© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

University of Sultan Syarif Kasim Riau

TRACE DAN DETERMINAN MATRIKS KETETANGGAAN DARI GRAF LINGKARAN BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF PADA ORDO GANJIL

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

Oleh :

TENGKU FAHMIL UMMI
12050421690

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2025

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE DAN DETERMINAN MATRIKS KETETANGGAAN DARI GRAF LINGKARAN BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF PADA ORDO GANJIL

TUGAS AKHIR

oleh:

TENGKU FAHMIL UMMI
12050421690

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan Tugas Akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 21 Januari 2025

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP.19730818 200604 1 003	**NIP.19770913 200604 2 002**

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

© Hak Cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE DAN DETERMINAN MATRIKS KETETANGGAAN DARI GRAF LINGKARAN BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF PADA ORDO GANJIL

TUGAS AKHIR

oleh:

TENGKU FAHMIL UMMI
12050421690

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 14 Januari 2025

Pekanbaru, 22 Januari 2025
Mengesahkan

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Wartono, M.Sc.**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota I	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si**
Anggota II	**: Ade Novia Rahma, S.Pd., M.Mat**

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 14 Januari 2025
Yang membuat pernyataan,

10000 METERAI TEMPEL 86914AMX161176497

27-10

TENGKU FAHMIL UMMI
NIM 12050421690

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim.

Puji serta syukur atas kehadirat Allah SWT. Yang telah memberikan rahmat, nikmat, dan karunia-Nya kepada saya, sehingga saya diberi kekuatan dan sehat wal'afiat serta dibekali dengan ilmu pengetahuan untuk dapat menyelesaikan Tugas Akhir sampai dititik ini. Saya persembahkan karya ini kepada orang-orang yang sangat saya sayangi.

Sebagai tanda hormat, bakti, dan rasa terima kasih yang yang tiada hentinya kepada kedua orang tua saya, Bapak Tengku Syarman Yahya dan Ibu Tengku Syarifah Badariah yang telah memberikan kasih sayang, ridho, dukungan moral, finansial, serta penuh dedikasi untuk memberikan doa dan semangat kepada saya. Semoga apa yang diberikan orang tua saya menjadi amal jariah bagi babah dan mama dihari akhir nanti, semoga babah dan mama sehat selalu dan semoga saya dapat membahagiakan kedua orang tua saya, karena saya sadar selama ini saya belum bisa sepenuhnya membahagiakan babah dan mama. Untuk babah dan mama, terima kasih banyak.

Serta untuk kedua kakak saya, Tengku Rahmi Fitri dan Tengku Rahma Fatmelia dan juga kedua abang saya, Tengku Syed Qhazali Badsya dan Tengku Syed Apriliansyah. Terimakasih telah memberikan doa, motivasi, serta kalimat penyemangat kepada adik bungsu yang kalian sayangi. Terimakasih banyak kakak dan abang sayang.

Selanjutnya kepada dosen pembimbing saya, Ibu Fitri Aryani, M.Sc. yang telah memberikan arahan, petunjuk, serta masukkan dari sejak awal proses proposal hingga bisa menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Serta kepada kedua teman saya, Nabila Ultami Putri dan Amanda Insyira Kidna yang telah mendukung dan menyertai penulis dalam berbagai situasi dan tetap saling menguatkan walaupun dari kejauhan. Terimakasih banyak

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
UIN SUSKA RIAU

TRACE DAN DETERMINAN MATRIKS KETETANGGAAN DARI GRAF LINGKARAN BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF PADA ORDO GANJIL

TENGKU FAHMIL UMMI
NIM: 12050421690

Tanggal Sidang : 14 Januari 2025
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini membahas *trace* dan determinan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo ganjil. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum perpangkatan matriks, *trace* matriks, dan determinan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo ganjil. Penelitian difokuskan pada ordo $3 \times 3, 5 \times 5,$ dan 7×7. Melalui pendekatan analitik menggunakan metode induksi matematika, diperoleh hasil bahwa untuk ordo 3×3, penelitian ini berhasil menemukan bentuk umum perpangkatan matriks, bentuk umum *trace* matriks, serta bentuk umum determinan matriks. Namun, untuk ordo 5×5 dan 7×7, penelitian hanya mampu memperoleh bentuk umum determinan matriks. Diberikan juga beberapa contoh soal aplikasi dari bentuk umum perpangkatan, *trace*, dan determinan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo ganjil.

Kata Kunci: Determinan Matriks, Graf Lingkaran, Matriks Ketetanggaan, Ordo Ganjil, Perpangkatan Matriks, *Trace* Matriks.

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

TRACE AND DETERMINANT OF THE ADJACENCY MATRIX OF POSITIVE INTEGER RANK CIRCULAR GRAPHS OF ODD ORDER

TENGKU FAHMIL UMMI
NIM: 12050421690

Date of Final Exam : 14 January 2025
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

This research discusses the trace and determinant of the adjacency matrix of a circle graph with positive integer rank in odd order. This research aims to determine the general form of matrix expansions, trace matrix, and determinant of the adjacency matrix of a circle graph with positive integer rank at odd orders. The research focused on the orders 3 × 3, 5 × 5, and 7 × 7. Through analytical approach using mathematical induction method, it is found that for order 3×3, this research succeeds in finding the general form of matrix expansions, general form of trace matrix, and general form of matrix determinant. However, for orders 5×5 and 7×7, the research was only able to obtain the general form of matrix determinant. Some examples of application problems of the general form of departure, trace, and determinant of the adjacency matrix of a circle graph with positive integer rank at odd orders are also given.

Keywords: Matrix Determinant, Circle Graph, Neighborhood Matrix, Odd Order, Matrix Departure, Matrix Trace.

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Alhamdulillahirabbil'alamiin. Segala puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT. yang telah memberikan rahmat kesehatan dan keselamatan sehingga penulis dapat diberi kemudahan untuk menyelesaikan proposal berjudul "*Trace* dan Determinan Matriks Ketetanggaan dari Graf Lingkaran Berpangkat Bilangan Bulat Positif pada Ordo Ganjil". Shalawat dan salam juga selalu tercurah kepada Nabi Muhammad SAW, semoga kelak di akhirat seluruh umatnya mendapat *syafa'at* dari beliau dihari akhir kelak.

Penulis menyadari bahwa penyusunan proposal ini tidak terlepas dari dukungan serta bimbingan berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan hati tulus dan ikhlas penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc., selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Pembimbing Akademik yang telah membimbing saya dari awal semester hingga sampai sekarang ini.
6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc., selaku Pembimbing Tugas Akhir saya yang telah memberikan arahan, petunjuk, serta masukkan dari sejak awal proses proposal hingga bisa menyelesaikan Tugas Akhir ini.
7. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi terkhusus Program Studi Matematika.
8. Kepada kedua orang tua, yaitu Bapak Tengku Syarman Yahya dan Ibu Tengku Syarifah Badariah yang tiada hentinya memberikan kasih sayang,

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
UIN SUSKA RIAU

ridho, dukungan moral, dukungan finansial, serta penuh dedikasi untuk memberikan doa dan semangat kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini.

9. Kepada kedua kakak saya, Tengku Rahmi Fitri dan Tengku Rahma Fatmelia dan juga kedua abang saya, Tengku Syed Qhazali Badsya dan Tengku Syed Apriliansyah, yang telah memberikan doa, motivasi, serta kalimat penyemangat kepada penulis.
10. Kepada keponakan saya yang lucu, Said Ammar Muttaqin, Syarifah Ayumna Mahira, Tengku Syarifah Aisyah Hanin, dan Said Ali Muzzammil, yang telah menghibur penulis.
11. Kepada kedua teman saya, Nabila Ultami Putri dan Amanda Insyira Kidna yang telah mendukung dan menyertai penulis dalam berbagai situasi dari semasa bangku SMA hingga sekarang.
12. Kepada kedua teman kuliah saya, Azilla Febryola Utami dan Anggi Wahyuni yang senantiasa menemani penulis selama mengenyam pendidikan dan bersama mengukir kisah suka dan duka pada masa menjadi seorang mahasiswi.
13. Kepada teman KKN saya, Dewinta Amelia yang selalu menghibur dikala sedih dan memberi motivasi untuk bisa mengerjakan tugas akhir ini.
14. Kepada semua yang meskipun tidak mungkin untuk disebutkan satu per satu yang telah membantu dan menasihati penulis secara langsung atau tidak langsung, rasa terima kasih yang tulus disampaikan kepada semua.
15. Kepada seluruh mahasiswa/i matematika Angkatan 2020.
16. Terakhir untuk diri sendiri, Tengku Fahmil Ummi atas segala kerja keras serta semangat dan tidak pernah menyerah dalam mengerjakan tugas akhir ini.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 14 Januari 2025

<u>TENGKU FAHMIL UMMI</u>
NIM 12050421690

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR GAMBAR

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR ISI

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Trace matriks merupakan penjumlahkan elemen-elemen pada diagonal utama pada matriks bujur sangkar, yang dinotasikan dengan $tr(A)$ [1]. Artinya bahwa menentukan *trace* dari suatu mariks cukup sederhana, tetapi bagaimana menentukan *trace* dari matriks berpangkat?. Untuk mendapatkan nilai *trace* dari suatu matriks berpangkat, maka matriks tersebut harus dipangkatkan sebanyak pangkat yang diinginkan. Setelah mendapatkan bentuk perpangkatan matriksnya, maka dengan menggunakan definisi *trace* matriks, diperolehlah *trace* dari matriks berpangkat tersebut [2]. Jika perpangkatan yang diinginkan besar, maka menentukan perpangkatan matriksnya memerlukan waktu yang lama dalam pengerjaannya. Penelitian yang berkaitan dengan *trace* matriks berpangkat diantaranya pada tahun 2018 oleh [3] yang telah membahas mengenai *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif yang memperoleh hasil sebagai berikut:

$$tr(A^{-n}) = \begin{cases} 0, & n\ ganjil \\ \frac{2}{(-1)^{\frac{\pi}{2}}(\det(A))^{\frac{\pi}{2}}}, & n\ genap \end{cases}.$$

Pada tahun 2020 [4] juga telah meneliti *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat $-2, -3, dan\ -4$, berdasarkan penelitian tersebut maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$tr(A_n)^{-2} = \frac{n\left((n-1)+(n-2)^2\right)}{(n-1)^2},\ n \geq 2;$$

$$tr(A_n)^{-3} = \frac{n[-2(n-1)(n-2)-(n-2)^3]}{(n-1)^3},\quad n \geq 2;$$

$$tr(A_n)^{-4} = \frac{n[(n-1)^2 + 3(n-1)(n-2)^2 + (n-2)^4}{(n-1)^4}, n \geq 2\,.$$

Selanjutnya, penelitian yang masih membahas mengenai *trace* matriks berpangkat pada tahun 2020 oleh [5] yang membahas tentang *trace* matriks ketetanggaan berpangkat dua dan negatif dua dari graf roda dan diperoleh *tracenya* sebagai berikut:

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
UIN SUSKA RIAU

$tr(A_n)^2 = 4(n-1),\ n \geq 4;$

$tr(A_n)^{-2} = \frac{\frac{n^4}{4} - n^3 + \frac{5n^2}{4} + \frac{3n}{2} + 2}{n^2 - 2n + 1},\ n \equiv 0 \bmod 4 \cdot$

Masih tentang penelitian *trace* matriks berpangkat pada tahun yang sama oleh [6] yang telah meneliti *trace* matriks ketetanggaan berpangkat empat dan negatif satu dari graf roda. Penelitian tersebut memperoleh hasil *tracenya* dalam bentuk umum $tr(A_n^4)$ yaitu:

$$tr(A_n^4) = 2(n+10)(n-1) \cdot$$

Kemudian pada tahun 2021 juga terdapat penelitian oleh [7] yang membahas tentang *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif dari graf siklus, sehingga diperoleh hasil *tracenya* sebagai berikut:

$tr(A_n^2) = 2n,\ n \geq 6;$

$tr(A_n^3) = 0n,\ n \geq 8;$

$tr(A_n^4) = 6n,\ n \geq 10;$

$tr(A_n^5) = 0n, n \geq 12 \cdot$

Setelah itu pada tahun 2021 oleh [8] juga telah meneliti *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ pada graf roda berpangkat tiga, penelitian tersebut memperoleh *trace* matriks yaitu:

$$tr(A_n^3) = 6(n-1), \qquad n \geq 8 \cdot$$

Selanjutnya, pada tahun 2022 oleh [9] yang membahas tentang perpangkatan dan *trace* matriks segitiga $3\ x\ 3$ berpangkat bilangan bulat, berdasarkan penelitian tersebut diperoleh hasil akhir dari $tr(A_3^n)$ sebagai berikut:

$$tr(A_3^n) = tr(B_3^n) = 3a^n \cdot$$

Dalam suatu matriks terdapat beberapa pembahasan diantaranya *trace* matriks, invers, dan determinan. Pada penelitian ini bukan hanya membahas *trace* matriks tetapi juga membahas determinan matriks. Determinan sangat penting untuk menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak digunakan dalam ilmu matematika dan terapan. Ada banyak metode untuk menghitung nilai determinan matriks ini termasuk Metode Sarrus, Metode Ekspansi Kofaktor, Metode CHIO, Metode Eliminasi Gauss, dan Metode Dekomposisi. Penelitian

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

yang berkaitan dengan determinan matriks yaitu penelitian yang dilakukan oleh [10] pada tahun 2018 yang telah meneliti determinan matriks *toeplitz* bentuk khusus menggunakan ekspansi kofaktor yang mendapatkan hasil akhir yaitu:

$$|A_n| = \begin{cases} 0, & jika\ n \equiv 6\ (mod\ 2)\ atau\ n = 6\ (mod\ 5) \\ 1, & jika\ n \equiv 6\ (mod\ 0)\ atau\ n = 6\ (mod\ 1) \\ -1, & jika\ n \equiv 6\ (mod\ 3)\ atau\ n = 6\ (mod\ 4) \end{cases} \cdot$$

Pada tahun 2019 oleh [11] juga telah meneliti determinan matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus, berdasarkan hasil penelitian tersebut diperoleh bentuk umum berikut:

$$|P_n| = (-1)^{(n^2-3n+4)} r^2 a^n \cdot$$

Masih tentang penelitian determinan matriks pada tahun 2019 oleh [12] yang telah meneliti determinan matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus $n \times n,\ n \geq 3$ menggunakan metode salihu yang memperoleh hasil bentuk umum dari determinan matriks sebagai berikut:

$$|A_n| = (-1)^{n-3} r^{n-1} a^n,\ \ n \geq 3 \cdot$$

Kemudian pada tahun 2023 oleh [13] yang telah meneliti determinan matriks $RFPrLrRcirc_r(a, a, 0, \ldots, 0)$ ordo $n \times n$ $(n \geq 3)$ menggunakan metode salihu yang menghasilkan determinan matriks sebagai berikut:

$$|A_n| = a^n \qquad , n \geq 3 \cdot$$

Berdasarkan beberapa penelitian yang telah dibahas di atas, terdapat berbagai bentuk matriks yang digunakan, salah satunya adalah matriks ketetanggaan. Matriks ketetanggaan merupakan bentuk representasi dari sebuah graf terhubung. Matriks dapat dikatakan bertetangga jika simpulnya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Misalkan matriks dinamakan $A = [a_{ij}]$, jika simpul i dan j bertetangga maka $a_{ij} = 1$, sebaliknya jika simpul i dan j tidak bertetangga maka $a_{ij} = 0$ [14]. Matriks ketetanggaan mempunyai entri-entri yang bernilai nol dan satu. Graf terhubung juga banyak bentuknya, diantaranya graf lengkap, graf bintang, graf domino, graf roda, dan graf lingkaran.

Graf lingkaran (C_n) merupakan graf terhubung yang mempunyai n titik dan n sisi yang setiap titiknya berderajat dua dan suatu lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama [15] dan [16].

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk melakukan kajian yang berjudul "***Trace*** **dan Determinan Matriks Ketetanggaan dari Graf Lingkaran Berpangkat Bilangan Bulat Positif pada Ordo Ganjil**".

1.2 Rumusan Masalah

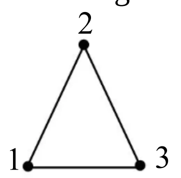
Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan masalah dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo ganjil?
2. Menentukan nilai *trace* dan determinan dari matriks ketetanggaan graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo ganjil?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah maka harus dilakukan batasan masalah agar tidak terjadi pembahasan yang lebih luas dan dapat dicapai dengan baik dan tepat. Permasalahan pada penelitian ini dibatasi oleh ordo matriks yang digunakan hanya ordo ganjil yaitu $3 \times 3, 5 \times 5$, dan 7×7 dari graf lingkaran tak berarah sebagai berikut:

a) Graf lingkaran A_3 yaitu:

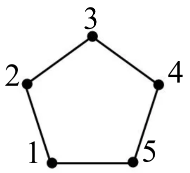


A_3

dan matriks ketetanggaan dari A_3

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

b) Graf ingkaran A_5 yaitu:



A_5

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

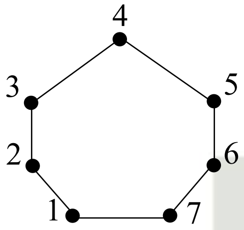
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

dan matriks ketetanggaan dari A_5

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.2)$$

c) Graf lingkaran A_7 yaitu:



A_7

dan matriks ketetanggaan dari A_7

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.3)$$

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian pada tugas akhir ini adalah:

1. Mendapatkan bentuk umum dari perpangkatan matriks ketetanggaan graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo ganjil.
2. Memperoleh nilai *trace* dan determinan dari matriks ketetanggaan graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo ganjil.

1.5 Manfaat Penelitian

Sementara itu, manfaat dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Memperdalam ilmu pengetahuan terkhusus pada bidang matematika murni.
2. Dapat mengembangkan ilmu matematika dalam kajian matriks.

Dalam penelitian ini mengembangkan ilmu matematika dalam kajian matriks ketetanggaan berpangkat bilangan bulat positif dari representasi graf lingkaran berordo ganjil.

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini diuraikan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab pendahuluan berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini berisi tentang teori-teori pendukung untuk diterapkan dalam mengerjakan perhitungan *trace* dan determinan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo ganjil. Teori tersebut mencakup tentang *trace* matriks berpangkat, determinan matriks, matriks ketetanggaan, perkalian matriks, graf, notasi sigma, dan penerapan induksi matematika.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini berisi langkah-langkah dalam menentukan bentuk umum perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo ganjil.

BAB IV PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi pembahasan mengenai *trace* dan determinan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo ganjil.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini berisi kesimpulan dari seluruh pembahasan pada Bab IV serta saran bagi para pembaca.

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

BAB II
LANDASAN TEORI

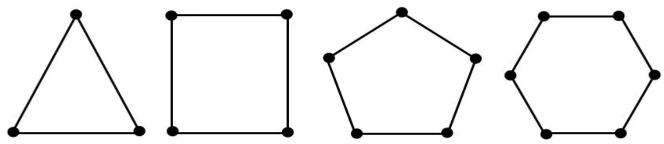
Bab ini membahas tentang teori-teori pendukung yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya.

2.1 Graf

Definisi 2.1 [17] Graf merupakan struktur diskrit yang terdiri dari adanya simpul (vertex) dan adanya sebuah sisi (edge), graf adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V merupakan sebuah himpunan yang tidak kosong dari sebuah vertex dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul dalam graph tersebut.

Definisi 2.2 [18] Graf Lingkaran adalah graf terhubung sederhana yang memiliki n simpul dan n sisi dengan setiap simpulnya berderajat dua. Graf Lingkaran dinotasikan dengan C_n dengan $n \geq 3$.

Contoh 2.1 Berikut ini disajikan gambar graf lingkaran.



Gambar 2. 1 Graf lingkaran C_3, C_4, C_5, dan C_6

2.2 Matriks Ketetanggaan

Definisi 2.3 [19] Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dimana $|V| = n$. Misalkan simpul dari G terdaftar sebagai $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Matriks ketetanggaan A (atau A_G) dari G adalah matriks yang berukuran $n \times n$ nol-satu, dengan 1 sebagai entri (i, j) ketika v_i dan v_j bertetangga dan 0 sebagai entri (i, j) ketika v_i dan v_j tidak bertetangga. Dengan kata lain, jika matriks ketetanggaan $A = [a_{ij}]$, maka:

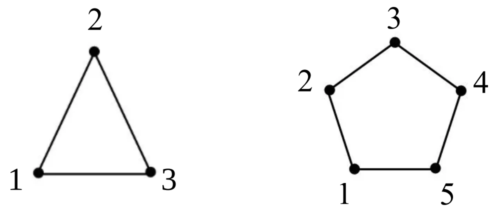
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \ , jika \ \{v_i, v_j\} \ bertetangga \ di \ G \\ 0 \ , \quad lainnya \end{cases} \tag{2.1}$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Contoh 2.2 Misalkan terdapat graf lingkaran sebagai berikut:



maka dengan menggunakan Persamaan (2.1) dapat dilihat bahwa matriks ketetanggaan diperoleh adalah:

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Perkalian Matriks

Pada bagian ini akan dibahas mengenai perkalian matriks dengan skalar, perkalian matriks dengan matriks dan perpangkatan matriks.

2.3.1 Perkalian Matriks dengan Skalar

Definisi 2.4 [20] Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times n$ dengan c adalah skalar, maka perkalian skalar dari A dengan c adalah matriks $m \times n$ yang didefinisikan dengan:

$$cA = [ca_{ij}] = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ a_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Dengan kata lain, $cA = [ca_{ij}]$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap entri dari A dengan c.

Contoh 2.3

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } c = 4$$

Maka perkalian untuk cA adalah:

$$cA = 4 \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 20 & 12 & 4 \\ 4 & 12 & 20 & 16 \\ 16 & 20 & 12 & 4 \\ 4 & 12 & 20 & 16 \end{bmatrix}$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.3.2 Perkalian Matriks dengan Matriks

Definisi 2.5 [20] Jika A adalah matriks berukuran $m \times r$ dan B adalah matriks berukuran $r \times n$ maka hasil kali AB adalah matriks berukuran $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut: untuk menemukan entri-entri pada baris i dan kolom j dari B, keluarkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri dari baris dan kolom yang bersesuaian secara bersamaan kemudian jumlahkan hasil kalinya.

Contoh 2.4

Diketahui matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

maka perkalian untuk AB adalah:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (4) + (12) + (5) & (12) + (18) + (0) \\ (5) + (8) + (30) & (15) + (12) + (0) \\ (0) + (28) + (40) & (0) + (42) + (0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 30 \\ 43 & 27 \\ 68 & 42 \end{bmatrix}$$

2.4 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.6 [21] Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif sebagai berikut:

$$A^0 = 1, \qquad A^n = \underbrace{AAA \ldots A}_{n\,faktor} \ (n > 0) \tag{2.3}$$

Dimana, jika A dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n\,faktor} \tag{2.4}$$

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Contoh 2.5

Misalkan A adalah matriks berukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

maka,

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83 & 70 & 68 \\ 72 & 61 & 60 \\ 128 & 108 & 105 \end{bmatrix}$$

2.5 Determinan Matriks

Definisi 2.7 [20] Misalkan adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan atau | | yang didefinisikan sebagai jumlah dari hasil kali elementer (bertanda) dari entri-entri sehingga disebut determinan.

Contoh 2.6

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, maka diperoleh determinan dari A adalah:

Penyelesaian:

$$|A| = \begin{array}{|ccc|cc} & & - & - & - \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ & & + & + & + \end{array} = (6 + 24 + 0) - (0 + 27 + 4) = -1$$

Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menentukan determinan suatu matriks. Salah satunya adalah metode ekspansi kofaktor. Pada tugas akhir ini, metode yang digunakan dalam menentukan determinan adalah metode ekspansi kofaktor.

2.5.1 Metode Ekspansi Kofaktor

Definisi 2.8 [1] Apabila A sebuah matriks bujur sangkar, maka entri yang lebih kecil (minor) a_{ij} dilambangkan dengan M_{ij} dan disebut determinan pada submatriks yang tertinggal sesudah barisan ke-i serta kolom ke-j dihilangkan dari matriks A. Serta bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ disebut dengan C_{ij} dan dikatakan dengan kofaktor pada entri a_{ij}.

Contoh 2.7

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

UIN SUSKA RIAU

minor dari a_{11} adalah

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -17$$

kofaktor dari entri a_{11} adalah:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = -17$$

Teorema 2.1 [1] Determinan matriks A dengan ordo $n \times n$, diperoleh dengan cara mengalikan entri setiap baris atau kolom menggunakan kofaktor lalu menghitung hasilnya; dimana $\forall\ 1 \leq i \leq n\ dan\ 1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}. \qquad (2.5)$$

dan

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}. \qquad (2.6)$$

Contoh 2.8

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Tentukan $|A|$ dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama.

Penyelesaian:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$$

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = -17$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$$

$$c_{12} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 1$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$$

$$c_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = 13$$

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= 1(-17) + 2(1) + 0(13) = -15$$

Jadi, $|A| = -15$

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

2.6 *Trace* Matriks

Definisi 2.9 [21] Jika matriks persegi, maka *trace* yang didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama. *Trace* tidak terdefinisi jika bukan matriks persegi. Misalkan A adalah matriks persegi (matriks berukuran $n \times n$), maka *trace* dari matriks A atau $tr(A)$. Dinyatakan bahwa *trace* matriks A adalah:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii}) \tag{2.7}$$

Contoh 2.8

Jika terdapat $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

maka

$$tr(A) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

2.7 *Trace* Matriks Berpangkat

Trace matriks berpangkat merupakan jumlah dari elemen-elemen diagonal utama pada sebuah matriks setelah matriks tersebut dipangkatkan. Misalkan A adalah matriks persegi (matriks berukuran $n \times n$), maka *trace* dari matriks A pangkat n, atau $tr(A^n)$.

Contoh 2.9

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, maka hitunglah $tr(A^2)$.

Penyelesaian:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

maka

$$tr(A^2) = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

2.8 Induksi Matematika

Defenisi 2.10 [22] Induksi Matematika merupakan sebuah argumen deduktif dalam pembuktian pernyataan benar atau salah dalam suatu himpunan bilangan bulat terkhusus bilangan asli. Prinsip induksi sederhana:

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Misalkan $p(n)$ proposisi untuk bilangan bulat positif, akan dibuktikan bahwa $p(n)$ benar bagi setiap bilangan bulat positif n .

Untuk pembuktiannya, ditunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar, (2.8)
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga bernilai benar $\forall\, n \geq 1$.

Oleh karenanya $p(n)$ benar bagi setiap bilangan bulat postif n.

Langkah 1 disebut sebagai basis induksi, untuk langkah ke-2 disebut dengan langkah induksi. Pada langkah kedua melibatkan asumsi (dugaan) bahwa $p(n)$ benar. Asumsi ini disebut hipotesis induksi. Apabila langkah di atas benar, dengan itu $p(n)$ benar bagi setiap bilangan bulat positif n [22]. Contoh yang akan dibuktikan berikut merupakan hasil penelitian [3] yang akan dibuktikan menggunakan induksi matematika.

Contoh 2.10

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}$, maka:

$$A^{-n} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}} \\ \dfrac{1}{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} & , untuk\ n\ ganjil \\ \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \end{bmatrix} & , untuk\ n\ genap \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika untuk n ganjil sebagai berikut:

Misalkan

$$p(n): A^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}} \\ \dfrac{1}{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

UIN SUSKA RIAU

1) Akan ditunjukkan untuk $n = 1$, maka $p(1)$ benar, yaitu:

$$p(1): A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a^{\frac{1-1}{2}} b^{\frac{1+1}{2}}} \\ \frac{1}{a^{\frac{1+1}{2}} b^{\frac{1-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a^0 b^1} \\ \frac{1}{a^1 b^0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix},$$

dengan memperhatikan bentuk A^{-1} di atas, maka $p(1)$ benar.

2) Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A^{-k} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}}} \\ \frac{1}{a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}$$

untuk k ganjil. Maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2, p(k + 2)$ juga benar, yaitu:

$$A^{-(k+2)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k+3}{2}}} \\ \frac{1}{a^{\frac{k+3}{2}} b^{\frac{k+1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}$$

Pembuktian dimulai dari

$$A^{-(k+2)} = A^{-k} A^{-2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}}} \\ \frac{1}{a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k+3}{2}}} \\ \frac{1}{a^{\frac{k+3}{2}} b^{\frac{k+1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}$$

Oleh karena langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$$A^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}} \\ \frac{1}{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ ganjil.}$$

Selanjutnya akan dibuktikan untuk n genap.

Misalkan

$$p(n): A^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \end{bmatrix}$$

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

1) Akan ditunjukkan untuk $n = 2$ maka $p(2)$ benar, yaitu:

$$p(2): A^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(ab)^{\frac{2}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ab)^{\frac{2}{2}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{bmatrix},$$

dengan memperhatikan bentuk A^{-2} di atas, maka $p(2)$ benar.

2) Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A^{-k} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(ab)^{\frac{k}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ab)^{\frac{k}{2}}} \end{bmatrix}$$

dengan k genap. Maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2, p(k + 2)$ juga benar, yaitu:

$$A^{-(k+2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(ab)^{\frac{k+2}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ab)^{\frac{k+2}{2}}} \end{bmatrix}$$

Pembuktian dimulai dari

$$A^{-(k+2)} = A^{-k}A^{-2}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(ab)^{\frac{k}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ab)^{\frac{k}{2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(ab)^{\frac{k+2}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ab)^{\frac{k+2}{2}}} \end{bmatrix}$$

Oleh karena langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$$A^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ genap.}$$

Berdasarkan pembuktian di atas, maka induksi matematika terbukti.

2.9 Notasi Sigma

Definisi 2.11 [23] Notasi sigma merupakan simbol yang digunakan untuk merepresentasikan penjumlahan dari suatu barisan bilangan. Penggunaan notasi sigma memudahkan penulisan penjumlahan beruntun yang panjang menjadi lebih sederhana dan efisien. Notasi ini memiliki tiga komponen utama: indeks penjumlahan dengan nilai awal, nilai akhir, dan pola atau rumus suku yang dijumlahkan.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Berikut ini sifat-sifat penting notasi sigma.

1. Sifat Distributif Kostanta

$$\sum_{i=m}^{n} c \cdot f(i) = c \cdot \sum_{i=m}^{n} f(i)$$

2. Sifat Penjumlahan Terpisah

$$\sum_{i=m}^{n} (f(i) + g(i)) = \sum_{i=m}^{n} f(i) + \sum_{i=m}^{n} g(i)$$

3. Sifat Penggabungan: jika batas atas dan batas bawah sama.
4. Sifat Batas Kosong: jika $m > n$, maka:

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = 0$$

Contoh 2.11

Diberikan $\sum_{i=1}^{n} i^2$, maka hitunglah nilai dari $n = 5$

Penyelesaian:

$$\sum_{i=1}^{5} (1^2) + (2^2) + (3^2) + (4^2) + (5^2) = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Tugas Akhir ini diselesaikan menggunakan metode studi literatur dengan bantuan dari buku dan artikel terkait. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu:

1. Perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif ordo 3×3
   a) Diberikan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran A_3 pada Persamaan (1.1).
   b) Menentukan perpangkatan matriks A_3^2 sampai A_3^{13}.
   c) Menduga bentuk umum matriks A_3^n.
   d) Membuktikan bentuk umum matriks A_3^n dengan metode induksi matematika.
   e) Menentukan $|A_3^1|$ sampai $|A_3^{13}|$ menggunakan aturan sarrus.
   f) Menduga bentuk umum $|A_3^n|$.
   g) Membuktikan $|A_3^n|$ menggunakan induksi matematika.
   h) Menentukan $tr(A_3^n)$ menggunakan definisi *trace* matriks.
2. Perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif ordo 5×5
   a) Diberikan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran A_5 pada Persamaan (1.2).
   b) Menentukan perpangkatan matriks A_5^2 sampai A_5^{13}.
   c) Menentukan $|A_5^1|$ sampai $|A_5^{13}|$ menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama.
   d) Menentukan $tr(A_5^n)$ menggunakan definisi *trace* matriks.
   e) Menduga bentuk umum $|A_5^n|$.
   f) Membuktikan $|A_5^n|$ menggunakan induksi matematika.
3. Perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif ordo 7×7

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

a) Diberikan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran A_7 pada Persamaan (1.3).
b) Menentukan perpangkatan matriks A_7^2 sampai A_7^{13}.
c) Menentukan $|A_7^1|$ sampai $|A_7^{13}|$ menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama.
d) Menentukan $tr(A_7^n)$ menggunakan definisi *trace* matriks.
e) Menduga bentuk umum $|A_7^n|$.
f) Membuktikan $|A_5^n|$ dan $|A_7^n|$ menggunakan induksi matematika.

4. Mengaplikasikan bentuk matriks A_3^n, A_5^n, dan A_7^n dengan contoh soal.
5. Mengaplikasikan matriks $|A_3^n|, |A_5^n|$, dan $|A_7^n|$ dengan contoh soal.
6. Mengaplikasikan matriks $tr(A_3^n), tr(A_5^n)$, dan $tr(A_7^n)$ dengan contoh soal.

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan pada Bab IV mengenai *trace* dan determinan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo ganjil menggunakan matriks Persamaan (1.1), Persamaan (1.2), dan Persamaan (1.3), maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Bentuk umum perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif untuk 3×3 telah diperoleh dan telah terbukti, yaitu:

$$A_3^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} & \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i}+1 & \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i}+1 \\ \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i}+1 & \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} & \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i}+1 \\ \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i}+1 & \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i}+1 & \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} \end{bmatrix}, \mathit{untuk\ n\ ganjil} \\ \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i}+2 & \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i}+1 & \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i}+1 \\ \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i}+1 & \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i}+2 & \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i}+1 \\ \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i}+1 & \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i}+1 & \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i}+2 \end{bmatrix}, \mathit{untuk\ n\ genap} \end{cases}.$$

   Sedangkan untuk ordo 5×5 dan 7×7 tidak ditemukan karena bentuk umum perpangkatan tidak ditemukan.

2. Bentuk umum determinan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif untuk ordo $3 \times 3, 5 \times 5,$ dan 7×7 telah diperoleh dan dibuktikan, yaitu:
   $|A_3^n| = |A_5^n| = |A_7^n| = 2^n.$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

3. Bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif untuk ordo 3×3 telah diperoleh dan ditemukan, yaitu:

$$tr(A_3^n) = \begin{cases} 3\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i}, n\ ganjil \\ 3\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 2\right), n\ genap \end{cases}.$$

Sedangkan untuk ordo 5×5 dan 7×7 tidak ditemukan karena bentuk umum perpangkatan tidak ditemukan.

5.2 Saran

Pembahasan pada tugas akhir ini ialah *trace* dan determinan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo ganjil. Saran untuk penulis yang ingin melanjutkan penelitian ini dapat menggunakan bantuan perangkat lunak agar lebih efisien dan praktis, seperti MATLAB, Maple, atau Python.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR PUSTAKA

[1] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan*. Jakarta: Erlangga, 2004.

[2] F. Aryani, F. Bayu Cenia, Y. Muda, and Zukrianto, "Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus Orde 3 Berpangkat Bilangan Bulat," *Semin. Nas. Teknol. Komun. dan Ind. 13*, no. November, pp. 300–310, 2021.

[3] F. Aryani and Yuliarnis, "Trace Matriks Berbentuk Khusus 2x2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," vol. 4, no. 2, pp. 105–113, 2018.

[4] F. Aryani, A. A. Nugraha, M. Faisal, and C. C. Marzuki, "Trace Matriks Ketetanggaan nxn Berpangkat m=-2,-3,-4," pp. 543–553, 2020.

[5] V. Ramadhani Putri, "Trace Matriks Ketetanggaan Berpangkat Dua dan Negatif Dua dari Graf Roda," 2020.

[6] L. Purwati S, "Trace Matriks Ketetanggaan Berpangkat Empat dan Negatif Satu dari Graf Roda," 2020.

[7] D. A. Puspita, "Trace Matriks Ketetanggaan nxn Berpangkat Bilangan Bulat Positif dari Graf Siklus," 2021.

[8] N. Srihartini, "Trace Matriks Ketetanggaan n×n pada Graf Roda Berpangkat Tiga," 2021.

[9] F. Aryani, S. Wibowo, C. C. Marzuki, and Zukrianto, "Perpangkatan dan Trace Matriks Segitiga 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat," *J. Sains, Teknol. dan Ind.*, vol. Vol.19, No, pp. 383–384, 2022.

[10] F. Aryani and C. C. Marzuki, "Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor," vol. 4, no. 2, pp. 82–88, 2018.

[11] A. N. Rahma, F. Aryani, and M. Anggelina, "Determinan Matriks Blok 2x2 dalam Aplikasi Matriks FLDcircr Bentuk Khusus," vol. 5, no. 2, pp. 34–42, 2019.

[12] M. M. Salihu, A. N. Rahma, K. Swandayani, and C. C. Marzuki, "Determinan Matriks FLDcircr Bentuk Khusus n × n,n ≥ 3 Menggunakan Metode Salihu," vol. 8, no. 1, pp. 27–34, 2019.

[13] T. Fitri, "Determinan Matriks RFPrLrRcircr (a,a,0,… ,) Ordo n×n(n ≥3)

Menggunakan Metode Salihu," 2023.

[14] R. Munir, *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika, 2016.

[15] M. Abdy and W. Sanusi, "Grup Automorfisma Graf Tangga dan Graf Lingkaran," 2011.

[16] R. P. Soleha, D. Welyyanti, and Narwen, "Bilangan kromatik lokasi dari hasil amalgamasi graf bintang yang dihubungkan oleh suatu graf lingkaran," vol. IX, no. 1, pp. 46–52, 2020.

[17] A. T. Arsanto, "Analisa Sistem Jaringan Komputer dengan Pendekatan Greedy Berbasis Graf," vol. 9, no. 02, pp. 1–23, 2015.

[18] R. Umilasari and Darmaji, "Bilangan Dominasi Jarak Dua Pada Graf-Graf Hasil Opearasi Korona dan Comb," 2015.

[19] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*. New York: Mc Graw Hill, 2007.

[20] Marsudi and Marjono, *Aljabar Linear*. Malang: Universitas Brawijaya Press, 2012.

[21] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra*. United States of Amerika: Wiley, 2013.

[22] R. Munir, *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika, 2010.

[23] D. Suryana, D. Karmila, and N. Mahyuddin, "Pengembangan Game Interaktif dalam Meningkatkan Kecerdasan Matematika Anak di Taman Kanak-Kanak," *J. Obs. J. Pendidik. Anak Usia Dini*, vol. 7, no. 3, pp. 3084–3096, 2023.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis lahir di Duri, 27 Oktober 2001 merupakan anak kelima dari lima bersaudara pasangan Bapak Tengku Syarman Yahya dan Ibu Tengku Syarifah Badariah yang beralamat di Jalan Tribrata Hangtuah, Kelurahan Babussalam, Kecamatan Mandau, Kabupaten Bengkalis, Duri, Provinsi Riau. Penulis menempuh pendidikan dimulai dari TK IT Mutiara di Komplek PT. Pertamina Hulu Rokan, Sebanga, Kecamatan Pinggir, Kabupaten Bengkalis, Provinsi Riau pada Tahun 2008, kemudian melanjutkan pendidikan di SDS IT Mutiara pada Tahun 2008-2014, kemudian pada Tahun 2014-2017 melanjutkan pendidikan di SMPS IT Mutiara, dan pada Tahun 2017-2020 melanjutkan pendidikan di SMAS IT Mutiara. Hingga pada akhir tahun 2020 penulis menempuh masa perkuliahan di UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi.

Pada Bulan Juli sampai Bulan Agustus Tahun 2023 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Empang Pandan, Kecamatan Koto Gasib, Kabupaten Siak. Pada Bulan Januari Tahun 2024 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di PT. Bank Riau Kepri Syariah (Perseroda) Bengkalis Duri Hangtuah selama kurang lebih satu setengah bulan guna memenuhi syarat mata kuliah yang sedang diambil pada semester 8 dengan judul laporan Kerja Praktek **”Optimalisasi Tahapan Pembiayaan Debitur Pada PT. Bank Riau Kepri Syariah Bengkalis Duri Hangtuah Menggunakan Metode PERT”** dengan dosen pembimbing Dr. Rado Yendra, M.Sc. dan diseminarkan pada tanggal 25 Juni 2024. Pada tahun yang sama penulis juga memulai penyusunan tugas akhir yang berjudul ***”Trace* dan Determinan Matriks Ketetanggaan dari Graf Lingkaran Berpangkat Bilangan Bulat Positif pada Ordo Ganjil”** yang dibimbing oleh Fitri Aryani, M.Sc. Pada Tahun 2024 penulis melaksanakan seminar proposal pada tanggal 19 November 2024 dan penulis melaksanakan sidang tugas akhir pada tanggal 14 Januari 2025.