

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL RICCATI MENGGUNAKAN KOMBINASI METODE TRANSFORMASI SHEHU DAN ITERASI VARIASIONAL

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh

ATIKA PUTRI
12050420335



UIN SUSKA RIAU

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2026**



LEMBAR PERSETUJUAN

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL RICCATI MENGGUNAKAN KOMBINASI METODE TRANSFORMASI SHEHU DAN ITERASI VARIASIONAL

TUGAS AKHIR

oleh:

ATIKA PUTRI
12050420335

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 08 Januari 2026

Ketua Program Studi

Wartono, M.Sc.
NIP. 19730818 200604 1 003

Pembimbing

Wartono, M.Sc.
NIP. 19730818 200604 1 003

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PENGESAHAN

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL RICCATI MENGGUNAKAN KOMBINASI METODE TRANSFORMASI SHEHU DAN ITERASI VARIASIONAL

TUGAS AKHIR

oleh:

ATIKA PUTRI
12050420335

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 08 Januari 2026

Pekanbaru, 15 Januari 2026
Mengesahkan

Ketua Program Studi

Wartono, M.Sc.
NIP. 19730818 200604 1 003

Dekan

Dr. Yuslenita Muda, S.Si., M.Sc.
NIP. 19770103 200710 2 001

DEWAN PENGUJI

Ketua : Fitri Aryani, M.Sc.

Sekretaris : Wartono, M.Sc.

Anggota I : Dr. Yuslenita Muda, S.Si., M.Sc.

Anggota II : Irma Suryani, M.Sc.



SURAT PERNYATAAN

Saya yang betandatangan dibawah ini :

Nama : Atika Putri
 NIM : 12050420335
 Tempat Tgl. Lahir : Pekanbaru, 13 Agustus 2002
 Fakultas : Sains Dan teknologi
 Prodi : Matematika

Judul Skripsi

Penyelesaian Persamaan Diferensial Fraksional Riccati Menggunakan Kombinasi Metode Transfromasi Shehu dan Iterasi Variasional

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

Penulis skripsi dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.

Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.

Oleh karena itu skripsi saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.

Apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan skripsi saya tersebut, saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan perundang-undangan.

Demikian surat ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga

Pekanbaru, 26 Januari 2026

Yang membuat pernyataan



Atika Putri

NIM. 12050420335

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam

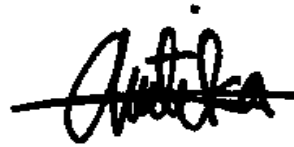
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 08 Januari 2026
Yang membuat pernyataan,



ATIKA PUTRI
12050420335

UIN SUSKA RIAU

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'aalamiin, puji syukur tak hentinya terucap kepada Allah Subhanahu wata'ala, yang telah melimpahkan nikmat, rahmat dan karunianya sehingga saya dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat beriringkan salam senantiasa tercurahkan kepada baginda Rasulullah Muhammad Shalallahu Alaihi Wassalam. Terima kasih sebesar besarnya saya ucapkan untuk:

Ayah dan Ibu tersayang

Terimakasih kepada kedua orang tua penulis yaitu Bapak Achmad Juli Wira Bhakti dan Ibu Eni Marlina yang sangat berjasa dalam hidup penulis. Sehingga penulis sampai di titik menyelesaikan Tugas Akhir ini karna dukungan serta doa-doa dari kedua orang tua penulis yang tidak pernah lelah mendoakan penulis.

Dosen Pembimbing Tugas Akhir

Terimakasih banyak kepada Bapak Wartono, M.Sc yang telah bersedia menjadi dosen pembimbing dan meluangkan waktunya dengan sabar dalam membimbing penulis, terimakasih untuk semua saran, masukan, dukungan serta nasehat yang bapak berikan kepada penulis.

Adik dan Saudara terdekat

Terimakasih kepada adik-adik penulis yaitu Annisaa Moga dan Rahmat Baihaqih sehingga penulis termotivasi dengan harapan kakakmu ini kedepannya bisa menjadi pribadi yang sukses dan bisa kamu banggakan nantinya. Serta saudara penulis yang ikut andil meluangkan waktu dan membantu penulis selama perkuliahan.

Sahabat sekaligus Teman terdekat

Terimakasih untuk sahabat SMA penulis Ayu, Dini, Nabel, Diva serta teman terdekat penulis selama kuliah ini Tengku Fahmil Ummi, Indah Aprilia dan Alifya Rindiani yang telah banyak membantu, memberi dukungan, semangat dan masukan dalam Tugas Akhir ini.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL RICCATI MENGGUNAKAN KOMBINASI METODE TRANSFORMASI SHEHU DAN ITERASI VARIASIONAL

ATIKA PUTRII
NIM : 12050420335

Tanggal Sidang : 08 Januari 2026
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Kombinasi metode transformasi Shehu dan iterasi variasional (Shehu–VIM) merupakan metode semi numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dalam bentuk deret. Tugas akhir ini membahas penyelesaian persamaan diferensial fraksional Riccati berbentuk turunan Caputo menggunakan Shehu–VIM. Hasil kajian menunjukkan bahwa metode Shehu–VIM dapat menyelesaikan PDFR. Selanjutnya untuk menguji performa metode Shehu–VIM, diberikan simulasi numerik dalam bentuk implementasi metode Shehu–VIM dengan menggunakan dua masalah nilai awal. Selain itu galat Shehu–VIM dibandingkan dengan metode lainnya seperti NHPM, VPM, dan MHPM. Hasil akhir menunjukan bahwa Shehu–VIM memiliki performa lebih baik.

Kata Kunci : Metode Transformasi Shehu, Metode Iterasi Variasional, Persamaan Diferensial Fraksional Riccati, Simulasi Numerik.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

SOLVING FRACTIONAL RICCATI DIFFERENTIAL EQUATION USING A COMBINATION OF SHEHU TRANSFORM AND VARIATIONAL ITERATION METHOD

ATIKA PUTRII
NIM : 12050420335

Date of Final Exam : 08 January 2026
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru, Indonesia

ABSTRACT

The combination of Shehu Transform Method and Variational Iteration Method (Shehu–VIM) is a semi- numerical method used to solve differential equations in series form. This final project discusses the solution of Riccati fractional differential equations in the form of Caputo derivatives using Shehu–VIM. The results of the study show that the Shehu–VIM method can solve PDFR. Furthermore, to test the performance of Shehu-VIM method, a numerical simulation is given in the form of an implementation of the Shehu–VIM method using two initial value problems. In addition, the Shehu–VIM error is compared with other methods such as NHPM, VPM, and MHPM. The final results show that Shehu–VIM has better performance.

Keywords : Shehu Transform Method, Variational Iteration Method, fractional Riccati differential equation, numerical simulations.

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Segala puji dan syukur penulis panjatkan atas kehadiran Allah SWT atas rahmat maupun hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul “Penyelesaian Persamaan Diferensial Fraksional Riccati Menggunakan Kombinasi Metode Iterasi Variasional dan Transformasi Shehu” dengan baik. Shalawat maupun salam semoga selalu tercurah pada Nabi Muhammad SAW. Penyusunan Tugas Akhir ini dilakukan menjadi salah satu prasyarat untuk menyelesaikan pendidikan Strata di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Adapun penyusunan Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan lancar karena bantuan maupun arahan atas berbagai pihak yang telah memberikan dukungan, saran, serta motivasi yang berharga. Dengan demikian, penulis mengucapkan rasa terima kasih yang tidak terhingga pada Ayahanda Achmad Juli Wira Bhakti dan Ibunda Eni Marlina, selaku kedua orang tua penulis yang selalu mendoakan, memberikan dukungan, kasih sayang, semangat maupun dorongan yang tak pernah terputus. Selanjutnya, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Hj. Leny Nofianti MS, SE, M. Si, Ak, CA., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dr. Yuslenita Muda, S.Si., M.Sc., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan sekaligus Penguji I yang telah memberikan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau sekaligus Pembimbing Tugas Akhir yang telah meluangkan waktunya dalam memberikan bimbingan, dukungan serta motivasi dalam Tugas Akhir ini.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Bapak Zukrianto, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Ibu Irma Suryani, M.Sc., selaku Dosen Penguji II yang telah banyak memberikan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini.

Ibu Sri Basriati, M.Sc., selaku Pembimbing Akademik yang telah memberi arahan serta membimbing penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Seluruh Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah berjasa dalam memberikan ilmu serta bimbingan kepada penulis.

Keluarga besar penulis, yang telah banyak mendukung serta mendoakan penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Sahabat SMA penulis Ayu, Dini, Nabel, Diva serta teman-teman seangkatan penulis yang terdekat di masa kuliah ini Tengku Fahmil Umami, Indah Aprilia dan Alifya Rindiani yang telah banyak membantu, memberi dukungan, semangat serta masukan dalam Tugas Akhir ini.

Meski demikian, kemungkinan adanya kekeliruan atau kekurangan dalam penulisan maupun penyajian materi tetap terbuka. Dengan demikian, penulis sangat mengharapkan kritik maupun saran konstruktif atas berbagai pihak guna meningkatkan kualitas maupun kesempurnaan Tugas Akhir ini.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 08 Januari 2026

ATIKA PUTRI
12050420335

DAFTAR ISI

LEMBAR PERSETUJUAN	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
SURAT PERNYATAAN	iv
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL	v
LEMBAR PERNYATAAN	vi
LEMBAR PERSEMBAHAN	vii
ABSTRAK	viii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	x
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR SINGKATAN	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II LANDASAN TEORI	5
2.1 Persamaan Diferensial Fraksional	5
2.1.1 Fungsi Gamma	6
2.1.2 Integral Fraksional Riemann-Liouville (R-L)	8
2.1.3 Turunan Fraksional Caputo	8
2.2 Persamaan Diferensial Fraksional Riccati	9
2.3 Metode Transformasi Shehu	10
2.3.1 Sifat-Sifat Transformasi Shehu	10
2.3.2 Invers Transformasi Shehu	11
2.4 Metode Iterasi Variasional	12
BAB III METODE PENELITIAN	19
BAB IV PEMBAHASAN	20
4.1 Kombinasi Metode Iterasi Variasional dan Transformasi Shehu	20
4.2 Simulasi Numerik	22
BAB V PENUTUP	40
5.1 Kesimpulan	40
5.2 Saran	40
DAFTAR PUSTAKA	41
DAFTAR RIWAYAT HIDUP	44

DAFTAR SIMBOL

- : π ;
- : Γ ;
- : α ;
- : Operator turunan fraksional bentuk Caputo orde α ;
- : Operator integral fraksional Riemann-Liouville orde α ;
- : Transformasi Shehu.



UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

DAFTAR GAMBAR	
Gambar 2.1 Grafik Perbandingan Aproksimasi Solusi VIM pada Contoh 2.4	18
Gambar 4.1 Grafik Solusi Eksak dan Shehu-VIM dengan $\alpha = 1$ untuk Contoh 4.2.1	28
Gambar 4.2 Grafik Perbandingan Galat untuk Contoh 4.1	29
Gambar 4.3 Grafik Perbandingan 6 Persamaan dengan $\alpha = 1$ dan batas $0 < t \leq 1$ untuk Contoh 4.2.1	30
Gambar 4.4 Grafik Perbandingan 6 Persamaan dengan $\alpha = 1$ dan batas $0 < t \leq 2$ untuk Contoh 4.2.1	30
Gambar 4.5 Grafik Perbandingan 6 Persamaan dengan $\alpha = 1$ dan batas $0 < t \leq 3$ untuk Contoh 4.2.1	31
Gambar 4.6 Grafik Solusi Eksak dan Shehu-VIM dengan $\alpha = 1$ untuk Contoh 4.2.2	36
Gambar 4.7 Grafik Perbandingan Galat untuk Contoh 4.2.2	37
Gambar 4.8 Grafik Perbandingan 6 Persamaan dengan $\alpha = 1$ dan batas $0 < t \leq 1$ untuk Contoh 4.2.2	38
Gambar 4.9 Grafik Perbandingan 6 Persamaan dengan $\alpha = 1$ dan batas $0 < t \leq 2$ untuk Contoh 4.2.2	39
Gambar 4.10 Grafik Perbandingan 6 Persamaan dengan $\alpha = 1$ dan batas $0 < t \leq 3$ untuk Contoh 4.2.2	39

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Fungsi dan Invers dari Transformasi Shehu	11
Tabel 4.1 Aproksimasi Solusi Shehu-VIM dengan $\alpha = 1$ untuk	
Contoh 4.2.1	27
Tabel 4.2 Komparasi Galat dari Solusi Numerik dengan $\alpha = 1$ untuk	
Contoh 4.2.1	28
Tabel 4.3 Aproksimasi Solusi Shehu-VIM dengan $\alpha = 1$ untuk	
Contoh 4.2.2	36
Tabel 4.4 Komparasi Galat dari Solusi Numerik dengan $\alpha = 1$ untuk	
Contoh 4.2.2	37

DAFTAR SINGKATAN

PDB	: Persamaan Diferensial Biasa;
PDP	: Persamaan Diferensial Parsial;
R-L	: <i>Riemann-Liouville</i> ;
PDF	: Persamaan Diferensial Fraksional;
PDFR	: Persamaan Diferensial Fraksional Riccati;
VIM	: <i>Variational Iteration Method</i> ;
Shehu–VIM	: <i>Shehu Variational Iteration Method</i> ;
VPM	: <i>Variation of Parameters Method</i> ;
MHPM	: <i>Modified Homotopy Perturbation Method</i> ;
NHPM	: <i>New Modified Homotopy Perturbation Method</i> .

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Banyak fenomena alam dimodelkan menggunakan persamaan diferensial. Persamaan diferensial menjadi dasar utama dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Secara matematis, persamaan diferensial merupakan alat penting untuk menggambarkan hubungan antara suatu fungsi dan turunan-turunannya. Perannya sangat signifikan pada berbagai bidang, di antaranya meliputi rekayasa, ilmu ekonomi, fisika, maupun disiplin ilmu lainnya.[1]. Secara umum, persamaan yang memuat turunan fungsi dengan melibatkan satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial [2].

Persamaan diferensial diklasifikasikan ke dalam dua kategori utama, di antaranya persamaan diferensial biasa (PDB) maupun persamaan diferensial parsial (PDP). PDB hanya melibatkan satu variabel bebas, sedangkan PDP mencakup lebih dari satu variabel bebas.[2] Secara umum, persamaan diferensial memiliki orde berupa bilangan asli atau bilangan bulat positif. Namun, seiring berkembangnya konsep kalkulus fraksional, lahirlah gagasan Persamaan Diferensial Fraksional (PDF), yaitu persamaan diferensial yang melibatkan turunan fungsi dengan orde fraksional atau bilangan pecahan. [3]

PDF secara khusus dapat dibedakan menjadi dua jenis. PDF biasa merujuk pada persamaan yang melibatkan turunan fungsi dengan satu variabel bebas, sementara PDF parsial mencakup turunan fungsi yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas [3]. Adapun jenis persamaan diferensial fraksional adalah Persamaan Diferensial Fraksional Riccati (PDFR). Persamaan ini merupakan pengembangan dari persamaan Riccati yang melibatkan orde fraksional pada operator derivatifnya. [4].

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Adapun metode yang diterapkan guna menyelesaikan persamaan PDFR seperti metode dekomposisi Laplace[5], metode variasi parameter (VPM) [6], dekomposisi adomian [7], metode homotopi pertubasi baru (NHPM) [8], metode modifikasi homotopi (MHPM) [9], metode iterasi variasional (VIM) [7] dan metode Shehu [10]. Dari beberapa metode yang sudah disebutkan juga terdapat metode (Shehu – VIM) adalah sebuah metode yang merupakan kombinasi dari metode iterasi variasional (VIM) dan transformasi Shehu.

Metode Shehu Iterasi Variasional (Shehu – VIM) telah diterapkan oleh [11] untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional, khususnya pada persamaan fraksional dinamika gas dengan orde pecahan. Serupa dengan penelitian tersebut [12] sama halnya dengan yang dilakukan oleh [11] transformasi Shehu ini dapat dipandang sebagai suatu generalisasi dari transformasi Laplace maupun integral Sumudu, yang diterapkan untuk menyelesaikan permasalahan dalam PDF.

Berdasarkan dari penjelasan permasalahan yang telah diuraikan sebelumnya, penulis tertarik membahas penyelesaian persamaan fraksional Riccati dengan mengaplikasikan metode kombinasi iterasi variasional dan transformasi Shehu (Shehu–VIM) pada bentuk umum persamaan diferensial fraksional Riccati. Tujuannya adalah untuk memperoleh aproksimasi solusi dalam bentuk deret. Metode kombinasi ini menggunakan pendekatan iteratif untuk menghasilkan aproksimasi solusi, di mana iterasi akan dihentikan setelah solusi mencapai tingkat akurasi yang diinginkan.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana bentuk penyelesaian dari kombinasi metode iterasi variasional dan transformasi Shehu (Shehu–VIM) untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional Riccati (PDFR)?

Bagaimana penerapan kombinasi metode iterasi variasional dan (Shehu–VIM) untuk menyelesaikan PDFR?

Bagaimana simulasi numerik dari PDFR tersebut?

1.3 Batasan Masalah

Dalam tugas akhir ini penelitian hanya menjelaskan mengenai kombinasi metode iterasi variasional dan transformasi Shehu serta penerapannya untuk PDFR saja. Adapun bentukan umum persamaannya, yaitu sebagai berikut:

$$D_x^\alpha = Q(t)y^2(t) + P(t)y(t) + R(t), \quad t > 0, t \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq 1, y(0) = y_0,$$

dimana α ialah orde turunan fraksional, $Q(t), P(t)$, serta $R(t)$ adalah fungsi yang diketahui sementara y^2 merupakan bentuk nonlinear nya serta $y(t)$ merupakan bentuk linearnya. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk beberapa contoh PDF Riccati dengan menampilkan gambar.

1.4 Tujuan Penelitian

Berlandaskan rumusan permasalahan yang telah dijelaskan sebelumnya, adapun tujuannya pada penelitian ini meliputi:

- Mengetahui bagaimanakah bentuk penyelesaian dari kombinasi metode iterasi variasional dan transformasi Shehu (Shehu–VIM) untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional Riccati (PDFR)
- Mengetahui bagaimanakah penerapan kombinasi metode iterasi variasional dan transformasi Shehu (Shehu–VIM) untuk menyelesaikan PDFR.
- Mengetahui bagaimanakah simulasi numerik dari PDFR tersebut.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian dari tugas akhir ini adalah

- Bagi penulis, penelitian ini memberikan kontribusi yang besar dalam memperluas wawasan dan pengetahuan, terutama dalam mengatasi Persamaan Diferensial Fraksional Riccati (PDFR) dengan memanfaatkan kombinasi metode iterasi variasional dan transformasi Shehu (Shehu-VIM).
- Bagi pembaca dan peneliti, penelitian ini bermanfaat sebagai referensi khususnya dalam menyelesaikan PDFR dengan menggunakan kombinasi metode iterasi variasional dan transformasi Shehu (Shehu–VIM)

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

1.6 Sistematika Penulisan

Pokok – pokok masalah dalam laporan Tugas Akhir ini diuraikan menjadi:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan menguraikan tentang latar belakang pemilihan judul, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penelitian.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang teori dasar mengenai hal-hal yang dapat digunakan sebagai acuan dan landasan untuk mengembangkan penelitian ini. Terdapat konsep teori seperti: Penjelasan persamaan diferensial fraksional, Persamaan Diferensial Fraksional Riccati, Transformasi Shehu, Metode Iterasi Variasional (VIM), dan Kombinasi Metode Iterasi Variasional dan Transformasi Shehu (Shehu–VIM).

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini berisi tahapan yang dilakukan penulis untuk mencapai tujuan penelitian mulai dari metode penelitian, teknik pengambilan data sampai ke tahapan penelitian

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi tentang tahapan-tahapan dilakukan oleh penulis untuk mendapatkan hasil seperti yang disampaikan pada rumusan masalah.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari hasil penelitian yang dilakukan oleh penulis.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB II

LANDASAN TEORI

Adapun bagian ini akan membahas teori pendukung guna menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini.

2.1 Persamaan Diferensial Fraksional

Persamaan yang memuat turunan fungsi dengan melibatkan satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial [2]. Konsep persamaan diferensial pertama kali diperkenalkan oleh Newton dan Leibniz melalui penemuan mereka dalam teori kalkulus [13]. Adapun orde persamaan diferensial ialah bilangan asli, tetapi orde tersebut bisa berupa pecahan, yang dikenal sebagai persamaan diferensial fraksional [14]. Persamaan ini melibatkan turunan fraksional disebut sebagai persamaan diferensial fraksional (PDF) [15].

L'Hospital menjadi penemu PDF pada tahun 1695 [16]. Persamaan tersebut terbagi atas dua kategori, yaitu persamaan diferensial fraksional biasa yang turunan fungsinya melibatkan satu variabel bebas dan persamaan diferensial fraksional parsial merupakan persamaan diferensial fraksional, yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas [3]. Persamaan diferensial fraksional memiliki banyak aplikasi di berbagai bidang seperti aliran fluida, viskoelastisitas, viskositas dan ekonomi [17]. Adapun bentuk umum dari PDF nonlinier [13]:

$$D^\alpha y(t) + Ay^2(t) + By(t) = s(t), \quad (2.1)$$

operator turunan fraksional orde α yaitu D^α dengan $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ A, B ialah sebagai konstanta. Berikut ini ialah contoh-contoh dari Persamaan Diferensial Fraksional [3, 18]:

1. $D^{\frac{1}{2}}y(t) = t + y(t),$
2. $D^{\frac{1}{2}}y(t) + y^2(t) = 1,$
3. $D^{\frac{3}{2}}y(t) + D^{\frac{1}{2}}y(t) = 0.$

Terdapat fungsi khusus yang berperan penting pada pembahasan persamaan diferensial fraksional yaitu fungsi Gamma seperti berikut,

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.1.1 Fungsi Gamma

Fungsi Gamma dilambangkan dengan huruf kapital Yunani $\Gamma(n)$ dalam matematika. Fungsi tersebut dapat dipahami sebagai keseluruhan bilangan yang kompleks, kecuali nol maupun bilangan bulat negatif. Melalui integral tak wajar yang konvergen, fungsi Gamma ini dapat diartikan untuk bilangan kompleks, khususnya bilangan bulat positif [18, 19]. Berikut adalah fungsi Gamma

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-1} du, \quad \text{Re } n > 0, \quad (2.2)$$

dengan $n \in \mathbb{R}$. Selain itu Fungsi Gamma juga memiliki sifat dasar sebagai berikut,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n). \quad (2.3)$$

Hal ini dapat di buktikan dengan menggunakan persamaan (2.2) sehingga $\Gamma(n+1)$ di tulis dalam bentuk integral sebagai berikut:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{(n+1)-1} du. \quad (2.4)$$

Oleh karena Persamaan (2.4) memiliki bentuk integral tak wajar, maka dengan menggunakan limit dan integral tentu Persamaan (2.4) menjadi,

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p u^n e^{-u} du \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left(u^n (-e^{-u}) \Big|_0^p - \int_0^p n u^{n-1} (-e^{-u}) du \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p^n (-e^{-p}) \int_0^p + n \int_0^p u^{n-1} (e^{-u}) du \right) \\ &= 0 + n \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_0^p u^{n-1} (e^{-u}) du \right) \\ &= n \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_0^p u^{n-1} (e^{-u}) du \right) \\ &= n \Gamma(n). \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat dasar fungsi Gamma, di oleh Persamaan (2.3), maka dapat diketahui nilai $\Gamma(1) = 1$, selain itu jika n ialah bilangan bulat positif, akan diperoleh [20]:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!,$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!,$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!,$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!. \quad (2.5)$$

Selain itu dari fungsi Gamma juga diperoleh sifat-sifat lain seperti:

a. $\Gamma(n+1) = n!$, dan juga

b. $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Selain dari fungsi Gamma, dalam kalkulus fraksional terdapat beberapa fungsi penting lainnya, seperti fungsi eksponensial dan fungsi Mittag-Leffler. Kalkulus fraksional merujuk pada disiplin dalam matematika yang berfokus atas kajian turunan dengan orde fraksional serta teori integral [3]. Konsep ini pertama kali muncul pada tahun 1695, ketika Leibniz dan L'Hospital membahas turunan ke- n dari fungsi polinom sederhana $f(x) = x^m$ yaitu $\frac{d^n x^m}{dx^n}$ untuk $n = \frac{1}{2}$. Kemudian pada tahun 1819 matematikawan Lacroix menjadi orang pertama yang membahas turunan fraksional. Turunan fraksional dari fungsi $y = f(x)$ dapat definisikan sebagai $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ dengan n sebagai orde real sembarang. Selanjutnya jika fungsi $y = f(x)$ diasumsikan sebagai $y = x^m$ yang dimana m adalah bilangan bulat positif. Maka turunan ke- n dari fungsi $y = f(x)$ dapat ditulis Lacroix sebagai [3],

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n, \quad (2.6)$$

selanjutnya, untuk menggantikan atau mengubah definisi fungsi faktorial Lacroix menggunakan notasi Gamma sehingga Persamaan (2.6) menjadi,

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \quad m \geq n. \quad (2.7)$$

Banyak ahli matematika yang mengembangkan definisi turunan fraksional diantaranya Riemann, Grunwald, Liouville, dan Caputo. Oleh karena itu teori yang diterapkan pada penelitian ini yaitu teori integral fraksional Riemann-Liouville (R-L) maupun turunan fraksional Caputo karena teori ini merupakan yang paling umum digunakan [18].

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.1.2 Integral Fraksional Riemann-Liouville (R-L)

Untuk menotasikan integral fraksional terdapat beberapa pendekatan salah satunya adalah Integral Fraksional Riemann-Liouville (R-L) yang mana di artikan sebagai berikut [21]

Definisi 2.1 Integral Fraksional (R-L) dari Fungsi $f(x)$ [21]

Dengan α merujuk pada bilangan real, maka integral fraksional orde α atas fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai [21]:

$$J^\alpha f(x) = D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (2.8)$$

dapat diketahui bahwasanya integral fraksional berorde α dari fungsi $f(x)$ pada Definisi 2.1 tersebut dinotasikan sebagai $J^\alpha f(x) = D^{-\alpha} f(x)$ dengan penjelasan sebagai berikut:

$D^\alpha f(x)$: adalah operator turunan fraksional orde α ,

$D^{-\alpha} f(x)$: adalah operator integral fraksional yang merupakan invers dari operator D^α

Adapun rumus untuk integral fraksional dari suatu konstanta k berorde α adalah sebagai berikut [16]:

$$J^\alpha k = J^\alpha k \cdot x^0 = \frac{p \cdot \Gamma(0+1)}{\Gamma(0+\alpha+1)} x^{0+\alpha} = \frac{p}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha \quad (2.9)$$

Definisi 2.2 Integral Fraksional (R-L) dari Fungsi Polinom $f(x) = x^m$ [21]

Berikut adalah fungsi polinom sederhana $f(x) = x^m$, dengan integral fraksional berorde α [21]:

$$J^\alpha x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} x^{m+\alpha}, \quad (2.10)$$

untuk $\alpha > 0, m > -1, x > 0$.

2.1.3 Turunan Fraksional Caputo

Turunan fraksional dapat didefinisikan sebagai suatu turunan dengan orde berupa bilangan pecahan. Menurut definisi Caputo, turunan fraksional bentuk Caputo memiliki rumus sebagai berikut [21]:

Definisi 2.3 Turunan Fraksional Caputo dari Fungsi $f(x)$ [22]

Turunan fraksional orde α dari $f(x)$ terhadap x Untuk $n - 1 \leq \alpha < n$, dengan $n \in \mathbb{Z}^+$ dan α adalah bilangan real, dengan $x > 0$ didefinisikan sebagai berikut [22]:

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= j^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.11)$$

berdasarkan definisi 2.3 D^α adalah operator derivatif fraksional berorde α .

Definisi 2.4 Turunan Fraksional Caputo dari Fungsi Polinom $f(x) = x^m$ [22]

Berikut adalah fungsi polinom sederhana $f(x) = x^m$, dan turunan fraksional berorde α adalah:

$$D^\alpha x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha}, \quad (2.12)$$

untuk $0 < \alpha < 1, p \geq 0$.

2.2 Persamaan Diferensial Fraksional Riccati

Persamaan diferensial nonlinear orde satu yang pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan asal Italia bernama Vincenzo Riccati pada tahun 1724 dikenal dengan nama persamaan Riccati [23]. Persamaan diferensial Riccati ini juga merupakan persamaan diferensial non linear dengan bentuk yang cukup kompleks [24, 25]. Pendekatan yang digunakan dalam persamaan Riccati ini adalah pendekatan persamaan diferensial eksak [23]. Secara khusus, persamaan diferensial fraksional Riccati dapat direpresentasikan sebagai berikut [23, 26, 27]:

$$D_t^\alpha = Q(t)y^2(t) + P(t)y(t) + R(t), \quad (2.13)$$

dengan $t > 0, t \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq 1, y(0) = y_0$, dimana α ialah orde turunan fraksional, $Q(t), P(t)$, serta $R(t)$ adalah fungsi yang diketahui sementara y^2 merupakan bentuk nonlinear nya serta $y(t)$ merupakan bentuk linearnya. Persamaan fraksional Riccati akan menjadi persamaan diferensial Riccati klasik ketika nilai $\alpha = 1$. Persamaan Riccati ini juga memiliki aplikasi dalam berbagai masalah sains terapan, teknik dan rekayasa seperti matematika finansial, teori masalah difusi, stokastik dan pemrosesan random [24, 25]. Berikut adalah beberapa

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

contoh persamaan diferensial fraksional riccati dengan orde fraksional $0 < \alpha \leq 1$ [5, 21]:

$$1. D_t^\alpha y(t) = -y^2(t) + 2y(t) + 1, 0$$

$$2. D_t^\alpha y(t) = 0,01y^2(t) + 4y(t) - 2$$

$$3. D_t^\alpha y(t) = 0,1y^2(t) + 0,5y(t) + 2$$

2.3 Metode Transformasi Shehu

Transformasi Shehu, pertama kali diperkenalkan oleh Maitama Shehu dan Weidong Zhao yaitu bentuk transformasi integral yang berfungsi sebagai generalisasi dari transformasi Laplace dan integral Sumudu. Teknik ini digunakan untuk menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial secara efisien. Transformasi Shehu dapat diaplikasikan dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial, khususnya yang melibatkan orde fraksional [28]. Transformasi Shehu di definisikan oleh himpunan fungsi berikut [29,30]:

$$A = \left\{ y(t) : \exists N, \eta_1, \eta_2 > 0, |v(t)| < N \exp\left(\frac{|t|}{\eta_i}\right), \text{ if } t \in (-1)^i \times [0, \infty) \right\}, \quad (2.14)$$

berikut adalah rumus dari transformasi Shehu [34]:

$$Y(s, u) = S[y(t)] = \int_0^\alpha \exp\left(\frac{-st}{u}\right) y(t) dt, \quad (2.15)$$

dimana $(s) = S[y(t)]$ adalah notasi hasil transformasi Shehu dari fungsi $v(t)$.

2.3.1 Sifat-Sifat Transformasi Shehu

Transformasi Shehu memiliki beberapa sifat yaitu [29,31]:

1. Sifat Linearitas

$$S[\alpha y(t) + \beta w(t)] = \alpha S[y(t)] + \beta S[w(t)]$$

2. Sifat Turunan

$$S[y^n(t)] = \frac{s^n}{u^n} Y(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{n-(k+1)} y^{(k)}(0)$$

$$\text{Turunan pertama : } S\left[\frac{s}{u} y'(t)\right] = \frac{s}{u} Y(s, u) - y(0)$$

$$\text{Turunan kedua : } S[y''(t)] = \frac{s^2}{u^2} Y(s, u) - \frac{s}{u} y(0) - y'(0)$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

3. Sifat Perubahan Skala

$$\mathbb{S}[y(\beta t)] = \frac{u}{\beta} Y\left(\frac{s}{\beta}, u\right)$$

4. Sifat Konvolusi

$$\mathbb{S}[y_1(t) * y_2(t)] = \mathbb{S}[y_1(t)]\mathbb{S}[y_2(t)] \quad (2.16)$$

2.3.2 Invers Transformasi Shehu

Dalam penerapannya, transformasi Shehu mengubah fungsi dari parameter t menjadi fungsi dalam bentuk parameter s, u . Jika fungsi yang berbentuk parameter s, u perlu diubah kembali ke dalam bentuk parameter t , maka invers transformasi Shehu dapat dilakukan [29].

Apabila $Y(s, u)$ atau $\mathbb{S}[y(t)]$ adalah hasil transformasi Shehu dari fungsi $y(t)$, maka invers transformasi Shehu dari $Y(s, u)$ adalah $\mathbb{S}^{-1}[Y(s, u)] = y(t)$ [29]. Berikut merupakan tabel fungsi dan invers transformasi Shehu [29]:

Tabel 2.1 Fungsi dan Invers dari Transformasi Shehu

$y(t) = \mathbb{S}^{-1}[Y(s, u)]$	$Y(s, u) = \mathbb{S}[y(t)]$
1	$\frac{u}{s}$
t	$\left(\frac{u}{s}\right)^2$
$\frac{t^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$	$\left(\frac{u}{s}\right)^{n+1}$
$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \alpha = \text{orde fraksional}$	$\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha+1}$
$\exp(at)$	$\frac{u}{s - \alpha u}$
$\exp(-at)$	$\frac{u}{s + \alpha u}$

Contoh 2.3

Terapkan transformasi Shehu pada persamaan diferensial biasa berikut [28]:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0, \quad y(0) = 1 \quad (2.17)$$

Penyelesaian:

Terlebih dahulu terapkan transformasi Shehu pada kedua sisi dari Persamaan (2.17) berikut,

$$S\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] + S[y(t)] = 0, \quad (2.18)$$

langkah selanjutnya akan menerapkan sifat dari transformasi Shehu untuk turunan fraksional Caputo pada Persamaan (2.18), maka diperoleh hasil dari transformasi Shehu yaitu,

$$\frac{s}{u}Y(s, u) - y(0) + Y(s, u) = 0. \quad (2.19)$$

Setelah diperoleh hasil transformasi Shehu kemudian substitusikan nilai $y(0) = 1$ pada Persamaan (2.19) dan selesaikan untuk $y(0)$ maka bentuk dalam transformasi Shehu yaitu,

$$Y(s, u) = \frac{u}{s+u} \quad (2.20)$$

Selanjutnya lakukan invers transformasi Shehu terhadap Persamaan (2.20),

$$S^{-1}[Y(s, u)] = S^{-1}\left[\frac{u}{s+u}\right] = \frac{u}{s+\alpha u} \quad (2.21)$$

Setelah dilakukan invers transformasi Shehu sehingga diperoleh hasil akhir invers dari transformasi Shehu $\frac{u}{s+\alpha u}$ dengan $\alpha = 1$ berdasarkan Tabel 2.1 yaitu,

$$y(t) = \exp(-\alpha t). \quad (2.22)$$

Maka diperoleh solusi akhir dari persamaan diferensial biasa tersebut dengan menerapkan transformasi Shehu yaitu $y(t) = \exp(-\alpha t)$.

2.4 Metode Iterasi Variasional

Ji Huan He adalah matematikawan yang pertama kali memperkenalkan metode iterasi variasional (VIM) [32]. Metode ini telah diterapkan pada persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial [33]. Untuk persamaan diferensial fraksional (PDF), metode iterasi variasional juga telah digunakan dalam beberapa penelitian seperti yang disebutkan dalam [34] dan sering disebut sebagai

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

metode Fraksional VIM. Dalam menyelesaikan persamaan diferensial, terdapat 3 konsep dasar yang dapat digunakan yaitu pengali Lagrange, variasi terbatas dan fungsi koreksi [35]. Dalam penerapannya metode ini akan menghasilkan fungsi koreksi yang melibatkan pengali lagrange. Secara optimal pengali lagrange dapat diidentifikasi dengan menggunakan teori variasional[36]. Dengan menggunakan Fraksional VIM, proses untuk menemukan solusi dari persamaan diferensial fraksional dapat dijelaskan secara sistematis. Bentuk umum dari persamaan diferensial fraksional diberikan sebagai berikut [12]:

$$D_t^\alpha y(t) + P[y(t)] + Q[y(t)] = R(t), \quad m < \alpha < m + 1,$$

atau

$$D_t^\alpha y(t) + P[y(t)] + Q[y(t)] - R(t) = 0 \quad (2.23)$$

Dimana α ialah orde turunan fraksional, P ialah operator linear, Q ialah operator nonlinear, $R(t)$ ialah fungsi kontinu dan D_t^α ialah operator integral fraksional.

Selanjutnya Persamaan (2.23) akan diubah ke dalam bentuk fungsi koreksi seperti berikut [21] :

$$y_{n+1} = y_n + J^\alpha \lambda [D_t^\alpha y_n - P[y_n(t)] - Q[y_n(t)] - R], \quad (2.24)$$

yang dimana λ dinotasikan sebagai Pengali Lagrange Umum dan J^α merupakan simbol dari integral fraksional yang mana belum diketahui batas atas dan batas bawah pada integral fraksionalnya, pada fungsi koreksi yang memiliki variabel y ditambahkan n . Selanjutnya nilai λ yang dapat diidentifikasi dengan teori variasi dan dengan mengaproksimasi persamaan fungsi koreksi (2.24) menjadi:

$$y_{n+1} = y_n + \int_0^t \lambda [D_\tau^\alpha y_n - P[\tilde{y}_n(\tau)] - Q[\tilde{y}_n(\tau)] - R] d\tau, \quad (2.25)$$

Dengan $\tilde{y}_n$ merupakan bentuk variasi terbatas yang berperan sebagai konstanta sehingga $\partial \tilde{y}_n = 0$ [21]. Selanjutnya pada Persamaan (2.25) akan diturunkan terhadap y_n dengan menggunakan integral parsial sehingga dapat ditentukan nilai pengali Lagrange λ . Setelah nilai pengali Lagrange λ diperoleh, selanjutnya substitusikan λ ke dalam fungsi koreksi pada Persamaan (2.25).

dengan $\widetilde{y}_n(t)$ ialah bentuk variasi terbatas yang berperan sebagai konstanta sehingga $\delta \widetilde{y}_n(t) = 0$ dan $\lambda(\tau)$ merupakan pengali Lagrange. Kemudian turunkan Persamaan (2.30) tersebut terhadap y_n menjadi sebagai berikut

$$\frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} = \frac{\partial y_n}{\partial y_n} + \frac{\partial}{\partial y_n} \int_0^t \lambda(\tau) \left[\frac{dy_n(\tau)}{d\tau} - P \frac{\partial \widetilde{y}_n^2(\tau)}{\partial y_n} - Q \frac{\partial \widetilde{y}_n(\tau)}{\partial y_n} - R \right] d\tau. \quad (2.31)$$

Selanjutnya, Persamaan (2.31) dioptimalkan menggunakan teori variasi, maka

$\frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} = 0$, sehingga Persamaan (2.31) dapat di tulis kembali menjadi

$$0 = 1 + \frac{\partial}{\partial y_n} \int_0^t \lambda(\tau) \frac{dy_n(\tau)}{d\tau} d\tau - \int_0^t \lambda(\tau) P \frac{\partial \widetilde{y}_n^2(\tau)}{\partial y_n} d\tau - \int_0^t \lambda(\tau) Q \frac{\partial \widetilde{y}_n(\tau)}{\partial y_n} d\tau - \frac{\partial}{\partial y_n} \int_0^t \lambda(\tau) R d\tau.$$

Oleh karena $\delta \widetilde{y}_n(t) = 0$ bersifat sebagai konstanta, maka

$$1 + \frac{\partial}{\partial y_n} \int_0^t \lambda(\tau) \frac{dy_n(\tau)}{d\tau} d\tau = 0. \quad (2.32)$$

Dapat di ketahui bahwasanya pada Persamaan (2.32) di atas ekuivalen dengan,

$$\partial y_n + \partial \int_0^t \lambda(\tau) \frac{dy_n(\tau)}{d\tau} d\tau = 0, \quad (2.33)$$

Kemudian untuk memperoleh nilai pengali Lagrange selanjutnya akan diterapkan integral parsial dari $\int_0^t \lambda(\tau) \frac{dy_n(\tau)}{d\tau} d\tau$ Persamaan (2.33) dengan memisalkan

$$\begin{aligned} u &= \lambda(\tau), & dy &= \frac{dy_n(\tau)}{d\tau} d\tau, \\ du &= \lambda'(\tau) d\tau, & y &= y_n. \end{aligned}$$

Sehingga di peroleh

$$\int_0^t \lambda(\tau) \frac{dy_n(\tau)}{d\tau} d\tau = \lambda(\tau) y_n - \int_0^t y_n \lambda'(\tau) d\tau. \quad (2.34)$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Selanjutnya substitusikan hasil integral parsial yang di beriksn pada Persamaan (2.34) ke Persamaan (2.33) memberikan hasil

$$\begin{aligned} \partial y_n + \partial \left(\lambda(\tau) y_n - \int_0^t y_n \lambda'(\tau) d\tau \right) &= 0 \\ \partial y_n + \partial y_n \lambda(\tau) - \int_0^t \partial y_n \cdot \lambda'(\tau) d\tau &= 0 \\ (1 + \lambda(\tau)|_{\tau=t}) \partial y_n - \int_0^t \partial y_n \lambda'(\tau) d\tau &= 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

sehingga pada Persamaan (2.33) tersebut diperoleh kondisi stasioner yaitu,

$$1 + \lambda|_{\tau=t} = 0, \text{ dan } \lambda'|_{\tau=t} = 0.$$

Oleh karena itu nilai pengali Lagrange yang memenuhi adalah $\lambda(\tau) = -1$, kemudian substitusikan nilai pengali Lagrange $\lambda(\tau) = -1$ ke fungsi koreksi pada Persamaan (2.29) sehingga

$$y_{n+1} = y_n - J^\alpha [D_t^\alpha y_n(t) - P y_n^2(t) - Q y_n(t) - R]. \quad (2.36)$$

Selanjutnya subsitusikan nilai $y(0) = 0$ untuk iterasi awal pada Persamaan (2.36), dan selesaikan proses iterasi selanjutnya, yaitu:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 - J^\alpha [D_t^\alpha y_0(t) - P y_0^2(t) - Q y_0(t) - R] \\ &= J^\alpha R \\ &= R \frac{t^\alpha}{\Gamma_1}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

dengan menggunakan Persamaan (2.37) maka y_2 diperoleh

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 - J^\alpha [D_t^\alpha y_1(t) - P y_1^2(t) - Q y_1(t) - R] \\ &= R \frac{t^\alpha}{\Gamma_1} + QR \frac{t^\alpha}{\Gamma_2} + PR^2 \frac{\Gamma_2 t^{3\alpha}}{\Gamma_1^2 \Gamma_3} \end{aligned} \quad (2.38)$$

selanjutnya dengan cara yang sama y_3 diperoleh

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 y_3 &= y_2 - J^\alpha [D_t^\alpha y_1(t) - P y_2^2(t) - Q y_2(t) - R] \\
 &= P R^2 \frac{\Gamma_2 t^{3\alpha}}{\Gamma_1^2 \Gamma_3} + P Q^2 R^2 \frac{\Gamma_4 t^{5\alpha}}{(\Gamma_2)^2 \Gamma_5} \\
 &\quad + P^3 R^4 \frac{\Gamma_5 (\Gamma_2)^2 t^{7\alpha}}{\Gamma_1^4 (\Gamma_3)^2 \Gamma_7} \\
 &\quad + 2 P Q R^2 \frac{\Gamma_3 t^{4\alpha}}{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_4} \\
 &\quad + 2 P^2 Q R^3 \frac{\Gamma_5 t^{6\alpha}}{\Gamma_1^2 \Gamma_3 \Gamma_6} \\
 &\quad + 2 P^2 R^3 \frac{\Gamma_2 \Gamma_4 t^{6\alpha}}{(\Gamma_1)^3 \Gamma_3 \Gamma_5} + P R \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma_2} \\
 &\quad + Q^2 R \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma_3} \\
 &\quad + P Q R^2 \frac{\Gamma_2 t^{4\alpha}}{(\Gamma_1)^2 \Gamma_4} \\
 &\quad + R \frac{t^\alpha}{\Gamma_1}.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

dengan $\Gamma_i = \Gamma(i, \alpha + 1)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Misalkan iterasi kita hentikan sampai y_n , maka solusi dari Persamaan (2.27) adalah

$$y(t) \cong y_n(t). \tag{2.40}$$

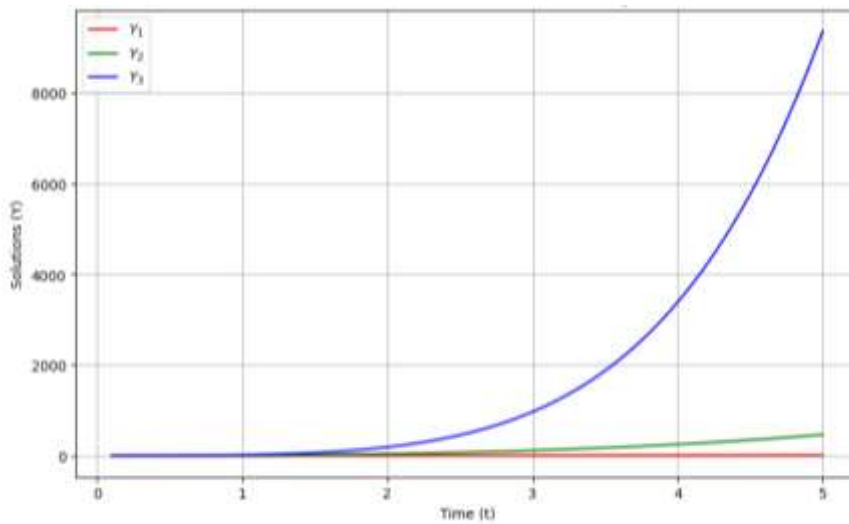
dengan P, Q, R ialah konstanta.

Berikut adapun hasil dan grafik untuk Persamaan (2.27) jika diberikan $P = 2$, $Q = 2$, $R = 3$, dengan orde fraksional $\alpha = 1$ yang disajikan pada Gambar 2.1 sebagai berikut,

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Gambar 2.1 Grafik Perbandingan Aproksimasi Solusi VIM pada Contoh 2.4

Berdasarkan Gambar 2.1 yang menunjukkan grafik perbandingan solusi VIM antara y_1 , y_2 dan y_3 . terlihat bahwa y_3 mengalami pertumbuhan yang paling signifikan. Sementara itu, y_2 menunjukkan laju pertumbuhan yang lebih tinggi dibandingkan y_1 , namun tetap dalam skala yang lebih rendah dari y_3 . Ini mengindikasikan bahwa dalam rentang waktu yang sama, y_2 mengalami peningkatan dibandingkan y_1 , sedangkan nilai y_1 relatif lebih kecil dibandingkan dengan y_2 dan y_3 . Dengan demikian, grafik ini memperlihatkan bahwa solusi y_3 memiliki dominasi dalam hal pertumbuhan dibandingkan dua solusi lainnya. Perbedaan ini kemungkinan mencerminkan variasi dalam parameter fraksional atau kondisi awal yang digunakan dalam metode pendekatan VIM masing-masing.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB III METODE PENELITIAN

Penelitian ini bersifat kepustakaan yang mengumpulkan data maupun informasi yang dibutuhkan dari berbagai sumber referensi seperti jurnal, artikel, buku-buku maupun sumber dari internet lainnya yang berkaitan dengan penelitian ini, untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional Riccati (PDFR) menggunakan kombinasi metode iterasi variasional dan transformasi Shehu (Shehu–VIM). Berikut adalah tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini:

1. Pertimbangkan PDFR dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$D_t^\alpha = Q(t)y^2(t) + P(t)y(t) + R(t), \quad t \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq 1, t > 0, \quad (3.1)$$

dengan $y(0) = y_0$,

2. Ubah Persamaan (3.1) menggunakan sifat transformasi Shehu
3. Pengubahan bentuk Persamaan yang telah di transformasikan sebelumnya ke dalam bentuk Persamaan aljabar $f(y) = 0$ dan di iterasikan. Langkah iterasi ini merupakan Langkah awal dari solusi VIM, berikut bentuk iterasinya:

$$y_{n+1} = y_n - \lambda f(y_n), \quad \text{dengan } \lambda = -1$$

4. Menerapkan invers transformasi Shehu untuk memperoleh y_{n+1}
5. Melakukan proses iterasi dengan mensubstitusikan nilai $y(0) = y_0$ dalam menentukan $y_1, y_2, \dots, y_n$ dengan demikian diperoleh aproksimasi solusi. Iterasi akan berhenti ketika solusi telah mencapai tingkat akurasi yang diinginkan.
6. Melakukan simulasi numerik dengan menerapkan dua contoh soal Persamaan Diferensial Fraksional Riccati.
- Membandingkan galat dari metode Shehu–VIM dengan galat dari beberapa metode lain seperti solusi persamaan diferensial fraksional metode homotopi pertubasi baru (NHPM), metode variasi parameter (VPM), dan metode modifikasi homotopi (MHPM).

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Metode transformasi Shehu dan iterasi variasional (VIM) merupakan dua metode yang berbeda yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial fraksional. Pada pembahasan BAB IV Berdasarkan hasil simulasi numerik pada dua contoh soal PDFR nonlinier, diperoleh bahwa (Shehu–VIM) menghasilkan solusi aproksimasi yang mendekati solusi eksak ketika $\alpha = 1$ dapat dilihat melalui perbandingan grafik aproksimasi Shehu–VIM dengan solusi eksak yang mana kurva solusi hampir saling berhimpit sebagaimana ditunjukkan pada grafik Gambar 4.1 untuk contoh soal 4.2.1 dan Gambar 4.6 untuk contoh soal 4.2.2. Hal serupa juga berlaku Ketika perolehan galat dibandingkan dengan metode lainnya seperti VPM, NHPM dan MHPM dengan interval. Apabila dibandingkan dengan metode lainnya jika $\alpha = 1$, Shehu–VIM memiliki perolehan galat yang serupa dengan VPM dan galat Shehu–VIM lebih kecil dari perolehan galat NHPM, namun tidak lebih kecil dari perolehan galat MHPM.

5.2 Saran

Dalam Tugas Akhir ini, penulis telah membahas penyelesaian persamaan diferensial fraksional Riccati menggunakan gabungan metode transformasi Shehu dan VIM. Untuk pengembangan lebih lanjut, disarankan untuk di uji lebih lanjut pada berbagai bentuk persamaan diferensial fraksional nonlinear lainnya dengan menggabungkan metode VIM dengan jenis transformasi lainnya dalam menyelesaikan PDFR.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Z. Nuraeni, Aplikasi Persamaan Diferensial Dalam Estimasi Jumlah Populasi, *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, vol. 5, no. 1, pp. 9–16, 2017.
- [2] M. H. Yudhi, Mengkonstruksi Fungsi Green Pada Persamaan Diferensial Linear Orde n Dengan Metode Transformasi Sumudu, *Jurnal Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya (Bimaster)*, vol. 9, no. 2, 2020, doi: 10.26418/bbimst.v9i2.39944.
- [3] Muhamad Deni Johansyah, H. Napitupulu, and P. N. Amalia, Dasar-Dasar Persamaan Differensial Fraksional, *Unibi Press*, 2021.
- [4] E. M. E. Zayed, Y. A. Amer, and R. M. A. Shohib, The fractional complex transformation for nonlinear fractional partial differential equations in the mathematical physics, *Journal Association of Arab Universities of Basic and Applied Sciences*, vol. 19, no. October, pp. 59–69, 2016, doi: 10.1016/j.jaubas.2014.06.008.
- [5] D. Jain and D. Arela, Application of Laplace Decomposition Method to Fractional Riccati Equations, *SKIT Research Journal*, vol. 12, no. 1, pp. 95–98, 2022, doi: 10.47904/ijskit.12.1.2022.95-98.
- [6] E. Ul Haq, M. Ali, and A.S. Khan, On The Solution of Fractional Riccati Differential Equations with Variation of Parameters Method, *Engineering and Applied Science Letters*, vol. 3, no.3, pp. 1-9 , 2020
- [7] M. D. Johansyah, H. Napitupulu, E. Harahap, I. Sumiati, and A. K. Supriatna, Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Riccati Menggunakan Adomian Decomposition Method dan Variational Iteration Method, *Jurnal Matematika*, vol. 18, no. 1, pp. 9–20, 2019, doi: 10.29313/jmtm.v18i1.4931.
- [8] N. A. Khan, A. Ara, and M. Jamil, An efficient approach for solving the Riccati equation with fractional orders, *Journal of Computers and Mathematics with Applications*, vol. 61, no. 9, pp. 2683–2689, 2011, doi: 10.1016/j.camwa.2011.03.017.
- [9] Z. Odibat and S. Momani, Modified homotopy perturbation method: Application to quadratic Riccati differential equation of fractional order, *Chaos, Solitons and Fractal*, vol. 36, no. 1, pp. 167-174, 2008.
- [10] R. Belgacem, D. Baleanu, and A. Bokhari, Shehu Transform and Applications To Caputo-Fractional Differential Equations, *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 17, no. 6, pp. 917–927, 2019, doi: 10.28924/2291-8639-17-2019-917.
- [11] R. Shah, A. S. Alshehry, and W. Weera, “SS symmetry A Semi-Analytical Method to Investigate Fractional-Order Gas Dynamics Equations by Shehu Transform, *Journal of Symmetry MDPI*, no. 1, pp. 1–13, 2022.
- [12] A.S. Abedl-Rady, S. Z. Rida, A. A. M. Arafa, and H.R. Abedl-Rahim, Variational Iteration Sumudu Transform Method for Solving Fractional Nonlinear Gas Dynamics Equation, *International Journal of Research Studies in Science, Engineering, and Technology*, vol. 1, no.9,pp.82-90,2014.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

- [13] R. K. Nisa, Zulakmal dan Muhafzan, Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Nonhomogen, *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 10, no. 2, pp. 202–209, 2021.
- [14] A. B. Rachman, E. Djauhari, dan M. D. Johansyah, Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Riccati dengan Ruas Kanan Konstanta menggunakan Elzaki Decomposition Method dan Analisis Kekonvergenannya, *Jurnal Matematika Integratif*, vol. 16, no. 2, p. 83, 2020, doi: 10.24198/jmi.v16.n2.28743.83-93.
- [15] I. Suryani, A. Suprianto, Wartono dan Rahmadeni, Model Verhulst Pada Estimasi Pertumbuhan Produksi Padi Menggunakan Metode Milne-Simpson dan Adams-Bashforth-Mouton, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. xx, no. xx, pp. 1–11.
- [16] R. H. Tsani dan M. Syafwan, Penyelesaian Masalah Nilai Batas Untuk Persamaan Diferensial Fraksional Linier Orde 2α dengan Turunan Tipe Caputo, *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 10, no. 1, pp. 11–19, 2021.
- [17] W. R. Gumelar, Analisis Model Persamaan Diferensial Fraksional dari Penyebaran Penyakit Campak dan Solusi Numerik Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace, *Jurnal Matematika*, November, 2023, doi: 10.37278/insearch.v22i2.749.
- [18] D. A. R. Hijrah, Persamaan Diferensial Fraksional Tipe Caputo Serta Aplikasinya pada Proses Pendinginan Semi-Infinite oleh Radiasi, *Jurnal Matematika dan Sains*, 2016.
- [19] Amran Hapsan, Penerapan Fungsi Gamma Dalam Pembuktian $0! = 1$, *Jurnal Matematika dan Pembelajarannya*, vol. 2, no. 1, 2016.
- [20] I. Podlubny, Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some Of Their Applications, *Academic Press, Elsevier Sci.*, 1998.
- [21] M. D. Johansyah, A. K. Supriatna, E. Rusyaman, dan K. R. A. Muslihin, Persamaan Diferensial Fraksional dan Aplikasinya, *Unibi Press*, 2021.
- [22] K. Parmikanti dan E. Rusyaman, Turunan Fraksional Fungsi Polinom Menggunakan Deret Kuasa, *Jurnal Matematika*, pp. 535–538, 2014.
- [23] A. A. Resty, M. Kiftiah, dan Yudhi, Penyelesaian Generalisasi Persamaan Bernoulli dan Persamaan Riccati dengan Pendekatan Persamaan Diferensial Eksak, *Jurnal Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya (Bimaster)*, vol. 11, no. 1, pp. 35–42, 2022.
- [24] M. D. Johansyah, J. Nahar, dan F. H. Badruzzaman, Analisis Turunan dan Integral Fraksional Fungsi Pangkat Tiga dan Fungsi Eksponensial, *Jurnal Matematika*, vol. 16, no. 2, pp. 1–9, 2017, doi: 10.29313/jmtm.v16i2.3357.
- [25] Muhammd Abdy, Ahmad Zaki, dan Amni Rasyidah, Persamaan Riccati dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton, *Journal of Mathematics Theory and Applications*, vol. 1, no. 2, pp. 73–77, 2019, doi: 10.31605/jomta.v1i2.698.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

- [26] M. G. Sakar, A. Akgül, and D. Baleanu, On solutions of fractional Riccati differential equations, *Journal of Advances in Difference Equations*, vol. 2017, no. 1, 2017, doi: 10.1186/s13662-017-1091-8.
- [27] E. Abuteen, Solving Fractional Riccati Differential equation with Caputo-Fabrizio fractional derivative, *European Journal of Pure Applied Mathematics*, vol. 17, no. 1, pp. 372–384, 2024, doi: 10.29020/nybg.ejpam.v17i1.5013.
- [28] S. Maitama and W. Zhao, New Integral Transform: Shehu Transform A Generalization Of Sumudu and Laplace Transform For Solving Differential Equations, *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 17, no. 2, pp. 167–190, 2019, doi: 10.28924/2291-8639-17-2019-167.
- [29] H. Bozburun dan H. A. Peker, Solution of Linear Volterra Integro-Differential Equations of Second Kind Using Shehu Transform, *Tbilisi Mathematical Journal*, vol. VII, no. November 2020, pp. 177–186, 2018, [Online]. Available: www.ijltemas.in
- [30] A. Khalouta and A. Kadem, A New Method to Solve Fractional Differential Equations: Inverse Fractional Shehu Transform Method, Applications and Applied Mathematics: *An International Journal*, vol. 14, no. 2, pp. 926–941, 2019, [Online]. Available: <http://pvamu.edu/aam>
- [31] A. Dahlia dan R. Qudsi, Perbandingan Transformasi Laplace Dan Transformasi Shehu Untuk Menyelesaikan Persamaan Integral Volterra Jenis Pertama, *Jurnal Pendidikan Matematika*, vol. 5, no. 1, p. 1, 2021, doi: 10.33087/phi.v5i1.121.
- [32] Ji Huan He, Variational iteration method - a kind of non-linear analytical technique : some examples, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 34, pp. 699–708, 1999.
- [33] H. Jafari and H. Tajadodi, He's variational iteration method for solving fractional Riccati differential equation, *International Journal of Differential Equations*, vol. 2010, pp. 13–15, 2010, doi: 10.1155/2010/764738.
- [34] Y. Khan, N. Faraz, A. Yildirim, and Q. Wu, Fractional variational iteration method for fractional initial-boundary value problems arising in the application of nonlinear science, *Journal of Computer Mathematics with Applications*, vol. 62, no. 5, pp. 2273–2278, 2011, doi: 10.1016/j.camwa.2011.07.014.
- [35] Yuliani, L. Deswita, dan Agusni, Konsep Metode Iterasi Variasional, *Jurnal Online Mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Universitas Riau*, vol. 2, no. 1, pp. 379–386.
- [36] Wartono and I. Suryani, The solution of nonlinear parabolic equation using variational iteration method,” *Jurnal Matematika Statistika dan Komputasi*, vol. 16, no. 3, p. 287, 2020, doi: 10.20956/jmsk.v16i3.8468.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis lahir di Pekanbaru pada tanggal 13 Agustus 2002 dari ayah bernama Achmad Juli Wira Bhakti dan Ibu bernama Eni Marlina. Penulis merupakan anak pertama dari empat bersaudara. Penulis berdomisili di Kota Pekanbaru. Penulis bersekolah dasar di SD Negeri 6 Pekanbaru lulus pada tahun 2011, selanjutnya melanjutkan pendidikan ke SMP Negeri 11 Pekanbaru lulus pada tahun 2017. Setelah itu melanjutkan pendidikan ke SMA Negeri 6 Pekanbaru dan tamat pada tahun 2020. Berikutnya pada tahun yang sama yaitu tahun 2020 penulis melanjutkan studi ke Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau Fakultas Sains dan Teknologi Program Studi Matematika dan lulus melalui jalur SNMPTN. Berikutnya pada tanggal 6 Juli tahun 2023 - tanggal 31 Agustus tahun 2023 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) yang dilaksanakan di Desa Bangko Kanan, Kecamatan Bangko Pusako, Kabupaten Rokan Hilir. Kemudian penulis menyelesaikan Kerja Praktek (KP) dengan Judul laporan **"Analisis Perkembangan dan Fluktuasi Harga Bawang Putih di Provinsi Riau Tahun 2023"** dibawah bimbingan Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc. yang diseminarkan pada tanggal 29 Juni tahun 2024. Pada tahun 2024 penulis juga memulai menyusun Tugas Akhir dengan judul **"Penyelesaian Persamaan Diferensial Fraksional Riccati Menggunakan Kombinasi Metode Transformasi Shehu dan Iterasi Variasional"** yang dibimbing oleh Bapak Wartono, S.Si., M.Sc.