

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

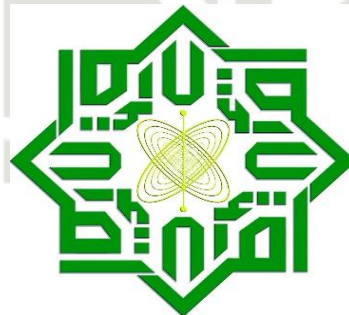
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**TRACE MATRIKS QUATERNION BENTUK KHUSUS  
ORDO  $2 \times 2$  BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF****TUGAS AKHIR**

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
pada Program Studi Matematika

oleh:

**RISKA FITRIANIS**  
**12050425900**



UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU  
PEKANBARU**

**2025**

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

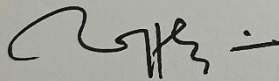
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**LEMBAR PERSETUJUAN****TRACE MATRIKS *QUATERNION* BENTUK KHUSUS  
ORDO  $2 \times 2$  BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF****TUGAS AKHIR**

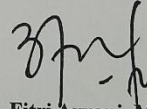
oleh:

**RISKA FITRIANIS**  
**12050425900**Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir  
di Pekanbaru, pada tanggal 10 Januari 2025

Ketua Program Studi

**Wartono, M.Sc.**  
NIP. 19730818 200604 1 003

Pembimbing

**Fitri Aryani, M.Sc.**  
NIP. 19770913 200604 2 002

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## LEMBAR PENGESAHAN

### *TRACE* MATRIKS *QUATERNION* BENTUK KHUSUS ORDO $2 \times 2$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

### TUGAS AKHIR

oleh:

**RISKA FITRIANIS**  
12050425900

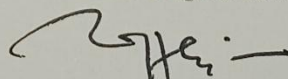
Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Pekanbaru, pada tanggal 10 Januari 2025

Pekanbaru, 10 Januari 2025  
Mengesahkan



**Dr. Hartono, M.Pd.**  
NIP. 19640301 199203 1 003

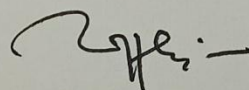
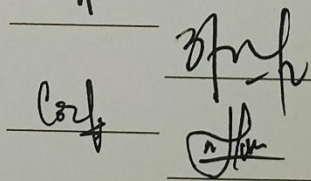
Ketua Program Studi



**Wartono, M.Sc.**  
NIP. 19730818 200604 1 003

#### DEWAN PENGUJI

Ketua : Wartono, M.Sc.  
Sekretaris : Fitri Aryani, M.Sc.  
Anggota I : Corry Corazon Marzuki, M.Si.  
Anggota II : Ade Novia Rahma, M.Mat.



## LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi ke perpustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**LEMBAR PERNYATAAN**

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 10 Januari 2025  
Yang membuat pernyataan,



**RISKA FITRIANIS**  
**12050425900**

## LEMBAR PERSEMBAHAN

### MOTTO:

*Ada kekuatan di balik setiap pengorbanan yang sunyi, yang menjadi alasan sangkaiku hari ini."*

*Jangansah kamu bersikap semah, dan jangan (pula) bersedih hati, padahal kamulah orang-orang yang paling tinggi (derajatnya), jika kamu orang-orang beriman." (QS. Ali-Imran:139)*

Dengan penuh rasa syukur, karya ini saya persembahkan kepada mereka yang menjadi alasan dari setiap langkah dan perjuangan:

#### **Teruntuk laki-laki favorit saya, Ayahanda Alm. Mohd. Yanis Abdullah**

Untuk sosok yang diamnya penuh makna, langkahnya penuh perjuangan, dan cintanya tak pernah terucap, tetapi selalu terasa. Terima kasih, Ayah. Ayah walapun raganya kini sudah dipeluk oleh bumi, tapi saya yakin beliau selalu mengeringi setiap langkah putri kecilnya.

#### **Teruntuk wanita hebat saya, ibunda Rahma Yeni**

Untuk sosok wanita kuat, yang selalu sabar dalam mengiringi setiap langkah anak-anaknya. Terima kasih, bu.

#### **Teruntuk kedua adik saya, Ahmad Fediansyah dan M. Al Fahri Ikhsan**

Terima kasih karena telah selalu menjadi akar yang menguatkan, memberi semangat, dan cinta yang tak kenal jeda, membuat saya merasa bahwa tidak pernah sendiri.

#### **Untuk diri saya sendiri,**

yang terus berusaha, bertahan, dan tak menyerah menghadapi berbagai tantangan. Semoga karya ini menjadi awal dari langkah-langkah berikutnya yang lebih bermakna. Terima kasih telah bertahan sampai titik ini.

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



## TRACE MATRIKS QUATERNION BENTUK KHUSUS ORDO $2 \times 2$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

**RISKA FITRIANIS**  
**12050425900**

Tanggal Sidang : 10 Januari 2025  
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau  
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

### ABSTRAK

*Quaternion* merupakan pengembangan dari bilangan kompleks yang bersifat tidak komutatif pada perkalian bilangannya. Matriks *quaternion* adalah matriks dengan entri-entri berupa bilangan *quaternion*. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum *trace* dari matriks *quaternion* yang berpangkat bilangan bulat positif. Prosesnya diawali dengan menghitung perpangkatan matriks mulai dari pangkat dua hingga delapan belas. Berdasarkan hasil tersebut, akan dirumuskan dugaan bentuk umum perpangkatan matriks *quaternion* yang kemudian dibuktikan menggunakan metode induksi matematika. Selanjutnya, bentuk umum *trace* matriks *quaternion* berpangkat tersebut diperoleh berdasarkan definisi *trace* matriks. Sebagai pelengkap, diberikan pula contoh soal untuk kedua bentuk umum tersebut.

**Kata kunci:** bilangan kompleks, induksi matematika, matriks *quaternion*, *quaternion*, *trace* matriks.

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**  
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

UIN SUSKA RIAU



# TRACE MATRIKS QUATERNION SPECIAL FORM OF ORDER $2 \times 2$ WITH POSITIVE INTEGER POWERS

**RISKA FITRIANIS**  
**12050425900**

*Date of Final Exam* : 10 January 2025  
*Date of Graduation* :

*Department of Mathematics*  
*Faculty of Science and Technology*  
*State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau*  
*Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru-Indonesia*

## ABSTRACT

*Quaternions are an extension of complex numbers that are non-commutative and are commonly applied in three-dimensional mechanics. A quaternion matrix is a matrix whose entries are quaternion numbers. This research aims to determine the general form of the trace of a quaternion matrix raised to positive integer powers. The process begins with calculating the powers of the matrix from two to eighteen. Based on these results, a conjecture for the general form of a specific quaternion matrix raised to integer powers will be formulated and subsequently proven using the method of mathematical induction. Furthermore, the general form of the trace of the powered quaternion matrix will be derived using the definition of matrix trace. Finally, examples are provided to illustrate both general forms.*

**Keywords:** *complex numbers, mathematical induction, matrix trace, quaternion, quaternion matrix.*

UIN SUSKA RIAU

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh*

*Alhamdulillahirobbil'alamin...*Segala puji dan syukur saya panjatkan ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya serta shalawat dan salam yang senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW sehingga penyusunan tugas akhir yang berjudul, "**Trace Matriks Quaternion Bentuk Khusus Ordo  $2 \times 2$  Berpangkat Bilangan Bulat Positif**" dapat terselesaikan dengan baik. Karya ini menjadi salah satu pencapaian penting dalam perjalanan akademik penulis, sekaligus tantangan yang penuh dengan pelajaran berharga.

Proses penyusunan tugas akhir ini merupakan perjalanan yang sarat dengan pembelajaran, eksplorasi, dan ketekunan. Penelitian ini telah memperdalam pemahaman penulis tentang matriks quaternion beserta sifat-sifat uniknya, sekaligus memperkuat kemampuan penulis dalam analisis matematis dan teknik pembuktian. Penulis berharap karya ini dapat memberikan kontribusi bagi pengembangan ilmu matematika serta menjadi inspirasi untuk penelitian lebih lanjut di bidang ini.

Dengan penuh rasa syukur, penulis menyampaikan terima kasih yang mendalam kepada semua pihak yang telah mendukung penulis sepanjang perjalanan ini. Oleh karena itu, dengan hati tulus ikhlas penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada:

Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Ibu Rahmadeni, M.Si. selaku penasehat akademik yang selalu memberi solusi dalam permasalahan akademik selama proses perkuliahan.

Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku pembimbing TA yang selalu bersedia mendampingi, membimbing, dan memberi arahan sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si. selaku penguji I yang telah meluangkan waktu untuk menguji dan memberikan masukan demi perbaikan penulisan Tugas Akhir ini.

Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat. selaku penguji II yang juga telah meluangkan waktunya untuk menguji dan memberikan masukan demi perbaikan penulisan Tugas Akhir ini.

9. Bapak Zukrianto, M.Si selaku koordinator Tugas Akhir yang telah membantu dalam memperlancar jalannya penyelesaian Tugas Akhir ini.

10. Seluruh dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

11. Teruntuk teman-teman seperjuangan yang berperan penting selama proses perkuliahan.

12. Kepada ibunda Rahma Yeni yang selalu memberikan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Kepada Ahmad Ferdiansyah dan M. Al Fahri Ikhsan yang selalu memberikan semangat sehingga Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik.

Kepada Rosa, Riri dan Risa yang menjadi penghibur di saat Penulis melakukan penyusunan Tugas Akhir ini.

Kepada diri saya sendiri, Terima kasih sudah mau berjuang sampai dititik ini, terima kasih karena tidak menyerah ditengah perjalanan ini.

Semua pihak yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu, yang telah memberikan kontribusi dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Tugas Akhir ini telah disusun dengan sebaik-baiknya oleh penulis. Meski demikian, masih ada kemungkinan terjadinya kesalahan atau kekurangan dalam penulisan maupun penyajian materi. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak untuk kesempurnaan Tugas Akhir ini.

*Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh*

Pekanbaru, 10 Januari 2025

**RISKA FITRIANIS**  
**12050425900**

UIN SUSKA RIAU

## DAFTAR ISI

<b>LEMBAR PERSETUJUAN</b> .....	ii
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL</b> .....	iv
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b> .....	v
<b>LEMBAR PERSEMBAHAN</b> .....	vi
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	viii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	ix
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Rumusan Masalah .....	3
1.3. Batasan Penelitian .....	3
1.5. Manfaat Penelitian .....	4
1.6. Sistematika Penelitian .....	4
<b>BAB II LANDASAN TEORI</b> .....	6
2.1 Matriks <i>Quaternion</i> .....	6
2.2 Perkalian Matriks. ....	8
2.2.1 Perkalian matriks dengan skalar .....	8
2.2.2 Perkalian matriks dengan matriks. ....	8
2.3 Perpangkatan Matriks.....	9
2.4 Induksi Matematika .....	10
2.5 <i>Trace</i> Matriks .....	12
2.6 <i>Trace</i> Matriks Berpangkat.....	15
<b>BAB III METODE PENELITIAN</b> .....	19
<b>BAB IV PEMBAHASAN</b> .....	20
4.1 Perpangkatan Matriks <i>Quaternion</i> Bentuk Khusus Ordo $2 \times 2$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif untuk Kasus I.....	20

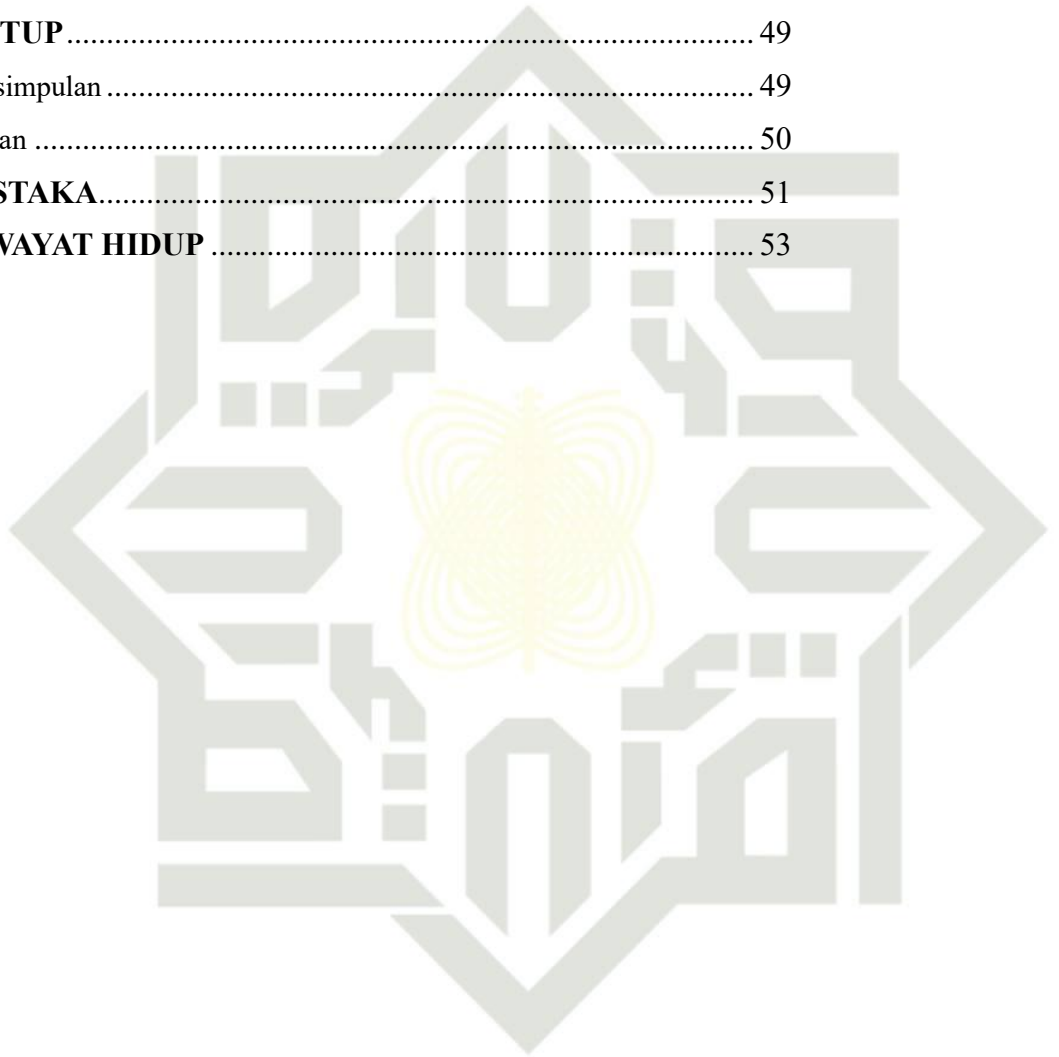
- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
    - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
    - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
  2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



4.2	Perpangkatan Matriks <i>Quaternion</i> Bentuk Khusus Ordo $2 \times 2$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif untuk Kasus II. ....	38
4.3	<i>Trace</i> Matriks <i>Quaternion</i> Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif untuk Kasus I dan Kasus II .....	43
4.4	Aplikasikan Bentuk umum $tr(A_2)^n$ dan $tr(Q_2)^n$ ke dalam Bentuk Soal .....	45
<b>BAB V PENUTUP</b> .....		49
5.1	Kesimpulan .....	49
5.2	Saran .....	50
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....		51
<b>DAFTAR RIWAYAT HIDUP</b> .....		53

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



UIN SUSKA RIAU



# BAB I PENDAHULUAN

## Latar Belakang

Misalkan  $A = [a_{ij}]$  didefinisikan sebagai sebuah matriks bujursangkar, maka *trace* dari matriks  $A$  didefinisikan sebagai jumlah dari elemen-elemen yang berada pada diagonal utama matriks tersebut dan dilambangkan dengan  $tr(A)$  [1]. Selain itu, *trace* dari perpangkatan matriks  $A$ , juga dapat dihitung dengan cara yang serupa. Dalam hal ini, *trace* dari matriks berpangkat  $A^n$ , dilambangkan dengan  $tr(A^n)$ . Sehingga  $tr(A^n)$  merupakan jumlah elemen-elemen pada diagonal utama dari  $A^n$ . Untuk mendapatkan nilai *trace* dari matriks berpangkat, matriks tersebut harus dipangkatkan sesuai dengan pangkat yang diinginkan. Setelah perpangkatan matriks terbentuk, definisi *trace* matriks dapat digunakan untuk memperoleh nilai dari *trace* matriks berpangkat.

Pembahasan mengenai *trace* matriks berpangkat telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya, seperti yang diuraikan dalam penelitian [2]. Dalam studi

tersebut, matriks yang dibahas yaitu  $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$  dengan  $A \in \mathbb{R}$ . Hasil akhir

yang diperoleh yaitu  $tr(A_3^n) = \begin{cases} 0 & , n \text{ ganjil} \\ 2^{\frac{n}{2}+1} a^n & , n \text{ genap} \end{cases}$ . Penelitian tentang *trace*

matriks berpangkat juga dibahas oleh [3], penelitian ini membahas tentang *trace*

matriks simetris berbentuk khusus orde 3 berpangkat bilangan bulat. Hasil akhir

dari penelitian [3] yaitu  $tr(A_3^n) 3 \left( \frac{(2^n - (-1)^{n+12})}{3} b^n \right)$  untuk pangkat bilangan bulat positif dan  $tr(A_3^{-n}) 3 \left( \frac{(-1)^{n2^{n+1}+1}}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} \right)$  untuk pangkat bilangan bulat negatif.

Tahun 2021 penelitian tentang *trace* matriks dibahas oleh [4], pada penelitian tersebut membahas tentang *trace* matriks toeplitz 2-tridiagonal  $3 \times 3$  berpangkat bilangan bulat positif dengan perolehan bentuk umum yaitu

$$tr(A^n) \begin{cases} a^n + 2 \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i, & n \text{ ganjil}, n > 0, n \in \mathbb{Z} \\ a^n + 2 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i, & n \text{ genap}, n \geq 0, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang  
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:  
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.  
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Pembahasan mengenai *trace* matriks berpangkat terus berkembang hingga tahun 2024, salah satunya dilakukan oleh [5] yaitu membahas tentang *trace* matriks  $FLDcirc_r$  bentuk khusus berpangkat dua dengan bentuk umum matriksnya yaitu:

$$\begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

sehingga menghasilkan bentuk umum *trace*

matriks  $FLDcirc_r$  ordo  $n \times n$  yaitu  $tr(A_n)^2 = nx^2$ . Tahun yang sama dibahas oleh [6] mengenai *trace* matriks *centrosymmetric* berbentuk khusus  $n \times n$  berpangkat bilangan bulat positif. Dari penelitian tersebut menghasilkan  $tr(A_n^m) = a^m [2^m + (n - 2)]$ .

Berdasarkan pemaparan dari penelitian-penelitian terdahulu yang membahas mengenai *trace* matriks, dapat dilihat bahwa penelitian-penelitian tersebut menggunakan matriks dengan entri-entri bilangan real. Sehingga pada Tugas Akhir ini akan dilakukan studi kasus mengenai *trace* matriks menggunakan matriks *quaternion*.

Penelitian mengenai Matriks *quaternion* telah diteliti oleh [7]. Pada penelitian tersebut membahas tentang nilai eigen dari matriks *quaternion*. *Quaternion* itu sendiri merupakan perluasan dari bilangan kompleks yang tidak komutatif, digunakan dalam mekanika tiga dimensi. Dalam himpunan *quaternion* yang dilambangkan dengan  $\mathbb{H}$ , terdapat tiga jenis operasi: penjumlahan, perkalian skalar dan perkalian *quaternion*. Elemen-elemen *quaternion* terdiri dari komponen  $1, i, j$  dan  $k$  ( $1, i, j$  dan  $k$  adalah komponen imajiner) dan dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier :  $a + bi + cj + dk$  di mana  $a, b, c,$  dan  $d$  adalah bilangan riil. Persamaan lainnya adalah  $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j,$  dan  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ . Teori dasar mengenai matriks *quaternion* diperkenalkan oleh Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), seorang ahli aljabar, astronomi, dan fisika asal Irlandia, pada tahun 1843. Bilangan *quaternion* telah banyak diterapkan dalam berbagai bidang, termasuk grafik komputer, *computer vision*, robotika, teori



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

kontrol, pemrosesan sinyal, fisika, bioinformatika, dinamika molekuler, dan mekanika [8]. Sehingga pada Tugas Akhir ini akan dilakukan penelitian mengenai *trace* matriks pada enteri-entri bilangan *quaternion* dengan judul yaitu "**Trace Matriks Quaternion Bentuk Khusus Ordo  $2 \times 2$  Berpangkat Bilangan Bulat Positif.**"

**1.2. Rumusan Masalah**

Berdasarkan pemaparan latar belakang di atas, adapun rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian Tugas Akhir ini yaitu:

Bagaimana bentuk umum dari perpangkatan matriks *quaternion* bentuk khusus ordo  $2 \times 2$  berpangkat bilangan bulat positif?

Bagaimana bentuk umum dari *trace* matriks *quaternion* bentuk khusus ordo  $2 \times 2$  berpangkat bilangan bulat positif?

**1.3. Batasan Penelitian**

Batasan masalah pada Tugas Akhir ini agar memperoleh hasil yang optimal yaitu terfokus pada dua kasus diantaranya:

**Kasus I**

$$A_2 = \begin{bmatrix} a + ai + aj + ak & a + ai + aj + ak \\ a + ai + aj + ak & a + ai + aj + ak \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

**Kasus II**

$$A_2 = \begin{bmatrix} a + bi + cj + dk & a + bi + cj + dk \\ a + bi + cj + dk & a + bi + cj + dk \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

**1.4. Tujuan Penelitian**

Tujuan penelitian dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

Memperoleh bentuk umum dari perpangkatan matriks *quaternion* bentuk khusus ordo  $2 \times 2$  berpangkat bilangan bulat positif seperti pada Persamaan (1.1) dan (1.2).

Memperoleh bentuk umum dari *trace* matriks *quaternion* bentuk khusus ordo  $2 \times 2$  berpangkat bilangan bulat positif seperti pada Persamaan (1.1) dan (1.2).

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## 1.5. Manfaat Penelitian

Berikut diberikan beberapa manfaat yang diharapkan dari penelitian Tugas Akhir ini meliputi:

Memperdalam pemahaman terhadap ilmu yang telah dipelajari, khususnya matriks *quaternion*.

Menjadi referensi bagi ide-ide baru terkait pembuatan matriks *quaternion*.

Memberikan informasi serta wawasan yang berharga kepada pembaca dan masyarakat luas.

## 1.6. Sistematika Penelitian

Sistematika penulisan dalam penelitian mengenai *trace* matriks *quaternion* ordo  $2 \times 2$  berpangkat bilangan bulat positif meliputi:

### BAB I PENDAHULUAN

Bab I memberikan gambaran umum mengenai penelitian tugas akhir, mencakup penelitian-penelitian terdahulu terkait *trace* matriks, perumusan masalah, batasan permasalahan yang digunakan, tujuan penelitian, manfaat penelitian, serta penjelasan mengenai sistematika penulisan yang digunakan untuk mewujudkan penelitian tugas akhir ini.

### BAB II LANDASAN TEORI

Bab II menjelaskan landasan teori yang digunakan dalam penelitian ini, termasuk perkalian antar matriks, serta pembuktian aturan induksi matematika yang diaplikasikan dalam penelitian ini.

### BAB III METODE PENELITIAN

Bab III berisi tentang tahapan-tahapan penelitian yang dilakukan oleh peneliti untuk memperoleh rumus umum *trace* matriks *quaternion* pangkat bilangan bulat positif.

### BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini memaparkan langkah-langkah sistematis yang diambil oleh penulis untuk mencapai dan memperoleh hasil yang relevan dengan permasalahan yang telah dirumuskan sebelumnya. Setiap tahapan yang dijalankan dijelaskan secara rinci untuk memastikan bahwa proses



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

penelitian ini mendukung pencapaian tujuan dan menjawab rumusan masalah yang telah ditetapkan.

**BAB V PENUTUP**

Bab ini memuat kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian yang telah dilakukan oleh penulis, serta saran-saran yang dapat digunakan untuk pengembangan lebih lanjut. Kesimpulan dirumuskan berdasarkan temuan yang telah dianalisis, sementara saran disampaikan untuk memberikan kontribusi terhadap penelitian selanjutnya atau aplikasi di bidang terkait.



UIN SUSKA RIAU



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k.$$

b. Operasi terhadap perkalian.

$$\begin{aligned} ab &= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k)(b_0 + b_1i + b_2j + b_3k) \\ &= a_0(b_0 + b_1i + b_2j + b_3k) + a_1i(b_0 + b_1i + b_2j + b_3k) + \\ &\quad a_2j(b_0 + b_1i + b_2j + b_3k) + a_3k(b_0 + b_1i + b_2j + b_3k) \\ &= (a_0b_0 + a_0b_1i + a_0b_2j + a_0b_3k) + (a_1b_0i + a_1b_1i^2 + a_1b_2ij + \\ &\quad a_1b_3ik) + (a_2b_0j + a_2b_1ji + a_2b_2j^2 + a_2b_3jk) + (a_3b_0k + \\ &\quad a_3b_1ki + a_3b_2kj + a_3b_3k^2). \\ &= a_0b_0 + a_0b_1i + a_0b_2j + a_0b_3k + a_1b_0i - a_1b_1 + a_1b_2k - \\ &\quad a_1b_3j + a_2b_0j - a_2b_1k - a_2b_2 + a_2b_3i + a_3b_0k + a_3b_1j - \\ &\quad a_3b_2i - a_3b_3. \\ &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i + \\ &\quad (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)j + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + \\ &\quad a_3b_0)k. \end{aligned}$$

**Contoh 2.2:** Diberikan dua buah *quaternion* sebagai berikut:

$$a = 1 + 2i + j + k$$

$$b = 2 + i + 2j + k$$

**Maka:**

$$\begin{aligned} a + b &= (1 + 2i + j + k) + (2 + i + 2j + k). \\ &= (1 + 2) + (2 + 1)i + (1 + 2)j + (1 + 1)k. \\ &= 3 + (2 + 1)i + (1 + 2)j + (1 + 1)k. \\ &= 3 + 3i + 3j + 2k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= (1 + 2i + j + k)(2 + i + 2j + k). \\ &= 1(2 + i + 2j + k) + 2i(2 + i + 2j + k) + j(2 + i + 2j + k) + \\ &\quad k(2 + i + 2j + k). \\ &= (2 + i + 2j + k) + (4i + 2i^2 + 4ij + 2ik) + (2j + ji + 2j^2 + \\ &\quad jk) + (2k + ki + 2kj + k^2). \\ &= (2 + i + 2j + k) + (4i - 2 + 4k - 2j) + (2j - k - 2 + i) + \\ &\quad (2k + j - 2i - 1). \end{aligned}$$



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 &= (2 - 2 - 2 - 1) + i(1 + 4 + 1 - 2) + j(2 - 2 + 2 + 1) + \\
 &\quad k(1 + 4 - 1 + 2). \\
 &= -3 + 4i + 3j + 6k.
 \end{aligned}$$

**2.2 Perkalian Matriks.**

**2.2.1 Perkalian matriks dengan skalar**

**Definisi 2.2** [9] Jika diberikan matriks  $A = [a_{ij}]$  berukuran  $m \times n$  dan skalar  $k$ , hasil perkalian antara  $k$  dengan matriks  $A$ , yang ditulis sebagai  $kA$  atau  $Ak$ , merupakan matriks berukuran  $m \times n$  yang diperoleh dengan mengalikan setiap elemen dalam  $A$  dengan  $k$ .

$$kA = [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

**Contoh 2.3** Jika diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  dan  $k = 2$  maka perkalian

matriks dengan skalar yaitu:

$$\begin{aligned}
 2A &= 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

**2.2.2 Perkalian matriks dengan matriks.**

**Definisi 2.3** [9] Misalkan matriks  $A = [a_{ij}]$  berukuran  $m \times n$  dan  $B = [b_{jk}]$  berukuran  $r \times p$ . Perkalian matriks  $AB$  hanya dapat didefinisikan jika  $r = n$ , dengan hasil  $AB$  berupa matriks  $C = [c_{jk}]$  yang berukuran  $m \times p$ . Setiap elemen dalam matriks  $C$  diperoleh dengan rumus:

$$c_{jk} = \sum_{m=1}^n a_{jm} b_{mk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \dots + a_{jn}b_{nk}$$

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**Contoh 2.4** Diberikan matriks  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Hitunglah hasil perkalian matriks  $AB$ ?

**Penyelesaian:**

$$\text{Perkalian matriks tersebut ialah: } AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Contoh 2.5** Diberikan dua buah matriks *quaternion* berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 2 - i + j - 2k & 1 - k \\ 2 + i - j & 1 + j + k \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 3 - j & 4 + 2k \\ 1 + i + j + k & 3i - 2j - k \end{bmatrix}$$

Hitunglah hasil perkalian matriks  $AB$ ?

**Penyelesaian:**

Perkalian matriks tersebut yaitu:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 - i + j - 2k & 1 - k \\ 2 + i - j & 1 + j + k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 - j & 4 + 2k \\ 1 + i + j + k & 3i - 2j - k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 + i + 3j - 3k & 11 + 2i - 3j - 7k \\ 5 + 6i - 2j + 2k & 11 + 2i - j + 6k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 2.3 Perpangkatan Matriks

**Definisi 2.4** [10] Jika  $A$  merupakan matriks persegi, maka perpangkatan bilangan bulat non-negatif dari  $A$  dapat di tentukan sebagai berikut:

$$A^0 = I \text{ dan } A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n \text{ faktor}}$$

Jika  $A$  dapat dibalik, maka perpangkatan untuk bilangan bulat negatif dari  $A$  didefinisikan sebagai:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n \text{ faktor}}$$

**Teorema 2.1** [10] Menyatakan bahwa jika  $A$  invers dan  $n$  adalah bilangan bulat non-negatif, maka berlaku hal-hal berikut:

- a)  $A^{-1}$  adalah invers dan  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- b)  $A^n$  adalah invers dan  $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$ .
- c)  $kA$  adalah invers untuk setiap skalar  $k$  yang bukan nol dan  $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ .



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**Teorema 2.2** [11] Menyatakan bahwa jika  $A$  merupakan matriks bujur sangkar dengan  $a$  dan  $b$  bilangan bulat, berlaku:

- a)  $A^a A^b = A^{a+b}$ .
- b)  $(A^a)^b = A^{ab}$ .

**2.4 Induksi Matematika**

**Definisi 2.5** [12] Misalkan  $p(n)$  adalah suatu pernyataan yang melibatkan bilangan bulat positif, dan kita ingin membuktikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk setiap bilangan bulat positif. Pembuktiannya dilakukan melalui dua langkah utama:

- a. Pertama, dibuktikan bahwa  $p(1)$  benar.
- b. Kemudian, diasumsikan bahwa  $p(k)$  benar untuk suatu bilangan asli  $k$ , dan setelah itu dibuktikan pula bahwa  $p(k + 1)$  benar.

Jika kedua langkah ini dapat dipenuhi dengan benar, maka kita dapat menyimpulkan bahwa  $p(n)$  benar untuk setiap bilangan bulat positif  $n$ . Langkah pertama dikenal sebagai basis induksi, sementara langkah kedua disebut sebagai langkah induksi.

**Contoh 2.6** Diberikan matriks segitiga atas  $A_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c \in R$  dengan

$$A_3^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}. \text{ Buktikanlah menggunakan}$$

induksi matematika.

**Bukti:** Pembuktian menggunakan induksi matematika.

Misalkan:

$$p(n): (A_3)^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in Z^+$$

- a. Akan ditunjukkan  $p(1)$  benar, yaitu:

$$p(1): (A_3)^1 = \begin{bmatrix} a^1 & 1a^{1-1}b & 1a^{1-1}c + \frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}b^2 \\ 0 & a^1 & 1a^{1-1}b \\ 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$= \begin{bmatrix} a & 1a^0b & 1a^0c + \frac{1}{2}1(0)a^{-1}b^2 \\ 0 & a & 1a^0b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

b. Asumsikan  $p(k)$  benar, yaitu:

$$p(k): (A_3)^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 \\ 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}, \forall n \in Z^+$$

Akan dibuktikan  $p(k+1)$  juga benar, yaitu:

$$p(k+1): (A_3)^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + \frac{1}{2}(k+1)(k)a^{k-1}b^2 \\ 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$(A_3)^{k+1} = (A_3)^k \cdot (A_3)$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + \frac{1}{2}(k+1)(k)a^{k-1}b^2 \\ 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & a^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^k a + 0 + 0 & a^k b + ka^{k-1}ab + 0 & a^k c + ka^{k-1}b^2 + ka^{k-1}ac + \frac{1}{2}(k)(k-1)a^{k-2}ab^2 \\ 0 & 0 + a^k a + 0 & 0 + a^k b + ka^{k-1}ab \\ 0 & 0 & 0 + 0 + a^k a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & a^k b + ka^k b & a^k c + ka^{k-1}b^2 + ka^k c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-1}b^2 \\ 0 & a^{k+1} & a^k b + ka^k b \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + ka^{k-1}b^2 + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-1}b^2 \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + (a^{k-1}b^2(k + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k)) \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + (a^{k-1}b^2(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k)) \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + \frac{1}{2}(k+1)(k)a^{k-1}b \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}, \text{ terbukti benar.}$$

Karena langkah 1 dan 2 sudah dibuktikan benar, maka induksi matematika terbukti.

**2.5 Trace Matriks**

**Definisi 2.6** [13] Jika  $A$  adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka *trace* dari  $A$ , dilambangkan sebagai  $tr(A)$ , didefinisikan sebagai jumlah semua elemen yang terletak di diagonal utama dari  $A$ . Sebaliknya, jika  $A$  bukan matriks bujur sangkar, maka *trace* tidak terdefinisi.

Misalkan diberikan matriks  $A$  sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

Maka, *trace* dari  $A$  dihitung sebagai:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

**Contoh 2.7:** Diberikan matriks *quaternion* berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & j+k \\ j+k & 2+i \end{bmatrix}$$

Maka *trace* dari  $A$  dapat dihitung sebagai:

$$tr(A) = (2+i) + (2+i)$$

$$= 2(2+i).$$

**Contoh 2.8:** Diberikan matriks *quaternion*  $B$  berikut:

$$\begin{bmatrix} 1+2i+2j+2k & 2+i+j+k \\ 2+i+j+k & 1+2i+2j+2k \end{bmatrix}$$

Maka *trace* dari  $B$  dapat dihitung sebagai berikut:

$$tr(A) = (1+2i+2j+2k) + (1+2i+2j+2k)$$



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$= 2(1 + 2i + 2j + 2k).$$

**Teorema 2.3** [13]: Jika  $A$  dan  $B$  adalah matriks persegi dengan ordo yang sama, dan  $c$  adalah konstanta, maka berlaku sifat-sifat *trace* sebagai berikut:

1.  $tr(A) = tr(A^T)$ .
2.  $tr(cA) = c tr(A)$ .
3.  $tr(A + B) = tr(A) + Tr(B)$ .
4.  $tr(AB) = tr(BA)$ .

**Bukti:**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

- a. Membuktikan bahwa  $tr(A) = tr(A^T)$

Sebelumnya telah diambil sebarang matriks  $A$  pada persamaan di atas maka

$$tr(A^T) = tr \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^T \right)$$

$$tr(A^T) = tr \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^T \right)$$

$$= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

$$= tr(A).$$

- b. Membuktikan bahwa  $tr(cA) = ctr(A)$

Telah diambil sebarang  $A$  pada persamaan di atas dan  $c$  merupakan skalar

$$\text{sehingga } tr(cA) = tr \left( c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right)$$



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 &= \text{tr} \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{1n} & ca_{2n} & \cdots & ca_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= ca_{11} + ca_{22} + \cdots + ca_{nn} \\
 &= c(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) \\
 &= \text{ctr}(A).
 \end{aligned}$$

c. Membuktikan bahwa untuk  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ .

Diambil sebarang matriks  $A$  dan  $B$  pada persamaan di atas maka:

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(A + B) &= \text{tr} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\
 &= \text{tr} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} + b_{1n} & a_{2n} + b_{2n} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \cdots + (b_{nn} + a_{nn}) \\
 &= (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn}) \\
 &= \text{tr}(A) + \text{tr}(B).
 \end{aligned}$$

d. Membuktikan bahwa untuk  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

Diambil sebarang matriks  $A$  dan  $B$  pada persamaan di atas

Maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(AB) &= \text{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\
 &= \text{tr} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) \\
 &= (b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} + \cdots + b_{n1}a_{1n}) + (b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{n2}a_{2n}) + \cdots + (b_{1n}a_{n1} + b_{2n}a_{n2} + b_{nn}a_{nn}) \\
 &= \text{tr}(BA).
 \end{aligned}$$

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**2.6 Trace Matriks Berpangkat.**

Salah satu kajian mengenai *trace* matriks berpangkat juga telah diteliti oleh [14] dengan tujuan untuk memperoleh bentuk umum dari *trace* matriks tersebut. Adapun uraian langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

- a. Diberikan bentuk umum matriks berbentuk khusus  $3 \times 3$  [15].

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{bmatrix}, \forall p, q \in R.$$

- b. Mencari perpangkatan matriks.

$$A^2 = \begin{bmatrix} pq & 0 & pq^2 \\ 0 & 2pq & 0 \\ q^2 & 0 & pq \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2p^2q & 0 \\ 2pq^2 & 0 & 2p^2q \\ 0 & 2pq^2 & pq \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 2pq^2 & 0 & 2p^3q \\ 0 & 4p^2q^2 & 0 \\ 2pq^3 & 0 & 2p^2q^2 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 0 & 4p^3q^2 & 0 \\ 4p^2q^3 & 0 & 4p^3q^2 \\ 0 & 4p^2q^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} 4p^3q^3 & 0 & 4p^4q^2 \\ 0 & 8p^3q^3 & 0 \\ 4p^2q^4 & 0 & 4p^3q^3 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = \begin{bmatrix} 0 & 8p^4q^3 & 0 \\ 8p^3q^4 & 0 & 8p^4q^3 \\ 0 & 8p^3q^4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = \begin{bmatrix} 8p^4q^4 & 0 & 8p^4q^3 \\ 0 & 16p^4q^4 & 0 \\ 8p^3q^5 & 0 & 8p^4q^4 \end{bmatrix}.$$

- c. Melakukan pendugaan bentuk umum dari perpangkatan matriks ( $A_3^n$ ).

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ ganjil.}$$



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n+2}{2}} q^{\frac{n-2}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n-2}{2}} q^{\frac{n+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ genap.}$$

Selanjutnya membuktikan bentuk umum dari pendugaan dari matriks menggunakan induksi matematika berikut:

Matriks  $A$  untuk  $n$  bernilai ganjil akan dibuktikan menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

$$p(n): A^n = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

- 1) Buktikan bahwa  $p(1)$  benar.

$$p(1): A^1 = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

- 2) Buktikan bahwa  $p(i + 1)$  benar.

Karena  $n = 2i + 1$  dengan mengasumsikan bahwa  $p(i)$  benar  $i \in \mathbb{N}$  benar yaitu:

$$p(i + 1): A^{2(i+1)+1} = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Maka

$$p(i + 1): A^{2(i+1)+1} = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+4}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+4}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Dengan menggunakan persamaan (1), maka dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
 A^{2i+1} \cdot A^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} pq & 0 & pq^2 \\ 0 & 2pq & 0 \\ q^2 & 0 & pq \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+4}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+4}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan langkah 1 dan 2 maka perhitungan induksi matematika di atas terbukti bahwa  $p(i + 1)$  benar.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa matriks  $A$  dengan  $n$  bernilai genap.

$$p(i): A^{2i} = \begin{bmatrix} 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i-2}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i-2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \end{bmatrix}$$

- 1) Membuktikan bahwa  $p(2)$  benar.

$$\begin{aligned}
 p(2): A^2 &= \begin{bmatrix} pq & 0 & pq^2 \\ 0 & 2pq & 0 \\ q^2 & 0 & pq \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i-2}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i-2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Buktikan bahwa  $p(i), i \in \mathbb{N}$  juga benar dengan  $n = 2i$ .

$$p(i): A^{2i} = \begin{bmatrix} 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i-2}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i-2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Berikutnya membuktikan bahwa  $p(i + 1)$  juga benar.

$$p(i + 1): A^{2(i+1)} = \begin{bmatrix} 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+4}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} \end{bmatrix}$$

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Menggunakan persamaan (2) maka dapat ditulis:

$$A^{2i}A^2 = \begin{bmatrix} 2^{\frac{2i}{2}}p^{\frac{2i+2}{2}}q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}}p^{\frac{2i+4}{2}}q^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i}{2}}p^{\frac{2i}{2}}q^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i}{2}}p^{\frac{2i}{2}}q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}}p^{\frac{2i+2}{2}}q^{\frac{2i+2}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} pq & 0 & pq^2 \\ 0 & 2pq & 0 \\ q^2 & 0 & pq \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{\frac{2i}{2}}p^{\frac{2i+2}{2}}q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}}p^{\frac{2i+4}{2}}q^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i}{2}}p^{\frac{2i}{2}}q^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i}{2}}p^{\frac{2i}{2}}q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}}p^{\frac{2i+2}{2}}q^{\frac{2i+2}{2}} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan matematika di atas maka terbukti bahwa matriks  $A$  untuk  $n$  bernilai genap juga benar.

- d. Menemukan *trace* matriks berbentuk khusus  $3 \times 3$  berpangkat bilangan bulat positif.

$$\text{Matriks } A_3 = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{bmatrix}, \forall p, q \in R$$

$$\text{Maka } tr(A_3^n) = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } n \text{ ganjil.} \\ 2^{\frac{n+2}{2}}p^{\frac{n}{2}}q^{\frac{n}{2}} & , \text{ untuk } n \text{ genap.} \end{cases}$$

**Pembuktian:** Bentuk umum  $tr(A_3^n)$  untuk  $n$  ganjil yaitu :  $tr(A_3^n) = 0$  sedangkan untuk  $n$  genap maka  $tr(A_3^n) = \left(2^{\frac{n-2}{2}}p^{\frac{n}{2}}q^{\frac{n}{2}}\right) + \left(2^{\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}q^{\frac{n}{2}}\right) + \left(2^{\frac{n-2}{2}}p^{\frac{n}{2}}q^{\frac{n}{2}}\right) = \left(2^{\frac{n+2}{2}}p^{\frac{n}{2}}q^{\frac{n}{2}}\right)$ .

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

### BAB III

## METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah metode penelitian kepustakaan, dan referensi yang digunakan berasal dari jurnal penelitian dan buku-buku yang berkaitan dengan penelitian. Langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan tugas akhir sebagai berikut:

1. Diberikan matriks *Quaternion* bentuk khusus ordo  $2 \times 2$  sesuai dengan Persamaan (1.1) dan (1.2).
2. Menghitung perpangkatan matriks *Quaternion* bentuk khusus ordo  $2 \times 2$  berpangkat 2 sampai 18 untuk Persamaan (1.1) dan pangkat 2 sampai 8 untuk Persamaan (1.2).
3. Menduga bentuk umum dari  $Q_2^n$  dan  $A_2^n$  sesuai pada Persamaan (1.1) dan (1.2).
4. Melakukan pembuktian  $Q_2^n$  dan  $A_2^n$  untuk  $n$  bilangan bulat positif menggunakan induksi matematika.
5. Mendapatkan bentuk umum *trace* matriks *Quaternion*  $tr(Q_2^n)$  dan  $tr(A_2^n)$  menggunakan definisi *trace* matriks.
6. Aplikasikan bentuk umum  $tr(Q_2^n)$  dan  $tr(A_2^n)$  dalam bentuk contoh soal.

## BAB V PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Dapat diperhatikan dari hasil penelitian pada bab sebelumnya bahwa bentuk umum perpangkatan matriks *quaternion* dengan pangkat bilangan bulat positif adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \text{a. } Q_2^n &= \begin{cases} \begin{bmatrix} (-1)^{n+1}4^{n-1}(a^n + a^ni + a^nj + a^nk) & (-1)^{n+1}4^{n-1}(a^n + a^ni + a^nj + a^nk) \\ (-1)^{n+1}4^{n-1}(a^n + a^ni + a^nj + a^nk) & (-1)^{n+1}4^{n-1}(a^n + a^ni + a^nj + a^nk) \end{bmatrix}, & \text{untuk } n = 1,4,7,10 \dots \\ \begin{bmatrix} (-1)^{n+1}4^{n-1}(a^n - a^ni - a^nj - a^nk) & (-1)^{n+1}4^{n-1}(a^n - a^ni - a^nj - a^nk) \\ (-1)^{n+1}4^{n-1}(a^n - a^ni - a^nj - a^nk) & (-1)^{n+1}4^{n-1}(a^n - a^ni - a^nj - a^nk) \end{bmatrix}, & \text{untuk } n = 2,5,8,11, \dots \text{ dan} \\ \begin{bmatrix} (-1)^n2^{2n-1}a^n & (-1)^n2^{2n-1}a^n \\ (-1)^n2^{2n-1}a^n & (-1)^n2^{2n-1}a^n \end{bmatrix}, & \text{untuk } n = 3,6,9,12,15,18, \dots \end{cases} \\
 \text{b. } Q_2^n &= \begin{bmatrix} 2^{n-1}(a + bi + cj + dk)^n & 2^{n-1}(a + bi + cj + dk)^n \\ 2^{n-1}(a + bi + cj + dk)^n & 2^{n-1}(a + bi + cj + dk)^n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Kemudian bentuk umum dari *trace* matriks *quaternion* bentuk khusus ordo  $2 \times 2$  berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

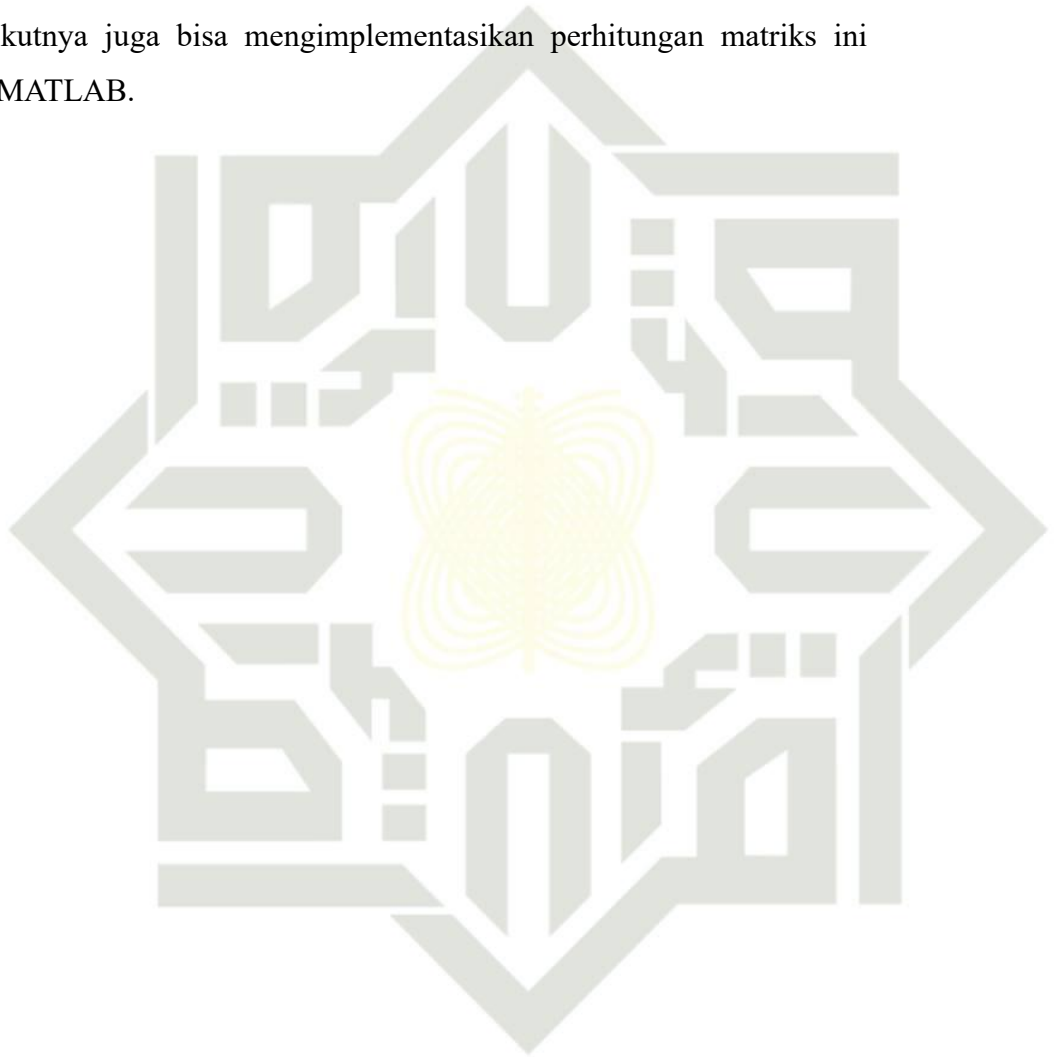
$$\begin{aligned}
 \text{a. } \text{tr}A_2^n &= \begin{cases} 2[(-1)^{n+1}4^{n-1}(a^n + a^ni + a^nj + a^nk)], & \text{untuk } n = 1,4,7,10 \dots \\ 2[(-1)^{n+1}4^{n-1}(a^n - a^ni - a^nj - a^nk)], & \text{untuk } n = 2,5,8,11, \dots \text{ dan} \\ 2[(-1)^n2^{2n-1}a^n], & \text{untuk } n = 3,6,9,12, \dots \end{cases} \\
 \text{b. } \text{tr}(Q_2^n) &= 2[2^{n-1}(a + bi + cj + dk)^n]
 \end{aligned}$$

### Saran

Penelitian ini membahas langkah-langkah untuk menentukan bentuk umum dari *trace* matriks *quaternion* berordo  $2 \times 2$  dengan pangkat bilangan bulat positif. Penelitian lanjutan yang ingin memperluas atau mendalami topik serupa dapat mempertimbangkan penggunaan matriks dengan ordo yang lebih besar. Selain itu, penelitian berikutnya juga bisa mengimplementasikan perhitungan matriks ini menggunakan MATLAB.

#### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

## DAFTAR PUSTAKA

- C. C. Marzuki, F. Aryani, and R. Rahmawati, "Trace Matriks  $n \times n$  Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 7, no. 1, p. 28, 2021, doi: 10.24014/jsms.v7i1.11561.
- Rahmawati, N. A. Putri, F. Aryani, and A. N. Rahma, "Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo  $3 \times 3$  Berpangkat Bilangan Bulat Positif," vol. 5, no. 2, pp. 61–70, 2019.
- F. Aryani, F. B. Cenia, and Y. Muda, "Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus Orde 3," no. November, pp. 300–310, 2021.
- I. R. Ollie and L. Yahya, "Trace Matriks Toeplitz 2 -Tridiagonal  $3 \times 3$  Berpangkat Bilangan Bulat Positif," vol. 15, no. 3, pp. 441–452, 2021.
- A. N. Rahma *et al.*, "Trace matriks fldcirc," vol. 5, no. 1, pp. 538–546, 2024.
- [6] Q. Amri, "Trace Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo  $n \times n$  Berpangkat Bilangan Bulat Positif," 2024.
- [7] S. Ekawati, A. K. Amir, and M. Bahri, "Nilai Eigen Matriks Quaternion," vol. 16, no. 1, pp. 33–39, 2019, doi: 10.20956/jmsk.v16i1.5943.
- [8] T. Susilawati, A. K. Amir, J. Matematika, and U. Hasanuddin, "Sifat Dan Karakteristik Nilai Eigen Sisi Kanan Atas Matriks Quaternion," vol. 2, no. 3, 2017.
- [9] N. L. Azizah and N. Ariyanti, *Buku Ajar Mata Kuliah Dasar-Dasar Aljabar Linear*. 2020.
- [10] H. Anton dan C. Rorres, *Elementary Linear Algebra*, 11th edisi. 2013.
- [11] F. Aryani and Yulianis, "Trace Matriks Berbentuk Khusus  $2 \times 2$  Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 4, no. 2, pp. 105–113, 2018.
- [12] R. Handayani and Yulina, *Teori Bilangan*, vol. 3, no. April. 2020.
- [13] K. Susilowati, "Trace Matriks Segitiga  $4 \times 4$  Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," pp. 651–661, 2020, [Online]. Available: <http://repository.uin-suska.ac.id/28760/>
- [14] F. Aryani, C. Anam, and C. C. Marzuki, "Trace Matriks Kompleks Berbentuk Khusus  $3 \times 3$  Berpangkat Bilangan Bulat," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 1, p. 122, 2020, doi: 10.24014/jsms.v6i1.10497.



D. C. Ramadhani, M. Kiftiah, and F. Fran, “Penentuan Trace dari Matriks Khusus Ordo  $3 \times 3$  Berpangkat Bilangan Bulat,” *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 12, no. 4, pp. 359–368, 2023.



UIN SUSKA RIAU

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan di Penyasawan pada tanggal 27 Mei 2002, sebagai anak perempuan pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Mohd. Yanis Abdullah dan Ibu Rahma yeni. Perjalanan pendidikan penulis dimulai dari SDN 009 Sendayan dan selesai pada tahun 2013, dilanjutkan ke SMPN 01 Kampar hingga selesai pada tahun 2016, dan kemudian menyelesaikan pendidikan di SMAN 01 Kampar pada tahun 2019. Pada tahun 2020 penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang yang lebih tinggi yaitu di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dalam program studi S1 Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi.

Penulis mengambil mata kuliah Tugas Akhir di semester IX pada tahun 2024 dengan judul "**Trace Matriks Quaternion Bentuk Khusus Ordo  $2 \times 2$  Berpangkat Bilangan Bulat Positif**" dibawah bimbingan Ibu Fitri Aryani, M.Sc. Penulis melaksanakan Seminar Proposal pada tanggal 05 November 2024 yang diuji oleh Ibu Corry Corazon Mrzuki, M.Si. dan Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat.

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.