dikemudian hari. Serta kawan-kawanku yang tak dapat ku sebut satu persatu, hanya ucapan terimakasih dan do'a yang dapat kupanjatkan untumu.

"Sebaik-baiknya skripsi adalah yang selesai, baik itu selesai tepat waktu maupun tidak tepat waktu".

TRACE MATRIKS TOEPLITZ-HESSENBERG BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF EMPAT

MUHAMMAD ABDUL HADI
11454105899

Tanggal Sidang : 25 Juni 2020
Periode Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif empat. Ada beberapa langkah yang harus dilakukan, pertama menentukan entri-entri dari matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat yang dinotasikan sebagai H_n^2 yaitu mengalikan $H_n \cdot H_n$, selanjutnya mengalikan $H_n^2 \cdot H_n^2$ sehingga didapat entri-entri diagonal utama dari H_n^4. Selanjutnya, ditentukan bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif empat menggunakan Definisi *trace* yang dinotasikan sebagai $tr(H_n^4)$.

Kata kunci: *Trace, Matriks Hessenberg, Matriks Toeplitz, Matriks Toeplitz-Hessenberg.*

TRACE MATRIX TOEPLITZ-HESSENBERG OF POSITIVE INTEGER FOUR

MUHAMMAD ABDUL HADI
11454105899

Date of Final Exam : 25th June 2020
Date of Graduation :

Mathematics Departement
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This study aims to determine the general form of the Toeplitz-Hessenberg matrix matrix of positive integer four. There are several steps that must be done, first determine the entries from the Toeplitz-Hessenberg squared matrix which is denoted as H_n^2 *i.e. multiplying* $H_n \cdot H_n$*, then multiplying* $H_n^2 \cdot H_n^2$ *so we get the main diagonal entries from* H_n^4*. Next, determine the general shape of the Toeplitz-Hessenberg matrix matrix of positive integers using the definition of a trace notated as* $tr\left(H_n^4\right)$*.*

Keyword: *Trace, Hessenberg Matrix, Toeplitz Matrix, Toeplitz-Hessenberg Matrix.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin,

Puji syukur kepada Allah *Subhanahuwata'ala* yang senantiasa melimpahkan rahmat, karunia, dan petunjuk-Nya kepada penulis, sehingga penulis bisa menyelesaikan tugas akhir ini. Shalawat beriring salam kepada Nabi Muhammad *Shallallahu'alaihi wasallam* yang telah membawa kita dari zaman yang tidak berpengetahuan sampai zaman yang memiliki kemajuan ilmu dan teknologi yang kita rasakan pada saat ini.

Penelitian ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar sarjana sains dan teknologi pada program studi matematika. Dalam penyusunan dan penyelesaian penulisan ini, penulis banyak sekali mendapat bimbingan, bantuan, arahan, nasehat, perhatian, do'a serta semangat dari berbagai pihak terutama orang tua tercinta Ayahanda Maralaut dan Ibunda Paizah yang tidak pernah lelah dan tiada hentinya melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi yang membuat penulis mampu untuk terus dan terus melangkah, pelajaran hidup, juga materi yang tak mungkin bisa terbalas. Jasa-jasamu kan selalu penulis kenang hingga akhir hayat dan semoga Allah menjadikan jasa-jasamu sebagai amalan shaleh, Aamiin. Kemudian penulis juga mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Ahmad Mujahidin, S.Ag., M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi., M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc., selaku Sekretaris Program Studi Matematika, Pembimbing Akademik, Penguji I yang telah banyak memberikan bimbingan, arahan, kritik dan saran serta ilmunya sehingga selesainya tugas akhir ini.
5. Ibu Rahmawati, S.Si, M.Sc., selaku Pembimbing Tugas Akhir yang telah memberikan bimbingan, serta ilmunya sehingga selesainya tugas akhir ini.

6. Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat., selaku Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran sehingga selesainya tugas akhir ini.
7. Seluruh Dosen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi yang telah banyak memberi nasehat, bimbingan, serta bantuan kepada penulis.
8. Keluarga tercinta, yang telah memberikan motivasi, dukungan, do'a dan materi yang tak henti-hentinya serta kasih sayang yang tulus kepada penulis.
9. Sahabat-sahabat dari GG'14 yang terus memberikan dukungan dan do'a selama ini.
10. Seluruh teman-teman seperjuangan Program Studi Matematika angkatan 2014 terkhusus lokal C.
11. Semua pihak yang telah banyak membantu baik secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaian penulisan ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

semoga kebaikan yang telah mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah *Subhanahuwata'ala. Aamiin.*

Dalam penulisan ini penulis sadar bahwa penelitian tugas akhir ini belum sempurna. Namun, penulis sudah berusaha untuk mencapai hasil yang maksimal. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Akhir kata penulis harap semoga penulisan tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pihak-pihak yang memerlukan.

Pekanbaru, 25 Juni 2020
Penulis

Muhammad Abdul Hadi

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

Bab ini membahas serta menjabarkan mengenai latar belakang permasalahan yang dijadikan sebagai acuan dalam penulisan tugas akhir ini, rumusan masalah yang muncul dari judul yang diangkat serta batasan masalah untuk mencegahnya peluasan masalah, tujuan serta manfaat dari penulisan baik bagi penulis maupun bagi pembaca, dan pada bab ini juga terdapat sistematika penulisan yang digunakan untuk menyelesaikan penulisan tugas akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Menurut Anton dan Rorres (2004), matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Matriks dibagi menjadi beberapa jenis antara lain matriks Toeplitz, matriks Hessenberg, matriks Toeplitz-Hessenberg dan sebagainya. Menurut Gray (2006), sebuah matriks Toeplitz adalah matriks berukuran $n \times n$ yang dinotasikan sebagai $T_n = [t_{kj}; k, j = 0,1, \cdots, n-1]$, dengan $t_{kj} = t_{k-j}$ sebuah matriks dengan bentuk :

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

Menurut Slowik (2018), matriks Hessenberg (matriks Hessenberg bawah) adalah matriks $H_n = [h_{ij}]$ dengan $h_{ij} = 0$ untuk $j - i > 1$. Matriks Hessenberg merupakan matriks bujursangkar yang hampir menyerupai matriks segitiga bawah. Perbedaannya pada matriks segitiga bawah, entri-entri di atas diagonal utamanya bernilai nol. Sedangkan pada matriks Hessenberg, entri-entri di atas diagonal kedua (di atas diagonal utama) yang bernilai nol. Gabungan matriks Toeplitz dengan matriks Hessenberg disebut matriks Toeplitz-Hessenberg. Bentuk umum matriks Toeplitz-Hessenberg sebagai berikut :

$$H_n = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & h_{n-6} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_3 & h_2 & h_1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

dengan $h_0, h_k \neq 0$ untuk setiap $k > 0$.

Terdapat beberapa operasi matriks, seperti perkalian matriks, determinan, invers, *trace* matriks dan sebagainya. Dalam penelitian ini akan dibahas mengenai *trace* matriks, penelitian tentang *trace* matriks telah dibahas oleh beberapa peneliti sebelumnya. Pada tahun 2015, Pahade dan Jha telah membahas mengenai *trace* suatu matriks real yang berpangkat bilangan bulat positif berukuran 2×2, hasilnya berupa persamaan bentuk umum *trace* dari matriks tersebut yaitu untuk n genap :

$$TrA^n = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det A)^r (trA)^{n-2r}$$

dan untuk n ganjil

$$TrA^n = \sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det A)^r (trA)^{n-2r}.$$

Pada tahun 2017, Pahade dan Jha selanjutnya membahas mengenai *trace* dari suatu matriks ketetanggaan yang berpangkat bilangan bulat positif, dengan hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut merupakan bentuk umum *trace* dari matriks ketetanggaan yaitu :

$$Tr\,A^k = \sum_{r=1}^{n/2} s(k,r) n(n-1)^r (n-2)^{k-2r} \text{ , untuk } k \text{ bilangan genap,}$$

$$Tr\,A^k = \sum_{r=1}^{n-1/2} s(k,r) n(n-1)^r (n-2)^{k-2r} \text{ , untuk } k \text{ bilangan ganjil}$$

dengan

$$S(k,1)=1, S(k,k/2)=1, S(k,k-1/2)=\frac{k-1}{2}$$
$$S(k,r)=S(k-1,r)+S(k-2,r-1)=1.$$

Pada tahun 2018, Andesta melakukan penelitian tentang *trace* matriks khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dengan entri-entrinya bilangan real, dengan bentuk matriks:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & a\\ 0 & b & b\end{bmatrix}, \forall a,b\in R$$

Hasil yang diperoleh adalah : $tr\left(A^n\right)=1+(a+b)^n$.

Pada tahun 2019, Helsivianingsih meneliti tentang *trace* matriks Ketetanggaan dari Graf Lengkap Berpangkat Negatif Empat, hasilnya berupa persamaan bentuk umum *trace* dari matriks tersebut, yaitu:

$$tr(A_n)^{-4}=\frac{n\left((n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4\right)}{(n-1)^4}, \qquad n\geq 2.$$

Berdasarkan uraian hasil penelitian-penelitian diatas, penulis tertarik untuk menyelesaikan rumus bentuk umum dari *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg bilangan bulat positif pada Persamaan (1.1), sehingga pada tugas akhir ini penulis memberi judul **"*Trace* Matriks Toeplitz-Hessenberg Berpangkat Bilangan Bulat Positif Empat "**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang diatas, maka rumusan masalah pada penelitian ini yaitu: "Bagaimana bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif empat?".

1.3 Batasan Masalah

Untuk mencegah meluasnya permasalahan yang ada dan supaya pembahasan lebih terarah, maka dilakukan pembatasan permasalahan pada penulisan ini, yaitu matriks yang digunakan adalah matriks Toeplitz-Hessenberg pada Persamaan (1.1) berordo $n \times n$ dengan $n \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif empat.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah ilmu pengetahuan dalam bidang matematika, khususnya tentang matriks.
2. Menambah pengetahuan penulis tentang cara mendapatkan *trace* dari sebuah matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat empat.
3. Sebagai sarana informasi bagi pembaca dan sebagai bahan referensi bagi pihak yang membutuhkan.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini mencakup lima bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menguraikan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dari penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang hal-hal yang dijadikan sebagai dasar teori untuk pengembangan tulisan tugas akhir ini.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi langkah-langkah yang digunakan untuk mendapatkan rumus umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif empat.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi pengaplikasian teori-teori pada landasan teori dengan mengikuti metodologi penelitian sehingga diperoleh rumus bentuk umum dari *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif empat.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran-saran dari penulis untuk pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang berkaitan dengan matriks dan jenis-jenis matriks, operasi matriks, *trace* matriks, *trace* matriks berpangkat, beserta pengaplikasian *trace* matriks berpangkat dalam bentuk contoh soal.

2.1 Matriks dan Jenis-jenis Matriks

Definisi 2.1 (Anton dan Rorres, 2004) Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Matriks dengan m baris dan n kolom disebut matriks $m \times n$. Matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama disebut matriks bujur sangkar. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif, matriks $m \times n$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan

a_{ij} : Entri-entri matriks baris ke$-i$ kolom ke$-j$

i : $1,2,3,\ldots,m,$ indeks baris

j : $1,2,3,\ldots,n,$ indeks kolom

Matriks diatas juga dapat dinyatakan sebagai :

$$A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}.$$

Terdapat beberapa jenis-jenis matriks diantaranya sebagai berikut :

1. Matriks Segitiga

Matriks segitiga terbagi menjadi 2 jenis yaitu:

a. Matriks Segitiga Atas (*upper triangular*)

Matriks segitiga atas adalah matriks bujursangkar yang semua entri dibawah diagonal utamanya bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1 Diberikan matriks A segitiga atas ordo 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

b. Matriks Segitiga Bawah (*lower tringular*)

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujursangkar yang semua entri diatas diagonal utamanya nol.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2 Diberikan matriks B segitiga bawah ordo 3×3 sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Toeplitz

Definisi 2.2 (Gray, 2006) Sebuah matriks Toeplitz adalah matriks berukuran $n \times n$ dinotasikan sebagai berikut $T_n = [t_{kj}; k, j = 0,1,\cdots,n-1]$, dengan $t_{kj} = t_{k-j}$ sebuah matriks dengan bentuk :

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.3 Diberikan matriks Toeplitz ordo 4×4 sebagai berikut:

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Hessenberg

Matriks Hessenberg (matriks Hessenberg bawah) merupakan matriks bujursangkar yang hampir menyerupai matriks segitiga bawah. Perbedaannya pada matriks segitiga bawah, entri-entri di atas diagonal utamanya bernilai nol. Sedangkan pada matriks Hessenberg, entri-entri di atas diagonal kedua (di atas diagonal utama) yang bernilai nol.

Definisi 2.3 (Kaygisiz dan Sahin, 2013) Sebuah matriks berukuran $n \times n$ $H_n = [h_{ij}]$ disebut matriks Hessenberg bawah jika $h_{ij} = 0$ untuk $j - i > 1$, yaitu:

$$H_{n\times n} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & h_{n-1,2} & \cdots & h_{n-1,n} \\ h_{n,1} & h_{n,2} & h_{n,2} & \cdots & h_{n,n} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.4 Diberikan matriks Hessenberg bawah ordo 4×4 sebagai berikut:

$$H_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Gabungan dari matriks Toeplitz dengan matriks Hessenberg disebut matriks Toeplitz-Hessenberg yang didefinisikan pada definisi berikut.

4. Matriks Toeplitz-Hessenberg

Definisi 2.4 (Merca, 2013) Matriks Toeplitz-Hessenberg mempunyai bentuk umum $n \times n$ sebagai berikut:

$$H_n = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n & h_{n-1} & \cdots & h_2 & h_1 \end{bmatrix}$$

dengan $h_0, h_k \neq 0$ untuk setiap $k > 0$.

Contoh 2.5 Diberikan matriks Toeplitz-Hessenberg ordo 5×5 sebagai berikut:

$$H_5 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Pada bagian ini akan dibahas mengenai perkalian matriks dengan matriks, perpangkatan matriks, *trace* matriks dan *trace* matriks berpangkat.

2.2 Perkalian Matriks dengan Matriks

Definisi 2.5 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks $m\times r$ dan B adalah matriks $r\times n$ maka hasil kali (*product*) AB adalah matriks $m\times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris$-i$ dan kolom$-j$ dari AB, pilihlah baris$-i$ dari matriks A dan kolom$-j$ dari matriks B. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang diperoleh.

Contoh 2.6 Diberikan matriks X dan Y sebagai berikut.

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

maka,

$$XY = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 11 & 17 \end{bmatrix}$$

2.3 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.6 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujursangkar, maka pangkat bilangan bulat tak negatif dari A didefinisikan sebagai:

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA...A}_{n\ faktor} \qquad (n > 0)$$

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat bilangan bulat negatif dari A menjadi:

$$A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}...A^{-1}}_{n\ faktor} \qquad (n > 0)$$

Contoh 2.7 Tentukan matriks A^3 dari matriks A berikut ini!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 12 & 4 \\ 34 & 25 & 12 \\ 46 & 34 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 119 & 86 & 36 \\ 262 & 191 & 86 \\ 359 & 262 & 119 \end{bmatrix}$$

2.4 *Trace* Matriks

Definisi 2.7 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujursangkar, maka *trace* dari A yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujursangkar.

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

maka *trace* dari matriks A adalah:

$$\begin{aligned} tr(A) &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{aligned}$$

Contoh 2.8 Tentukan $tr(A)$ dari matriks A sebagai berikut!

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Dari matriks A diperoleh $a_{11} = 7,\ a_{22} = 6$ dan $a_{33} = 12,$ sehingga

$$\begin{aligned} tr(A) = \textstyle\sum_{i=1}^{3} a_{ii} &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ &= 7 + 6 + 12 \\ &= 25 \end{aligned}$$

2.5 *Trace* Matriks Berpangkat

Pembahasan mengenai *trace* suatu matriks sudah dibahas oleh Novia Arda Putri (2019) dalam penelitiannya yang berjudul "*Trace* Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif". Penelitian tersebut membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks Toeplitz simetris bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Berikut langkah-langkah yang digunakan:

1. Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a \in R.$

   $tr(A_3) = 0$

2. Menentukan perpangkatan matriks A_3^2 sampai A_3^{12} untuk n ganjil dan n genap.

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$$A_3^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2a^3 & 0 \\ 2a^3 & 0 & 2a^3 \\ 0 & 2a^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$$A_3^4 = \begin{bmatrix} 2a^4 & 0 & 2a^4 \\ 0 & 2a^4 & 0 \\ 2a^4 & 0 & 2a^4 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$A_3^5 = \begin{bmatrix} 0 & 4a^5 & 0 \\ 4a^5 & 0 & 4a^5 \\ 0 & 4a^5 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$$A_3^6 = \begin{bmatrix} 4a^6 & 0 & 4a^6 \\ 0 & 4a^6 & 0 \\ 4a^6 & 0 & 4a^6 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$A_3^7 = \begin{bmatrix} 0 & 8a^7 & 0 \\ 8a^7 & 0 & 8a^7 \\ 0 & 8a^7 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$A_3^8 = \begin{bmatrix} 8a^8 & 0 & 8a^8 \\ 0 & 2a^4 & 0 \\ 8a^8 & 0 & 8a^8 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$A_3^9 = \begin{bmatrix} 0 & 16a^9 & 0 \\ 16a^9 & 0 & 16a^9 \\ 0 & 16a^9 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$$A_3^{10} = \begin{bmatrix} 16a^{10} & 0 & 16a^{10} \\ 0 & 16a^{10} & 0 \\ 16a^{10} & 0 & 16a^{10} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$$A_3^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 32a^{11} & 0 \\ 32a^{11} & 0 & 32a^{11} \\ 0 & 32a^{11} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$A_3^{12}=\begin{bmatrix}32a^{12} & 0 & 32a^{12}\\ 0 & 32a^{12} & 0\\ 32a^{12} & 0 & 32a^{12}\end{bmatrix} \tag{2.11}$$

3. Menduga bentuk umum matriks A_3^n berpangkat bilangan bulat positif dengan n ganjil dan n genap.

   Dengan melihat kembali Persamaan (2.1) sampai (2.11) maka dapat diduga bentuk umum A_3^n yaitu:

$$A_3^n=\begin{cases}\begin{bmatrix}0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0\\ 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n\\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0\end{bmatrix}, & \text{untuk } n \text{ ganjil}\\ \begin{bmatrix}2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n\\ 0 & 2^{\frac{n}{2}}a^n & 0\\ 2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n\end{bmatrix}, & \text{untuk } n \text{ genap}\end{cases} \tag{2.12}$$

4. Menentukan bentuk umum matriks A_3^n dengan n ganjil dan n genap menggunakan induksi matematika.
5. Membuktikan bentuk umum $tr\left(A_3^n\right)$ dengan n ganjil dan n genap menggunakan pembuktian langsung.

$$tr\left(A_3^n\right)=\begin{cases}0 & , n \text{ ganjil}\\ 2^{\frac{n}{2}+1}a^n & , n \text{ genap}\end{cases} \tag{2.13}$$

Berikut diberikan contoh *trace* matriks Toeplitz simetris bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

Contoh 2.9 Diberikan matriks $A_3=\begin{bmatrix}0 & 100 & 0\\ 100 & 0 & 100\\ 0 & 100 & 0\end{bmatrix}$. Hitunglah:

a. A_3^9 dan $tr\left(A_3^9\right)$

b. A_3^{12} dan $tr\left(A_3^{12}\right)$

Penyelesaian :

a. Akan dihitung nilai dari A_3^9 dan $tr\left(A_3^9\right)$.

Menurut Persamaan (2.12) untuk n ganjil diperoleh:

$$A_3^9 = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{9-1}{2}}(100)^9 & 0 \\ 2^{\frac{9-1}{2}}(100)^9 & 0 & 2^{\frac{9-1}{2}}(100)^9 \\ 0 & 2^{\frac{9-1}{2}}(100)^9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2^4(100)^9 & 0 \\ 2^4(100)^9 & 0 & 2^4(100)^9 \\ 0 & 2^4(100)^9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 16\times10^{18} & 0 \\ 16\times10^{18} & 0 & 16\times10^{18} \\ 0 & 16\times10^{18} & 0 \end{bmatrix}$$

Menurut Persamaan (2.13) untuk n ganjil diperoleh:

$$tr\left(A_3^9\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 16\times10^{18} & 0 \\ 16\times10^{18} & 0 & 16\times10^{18} \\ 0 & 16\times10^{18} & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0 + 0 + 0$$

$$= 0$$

b. Akan dicari A_3^{12} dan $tr\left(A_3^{12}\right)$.

Menurut Persamaan (2.12) untuk n genap diperoleh:

$$A_3^{12} = \begin{bmatrix} 2^{\frac{12-1}{2}}(100)^{12} & 0 & 2^{\frac{12-1}{2}}(100)^{12} \\ 0 & 2^{\frac{12}{2}}(100)^{12} & 0 \\ 2^{\frac{12-1}{2}}(100)^{12} & 0 & 2^{\frac{12-1}{2}}(100)^{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^5(100)^{12} & 0 & 2^5(100)^{12} \\ 0 & 2^6(100)^{12} & 0 \\ 2^5(100)^{12} & 0 & 2^5(100)^{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 32\times10^{24} & 0 & 32\times10^{24} \\ 0 & 64\times10^{24} & 0 \\ 32\times10^{24} & 0 & 32\times10^{24} \end{bmatrix}$$

Menurut Persamaan (2.13) untuk n genap diperoleh:

$$\begin{aligned} tr\left(A_3^9\right) &= 2^{\frac{12}{2}+1}(100)^{12} \\ &= 2^7(100)^{12} \\ &= 128\left(1\times10^{24}\right) \\ &= 1{,}28\times10^{26}. \end{aligned}$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Dalam menyelesaikan penulisan Tugas Akhir ini, jenis penelitian yang digunakan adalah kajian studi literatur.

3.2 Langkah-langkah Penelitian

Untuk mencapai hasil yang diinginkan, penulis membatasi dan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan matriks Toeplitz-Hessenberg pada Persamaan (1.1).
2. Menentukan diagonal utama matriks H_n^4 dengan cara mencari entri-entri H_n^2 yaitu mengalikan $H_n \cdot H_n$, selanjutnya mengalikan $H_n^2 \cdot H_n^2$ sehingga didapat entri-entri diagonal utama dari H_n^4.
3. Menentukan bentuk umum $tr\left(H_n^4\right)$ dengan menggunakan Definisi 2.7.
4. Mengaplikasikan bentuk umum $tr\left(H_n^4\right)$ pada beberapa contoh soal.

BAB V
PENUTUP

Bab ini berisi penutup yang dibagi menjadi dua bagian, yaitu kesimpulan yang membahas tentang rangkuman hasil yang diperoleh dari Bab IV, dan saran yang berisi masukan bagi pembaca yang tertarik untuk melanjutkan penulisan tugas akhir ini.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab IV tentang bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif empat ordo $n \times n$ dengan $n \geq 3$ diperoleh kesimpulan berikut ini.

Diberikan bentuk umum dari matriks Toeplitz-Hessenberg pada persamaan (1.1) sebagai berikut:

$$H_n = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & h_{n-6} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_3 & h_2 & h_1 \end{bmatrix}$$

dengan $h_0, h_k \neq 0$ untuk setiap $k > 0$. Maka entri-entri diagonal utama h_{ij} untuk $i = j$ dari H_n^4 yaitu:

$$h_{ij} = \begin{cases} h_1^4 + 6h_0h_1^2h_2 + 2h_0^2h_2^2 + 4h_0^2h_1h_3 + h_0^3h_4 & untuk\ i = j = 1\ dan\ i = j = n \\ 12h_0h_1^2h_2 + 8h_0^2h_1h_3 + 5h_0^2h_2^2 + h_1^4 + 2h_0^3h_4 & untuk\ i = j = 2\ dan\ i = j = n-1 \\ 12h_0^2h_1h_3 + 6h_0^2h_2^2 + 3h_0^3h_4 + 12h_0h_1^2h_2 + h_1^4 & untuk\ i = j = 3\ dan\ i = j = n-2 \\ 4h_0^3h_4 + 12h_0^2h_1h_3 + 6h_0^2h_2^2 + 12h_0h_1^2h_2 + h_1^4 & untuk\ i = j = 4, 5, \cdots, n-3. \end{cases}$$

Sehingga bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif empat adalah:

$$tr\left(H_n^4\right) = nh_1^4 + (12n-12)h_0h_1^2h_2 + (6n-10)h_0^2h_2^2 + (12n-24)h_0^2h_1h_3 + (4n-12)h_0^3h_4, \qquad n \geq 3.$$

5.2 Saran

Pada penulisan tugas akhir ini penulis hanya membahas bentuk umum dari *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif empat dengan ordo $n \times n$. Oleh karena itu, disarankan untuk pembaca yang tertarik dengan topik ini dapat membahas bentuk umum dari *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat negatif atau menentukan *trace* dari suatu matriks lain.

DAFTAR PUSTAKA

Andesta, R. ”Trace Matriks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif”, *Skripsi*, UIN Sultan Syarif Kasim Riau. 2018.

Anton, H dan C, Rorres. *“Aljabar Linier Elementer, Edisi Kedelapan”*. Jakarta:Erlangga. 2004.

Fiedler, M dan Vavrin, Z. ”Generalized Hessenberg Matrices”, *Linear Algebra and Applications*, 380, 95-105. 2004.

Gray, Robert M. “*Toeplitz and Circulan Matrices”*. Standford 94305, Departement of Electrical Engineering Standford, USA. 2005.

Helsivianingsih. ”Trace Matriks Ketetanggan dari Graf Lengkap Berpangkat Negatif Empat”, *Skripsi*, UIN Sultan Syarif Kasim Riau. 2019.

Kaygisiz, K dan Sahin, A. ”Determinants and Permanents of Hessenberg Matrices and Generalized Lucas Polynomials”, *Buletin of The Iranian Mathematical Society*, 6, 1065-1078. 2013.

Merca, M. ”A Note on The Determinant of A Toeplitz-Hessenberg Matrix”, *Special Matrices*, 10-16. 2013.

Pahade, J dan Jha, M. ”Trace of Positive Integer Power of Real 2×2 Matrices”, *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*, 5, 150-155. 2015.

Pahade, J dan Jha, M. ”Trace of Positive Integer Power of Adjacency Matrix”, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6, 2079-2087. 2017.

Putri, Novia A. ”Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif”, *Skripsi*, UIN Sultan Syarif Kasim Riau. 2019.

Slowik, R. “Inverse and Determinant of Toeplitz-Hessenberg Matrices”, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 22, 4, 901-908. 2018.