TRACE DAN DETERMINAN MATRIKS KETETANGGAAN DARI GRAF LINGKARAN BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF PADA ORDO GENAP

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

Oleh :

<u>AINI TINA HARDIYANTI</u>
12050426649

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2025

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE DAN DETERMINAN MATRIKS KETETANGGAAN DARI GRAF LINGKARAN BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF PADA ORDO GENAP

TUGAS AKHIR

oleh:

AINI TINA HARDIYANTI
12050426649

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir di Pekanbaru, pada tanggal 21 Januari 2025

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIP. 19770913 200604 2 002

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE DAN DETERMINAN MATRIKS KETETANGGAAN DARI GRAF LINGKARAN BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF PADA ORDO GENAP

TUGAS AKHIR

oleh:

AINI TINA HARDIYANTI
12050426649

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 14 Januari 2025

Pekanbaru, 21 Januari 2025
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Wartono, M.Sc.**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota I	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si.**
Anggota II	**: Ade Novia Rahma, M.Mat.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta ada pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan dengan mengikuti kaidah pengutipan yang berlaku.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa di dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 14 Januari 2025

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL 4E163AMX161176484

AINI TINA HARDIYANTI

12050426649

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alaamiin, puji dan syukur kepada Allah Subhana wata'ala atas banyak nikmat dan rahmat yang telah diberikan sehingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir saya ini dengan lancar, dan shalawat beriringkan salam selalu tercurah kepada baginda Rasulullah Nabi Muhammad Shalallahu'alaihi wasallam.

Saya persembahkan tugas akhir ini untuk orang-orang yang saya cintai,

Terkhusus untuk kedua orang tua saya
Almarhum bapak (Iwan Haryanto) dan Ibu (Suprap Finaryati)
dan juga Abang saya satu-satunya (Andi Susilo)

Ayah tercinta

Yang telah pergi sejak saya kecil. Meskipun Ayah tidak ada di sisi saya, kasih sayang, doa dan kenangan tentangmu selalu menjadi kekuatan dalam setiap langkah hidupku. Ayah adalah sosok yang selalu saya rindukan. Semoga Ayah tenang di sisi-Nya, dan segala amal kebaikan yang Ayah lakukan diterima dengan penuh rahmat.

Ibuku tercinta

Yang telah menjadi sosok ibu sekaligus ayah bagi saya. Terima kasih atas cinta tanpa syarat, pengorbanan yang tiada henti, dan doa Ibu yang tak pernah berhenti. Ibu adalah pahlawan sejati dalam hidup saya. Semoga Allah membalas segala kebaikan Ibu dengan berkah yang melimpah.

Abangku tercinta

Yang telah bekerja keras menggantikan peran Ayah dalam keluarga. Abang tidak hanya menjadi saudara yang baik, tetapi juga menjadi panutan dan pelindung. Terima kasih telah selalu mendampingi, memberikan semangat, dan berkorban demi keluarga. Peran Abang yang luar biasa sebagai tulang punggung keluarga memberikan saya kekuatan untuk terus berjuang. Semoga Allah selalu memberkahi Abang dengan kesehatan, kebahagiaan, dan kesuksesan.

Dosen Pembimbing yang saya hormati

Yang telah sabar memberikan arahan, bimbingan, dan ilmu berharga dalam proses penyelesaian Tugas Akhir ini. Terima kasih atas segala perhatian dan dedikasi yang diberikan.

TRACE DAN DETERMINAN MATRIKS KETETANGGAAN DARI GRAF LINGKARAN BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF PADA ORDO GENAP

AINI TINAHARDIYANTI
12050426649

Tanggal Sidang : 14 Januari 2025
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Trace matriks merupakan jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar. Sedangkan determinan matriks adalah jumlah hasil kali elementer (bertanda) dari entri-entri suatu matriks. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum perpangkatan matriks, determinan dan juga *trace* matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo genap. Langkah awal yang dilakukan yaitu menghitung perpangkatan matriks yang dimulai dari pangkat dua hingga sembilan. Setelah mendapatkan pola perpangkatan matriks, maka dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika. Sedangkan untuk determinan di peroleh dari bentuk perpangkatan matriks tersebut dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama. Selanjutnya untuk *trace* menggunakan definisi *trace* matriks Aplikasi diberikan dalam contoh soal.

Kata Kunci: Determinan matriks, graf lingkaran, induksi matematika, matriks ketetanggaan, metode ekspansi kofaktor, *trace* matriks.

TRACE DAN DETERMINAN MATRIKS KETETANGGAAN DARI GRAF LINGKARAN BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF PADA ORDO GENAP

AINI TINA HARDIYANTI
12050426649

Date of Final Exam: January 14th, 2025
Date of Graduation:

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

The trace of a matrix is the sum of the elements on the main diagonal of a square matrix, while the determinant of a matrix is the sum of the products of the elements, each with a sign, of the matrix's entries. This research aims to derive the general form of matrix powers, determinants, and the trace of the adjacency matrix of a circle graph raised to a positive integer power with an even order. The initial step involves calculating the matrix powers from the second to the ninth power. After obtaining the pattern of the matrix powers, the result is proven using mathematical induction. The determinant is obtained from the matrix power form using cofactor expansion along the first row. Next, the trace is calculated using the definition of the trace of a matrix. An application is provided through an example problem.

Keywords: Matrix determinant, circle graph, mathematical induction, adjacency matrix, cofactor expansion method, matrix trace.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Alhamdulillahirabbil'alamin saya ucapkan puji dan syukur kepada Allah Subhanahu wa ta'ala. Zat pencipta dan maha kuasa atas segala hidayah dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **"*Trace* dan Determinan Matriks Ketetanggaan dari Graf Lingkaran Berpangkat Bilangan Bulat Positif pada Ordo Genap"**. Shalawat serta salam senantiasa kita hadiahkan kepada junjungan alam Nabi Besar Muhammad Shallallahu' alaihi Wa Sallam, semoga senantiasa dengan bersholawat kita mendapatkan syafa'atnya dan selalu dalam lindungan Allah Subhanahu wa ta'ala. Aamiin allahuma aamiin.

Dalam penyusunan Tugas Akhir ini, penulis banyak sekali mendapat bimbingan, arahan, masukan, nasehat, dan lain sebagainya dari dari berbagai pihak. Oleh sebab itu dengan setulus hati penulis mengucapkan terima kasih yang tidak terhingga kepada Kedua orang tuaku tersayang, Almarhum Bapak Iwan Haryanto dan Ibu Supraf Finaryati yang senantiasa selalu mendoakan saya dan pemberian materi yang tidak bisa dihitung berapa banyaknya, untuk abang saya Andi Susilo yang telah memotivasi kepada penulis agar dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini cepat selesai, dan juga ucapan terimakasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku dosen pembimbing TA yang telah meluangkan waktunya untuk berkonsultasi dalam penyelesaian penelitian Tugas Akhir.
6. Ibu Corry Corrazon Marzuki, M.Si. dan Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat. selaku dosen penguji yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk menguji dan memberikan saran dalam Penelitian Tugas Akhir.
7. Bapak Zukrianto, M.Si. selaku Koordinator Tugas Akhir Program Studi Matematika.
8. Bapak dan Ibu Dosen dilingkungan Fakultas Sains dan Teknologi khususnya pada Program Studi Matematika.
9. Sahabatku Siti Jamilah yang telah memberikan support kepada penulis.
10. Teman seperjuanganku Desma, Putri Gustia, Indah dan Thessa yang telah memberikan masukan dan bantuan kepada penulis selama masa perkuliahan.
11. Seluruh teman-teman Angkatan 2020, dan kakak-kakak senior yang telah memberikan ilmu dan motivasi kepada penulis.

Penulis menyadari dalam Penelitian Tugas Akhir ini masih banyak terdapat kekurangan dan kesalahan, untuk itu penulis mengharapkan adanya masukan berupa kritik ataupun saran dari berbagai pihak untuk kesempurnaan Penelitian Tugas Akhir ini, dan kepada semua pihak yang telah memberikan dorongan serta bantuan penulis hanya dapat mengucapkan terimakasih, semoga bantuan bimbingan dan dukungan yang diberikan mendapatkan balasan dari Allah SWT. Wassalamu’alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 14 Januari 2025

AINI TINA HARDIYANTI
12050426649

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Trace matriks merupakan jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar [1]. Menghitung *trace* suatu matriks tidaklah begitu sulit, namun apabila matriks tersebut adalah matriks yang berpangkat n, maka untuk menghitung *tracenya* harus dilakukan perpangkatan matriks terlebih dahulu. Selanjutnya dapat ditentukan *trace* matriks berpangkat tersebut [2]. Perhitungan *trace* matriks berpangkat telah banyak di teliti diantaranya, pada tahun 2017 oleh [3] yang telah membahas mengenai *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif pada matriks ketetanggaan dari graf lengkap, yang memperoleh hasil sebagai berikut:

$$tr(A^k) = \sum_{r=1}^{n/2} S(k,r)n(n-1)^r(n-2)^{k-2r} \quad , \qquad untuk\ k\ ganjil$$

$$tr(A^k) = \sum_{r=1}^{n-1/2} S(k,r)n(n-1)^r(n-2)^{k-2r} \quad , \qquad untuk\ k\ genap$$

dengan

$$S(k,r) = 1, S(k,k/2) = 1, S(k,k-1/2) = \frac{k-1}{2},$$

$$S(k,r) = S(k-1,r) + S(k-2,r-1).$$

Selanjutnya pada tahun 2020 oleh [4] yang telah meneliti *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat $m = -2, -3, -4$. Hasil yang diperoleh dalam penelitian tersebut seperti berikut.

1. $tr(A_n)^{-2} = \frac{n((n-1)+(n-2)^2)}{(n-1)^2}$, $n \geq 2$.
2. $tr(A_n)^{-3} = \frac{n[-2(n-1)(n-2)-(n-2)^3]}{(n-1)^3}$, $n \geq 2$.
3. $tr(A_n)^{-4} = \frac{n[(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4]}{(n-1)^4}$, $n \geq 2$.

Penelitian terkait juga dibahas pada tahun 2021 oleh [5] yang telah meneliti *trace* matriks 2 × 2 berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan yaitu $A_n = \begin{bmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{bmatrix}$, dengan $a \in \mathbb{R}$, maka di peroleh hasil *tracenya* sebagai berikut:

$$tr = ({A_n}^m) = (na)^m.$$

Pada tahun 2022 oleh [6] juga telah meneliti pembahasan tentang *trace* matriks toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat bilangan bulat positif. Dalam penelitian tersebut maka diperoleh *trace* matriks sebagai berikut:

1. *Trace* matriks toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat dua, yaitu:
$$tr(H_n^2) = na^2 + 2(n-1)b^2 + 2(n-2)c^2 + 2(n-3)d^2.$$
2. *Trace* matriks toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat tiga, yaitu:
$$\begin{aligned} tr(H_n^3) = {} & na^3 + 6(n-1)ab^2 + 6(n-2)ac^2 + 6(n-3)ad^2 \\ & + 6(n-2)b^2c + 12(n-3)bcd. \end{aligned}$$
3. *Trace* matriks toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat empat, yaitu:
$$\begin{aligned} tr(H_n^{4)} = {} & na^4 + 12(n-1)a^2b^2 + 12(n-2)a^2c^2 + 12(n-3)a^2d^2 \\ & + 2(3n-5)b^4 + 8(n-3)b^3d + 8(3n-8)b^2c^2 \\ & + 8(3n-11)b^2d^2 + 2(3n-10)c^4 + 8(3n-13)c^2d^2 \\ & + 6(n-5)d^4 + 24(n-2)ab^2c + 8(3n-11)bc^2d \\ & + 48(n-3)abcd. \end{aligned}$$

Masih membahas *trace* matriks berpangkat tahun 2024 oleh [7] yang telah meneliti *trace* matriks FLDcirc$_r$ bentuk khusus berpangkat dua. Matriks yang digunakan dalam penelitiannya ialah matriks FLDcirc$_r$ berbentuk khusus dengan orde 2×2 sampai 8×8. Maka diperoleh hasil *trace* $(A_2)^2$ sampai *trace* $(A_8)^2$ sebagai berikut:

$$trace\ (A_n)^2 = nx^2.$$

Pembahasan yang dapat dilakukan pada suatu matriks bukan hanya *trace* matriks tetapi dapat juga dilakukan perhitungan determinan suatu matriks. Determinan mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Menghitung nilai determinan suatu matriks dapat menggunakan beberapa metode, diantaranya, Metode Sarrus, Metode Ekspansi

Kofaktor, Metode CHIO, Metode Eliminasi Gauss, Metode Dekomposisi. Pada tugas akhir ini metode yang akan digunakan adalah Metode Ekspansi Kofaktor [8].

Menentukan nilai determinan matriks dengan ukuran yang kecil, tidaklah begitu sulit. Namun jika matriksnya berukuran besar, maka menentukan determinannya lumayan sulit. Artinya diperlukan formula yang tepat untuk memudahkan menentukan determinan suatu matriks [8]. Banyak peneliti terdahulu yang meneliti determinan matriks berpangkat diantaranya, [9] telah meneliti determinan matriks segitiga atas bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan kofaktor dengan matriks sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a \in R$$

dan diperoleh

$$\left|(A_{3)}{}^{n}\right| = a^{3n}.$$

Selanjutnya pada tahun 2021 oleh [10] telah meneliti determinan matriks hankel bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif, dengan matriks:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall a \in R$$

sehingga diperoleh hasil akhir penelitiannya yaitu

$$|(A_3)^n| = (-1)^n a^{3n}, n \geq 1.$$

Pada tahun 2021 [11] juga telah meneliti determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif dengan matriks:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \forall a \in R$$

sehingga di peroleh hasilnya yaitu:

$$|A_4{}^n| = -a^{4n} \quad \text{, untuk n ganjil}$$

$$|A_4{}^n| = a^{4n} \quad \text{, untuk n genap}$$

Setelah itu pada tahun 2023 oleh [12] yang telah meneliti bentuk umum determinan matriks segitiga bentuk khusus ordo **6**×**6** berpangkat bilangan bulat positif dengan matriks:

$$A_6 = \begin{bmatrix} a & a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a \in R, a \neq 0$$

memperoleh hasil akhir yaitu

$$|(A_6)^n| = |(B_6)^n| = a^{6n}.$$

Masih mencari determinan matriks berpangkat tahun 2024 oleh [13] juga telah meneliti determinan Matriks Hankel bentuk khusus ordo 4x4 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan metode salihu dengan matriks:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall a \in \mathbb{Z}^+$$

maka diperoleh hasilnya yaitu

$$|A_4| = a^{4n}.$$

Perhitungan *trace* dan determinan matriks dapat dilakukan pada berbagai macam jenis matriks. Salah satu jenis matriks yang digunakan pada tugas akhir ini adalah matriks ketetanggaan. Matriks ketetanggaan merupakan bentuk representasi dari sebuah graf terhubung. Menurut [14] misalkan G adalah matriks yang berukuran $n \times n$. Bila matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka $[a_{ij}] = 1$ jika simpul i dan j bertetangga, sebaliknya $[a_{ij}] = 0$ jika simpul i dan j tidak bertetangga. Matriks ketetanggaan dinamakan juga matriks nol-satu karena pada matriks tersebut hanya berisi angka nol dan satu. Graf terhubung juga banyak bentuknya, diantaranya graf lengkap, graf bintang, graf roda dan graf lingkaran [14].

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul diberi symbol C_n [15]. Pada tugas akhir ini hanya membahas mengenai matriks ketetanggaan dari graf lingkaran.

Berdasarkan latar belakang diatas, maka penulis mengambil judul **"*Trace* dan Determinan Matriks Ketetanggaan dari Graf Lingkaran Berpangkat**

Bilangan Bulat Positif pada Ordo Genap”.

1.2 Rumusan Masalah

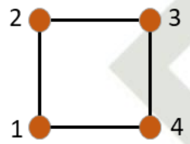
Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan masalah dalam Tugas Akhir ini adalah:

1. Bagaimana bentuk perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo genap?
2. Menentukan nilai *trace* dan determinan dari matriks ketetanggaan graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo genap?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam tugas akhir ini adalah matriks ketetanggaaan dari graf lingkaran pada ordo genap yaitu ordo 4x4, 6x6, dan 8x8 sebagai berikut:

a) Graf lingkaran C_4 yaitu:

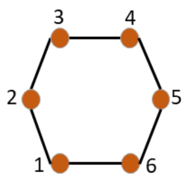


C_4

dan matriks ketetanggaan dari C_4

$$C_4 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{1.1}$$

b) Graf lingkaran C_6 yaitu:

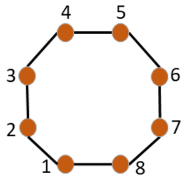


C_6

dan matriks ketetanggaan dari C_6

$$C_6 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{1.2}$$

c) Graf lingkaran C_8 yaitu:



C_8

dan matriks ketetanggaan dari C_8

$$C_8 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{1.3}$$

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini yaitu:

1. Mendapatkan bentuk umum perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo genap.
2. Mendapatkan nilai *trace* dan determinan dari matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo genap.

1.5 Manfaaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan diatas, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

1. Memperdalam pengetahuan khususnya dibidang matematika murni.
2. Mengembangkan ilmu matematika dalam kajian matriks.

Dalam penelitian ini mengembangkan ilmu matematika dalam kajian matriks ketetanggaan berpangkat bilangan bulat positif dari representasi graf lingkaran berordo genap.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup tiga bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang berkaitan dengan graf, matriks ketetanggaan, perkalian matriks, determinan matriks dan *trace* matriks.

BAB III METODOLOGI PENELITI

Bab ini berisi langkah-langkah atau prosedur dalam menentukan bentuk umum perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo genap.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi penjelasan bagaimana mendapatkan bentuk umum matriks, serta menghitung *trace* dan determinan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo genap.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi kesimpulan dari hasil pembahasan yang telah dilakukan pada Bab IV dan saran dari penulis.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini akan membahas teori-teori pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya.

2.1 Graf

Definisi 2.1 [16] Suatu graf $G = V, E$ terdiri dari V, suatu himpunan tak kosong dari simpul-simpul dan E, suatu himpunan dari sisi-sisi. Setiap sisi memiliki satu atau dua simpul yang terkait dengannya yang disebut titik ujung.

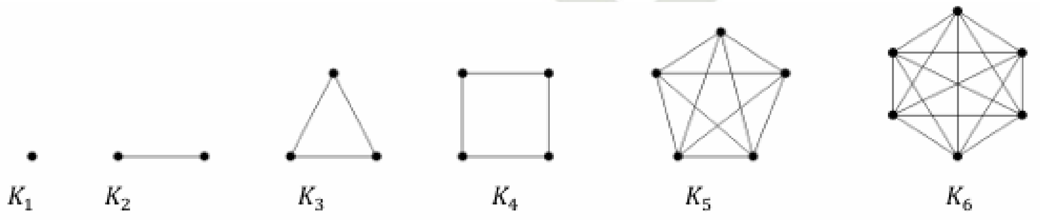
Definisi 2.2 [17] Suatu graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua simpul u dan v di G terdapat lintasan di G yang menghubungkan kedua simpul tersebut. Sebaliknya, graf G dikatakan graf tidak terhubung jika untuk setiap dua simpul u dan v di G tidak terdapat lintasan di G yang menghubungkan kedua simpul tersebut.

Definisi 2.3 [16] Dua simpul u dan v dalam sebuah graf tidak berarah G disebut bertetangga di G jika u dan v adalah titik ujung dari sisi pada G.

Beberapa contoh graf sederhana:

1. Graf Lengkap

   Graf lengkap dengan n simpul, dinotasikan dengan K_n, adalah graf sederhana yang terdiri atas satu sisi diantara setiap pasang simpul berbeda. Graf K_n untuk $n = 1,2,3,4,5,6$ ditunjukkan pada Gambar 2.1.

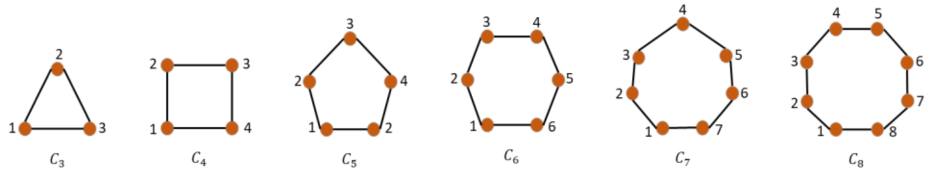


Gambar 2.1 Graf K_n untuk $1 \leq n \leq 6$

2. Graf Lingkaran

   Graf lingkaran $C_n, n \geq 3$, terdiri atas n simpul $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan sisi $[v_1, v_2], [v_2, v_3], \dots, [v_{n-1}, v_n]$ dan $[v_n, v_1]$. Graf lingkaran C_3, C_4, C_5, dan C_6

ditunjukkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2. 2 Graf lingkaran C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 dan C_8

2.2 Matriks Ketetanggaan

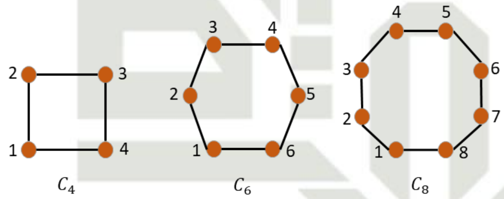
Definisi 2.4 [16] Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dimana $|V| = n$. Misalkan dari G tersusun secara acak yaitu $v_1, v_2, \dots, v_n$. Matriks ketetanggaan A (atau A_G) dari G adalah matriks $n \times n$ nol-satu dimana 1 milik entri ke-(i, j) ketika v_i dan v_j adalah bertetangga, dan 0 dimiliki oleh entri ke-(i, j) ketika v_i dan v_j tidak bertetangga.

Dengan kata lain, jika matriks ketetanggaan $A = [a_{ij}]$, maka

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & jika\ \{v_i, v_j\}\ bertetangga\ di\ G \\ 0, & lainnya \end{cases} \tag{2.1}$$

Contoh 2.1

Misalkan terdapat graf lingkaran sebagai berikut:



maka dengan menggunakan Persamaan (2.1) dapat dilihat bahwa matriks ketetanggaan yang diperoleh adalah:

$$C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Perkalian Matriks

Pada bagian ini akan dibahas mengenai perkalian matriks dengan skalar, perkalian matriks dengan matriks dan perpangkatan matriks.

2.3.1 Perkalian Matriks dengan Skalar

Definisi 2.5 [18] Jika A adalah sebarang matriks dan c adalah sebarang skalar, maka hasil perkalian cA adalah suatu matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri dari A dengan c. Matriks cA disebut perkalian skalar dari A.

Contoh 2.3

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan } c = 3$$

Maka perkalian untuk cA adalah:

$$cA = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 12 & 9 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 12 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Perkalian Matriks dengan Matriks

Definisi 2.6 [18] Jika A adalah matriks berukuran $m \times r$ dan B adalah matriks berukuran $r \times n$ maka hasil kali AB adalah matriks berukuran $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut: untuk menemukan entri-entri pada baris i dan kolom j dari AB, keluarkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri dari baris dan kolom yang bersesuaian secara bersamaan kemudian jumlahkan hasil kalinya.

Contoh 2.4

Diketahui matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka perkalian untuk AB adalah:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0)+(4)+(9) & (1)+(0)+(9) \\ (0)+(2)+(6) & (0)+(0)+(6) \\ (0)+(0)+(3) & (0)+(0)+(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 8 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.4 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.7 [18] Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif menjadi.

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AAA \ldots A}_{n\,faktor}\,(n > 0) \tag{2.2}$$

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n\,faktor} \tag{2.3}$$

Contoh 2.5

Misalkan A adalah matriks berukuran 2×2 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

maka,

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

2.5 Determinan Matriks

Definisi 2.8 [19] Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan $det(A)$ atau $|A|$ yang didefinisikan sebagai jumlah dari hasil kali elementer (bertanda) dari entri-entri A sehingga disebut determinan A.

Dalam matriks bujur sangkar $n \times n$ menurut [20] terdapat beberapa sifat-sifat determinan diantaranya yaitu:

1. Nilai determinan matriks A tidak berubah, jika baris diganti dengan kolom atau sebaliknya. Jadi nilai determinan matriks A sama dengan nilai determinan matriks transpose A^T.

$$|A| = |A^T|$$

2. Jika setiap elemen dari baris atau kolom matriks A adalah nol, maka

$$|A| = 0$$

3. Jika 2 baris atau 2 kolom matriks A semua elemennya sama maka

$$|A| = 0$$

4. Jika A dan B matriks bujur sangkar ordo n maka

$$|AB| = |A|.|B|$$

5. Apabila setiap elemen suatu baris atau kolom dari matriks A dikalikan dengan skalar k maka

$$|\mathrm{kA}| = \mathrm{k}|A|.$$

2.5.1 Metode Ekspansi Kofaktor

Sebelum menentukan determinan menggunakan metode ekspansi kofaktor, terlebih dahulu harus memahami istilah minor dan kofaktor.

Definisi 2.9 [21] Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Contoh 2.7

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

minor dari entri a_{11} adalah

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

kofaktor dari entri a_{11} adalah

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 0$$

Teorema 2.2 [21] Determinan dari matriks A , $n \times n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali-hasil kali yang diperoleh, dimana untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$,

1. Ekspansi sepanjang kolom ke-j

$$\det(A) = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}a_{nj}. \qquad (2.5)$$

2. Ekspansi sepanjang baris ke-i

$$det(A) = a_{i1}c_{i1} + a_{12}c_{12} + \cdots + a_{in}a_{in} \qquad (2.6)$$

Contoh 2.8

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 4×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan $\det(A)$ dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama.

Penyelesaian:

Karena entri a_{13} dan a_{14} bernilai 0, maka hitung c_{11} dan c_{12} saja.

$$\begin{aligned} c_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 4(2) - 6(4) + 5(2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} c_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} \\ &= -\begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= -\left(2\begin{vmatrix}3 & 1\\4 & 2\end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix}7 & 1\\8 & 2\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}7 & 3\\8 & 4\end{vmatrix}\right)$$

$$= (2(2) - 6(6) + 5(4)$$

$$= -(-12)$$

$$= 12$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + a_{14}c_{14}\\ &= a_{11}(M_{11}) + a_{12}(-M_{12}) + a_{13}(M_{13}) + a_{14}(-M_{14})\\ &= 1(-6) + 3(12) + 0 + 0\\ &= -6 + 36\\ &= 30\end{aligned}$$

Jadi, $\det(A) = 30$

2.6 *Trace* Matriks Berpangkat

Trace matriks merupakan jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar.

Definisi 2.10 [22] Misalkan $A = [a_{ij}]$ suatu matriks persegi berukuran $n \times n$, maka *trace* dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal matriks A dan dinotasikan dengan $tr(A)$. Dinyatakan bahwa *trace* matriks A adalah:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{2.7}$$

Untuk mendapatkan *trace* matriks berpangkat, pertama matriks harus dipangkatkan, kemudian tambahkan diagonal utama matriks tersebut.

Contoh 2.9

Diberikan matriks $C_6 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ tentukan $tr(C_6), tr(C_6)^2$ dan $tr(C_6)^3$!

Penyelesaian:

Diberikan matriks $C_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka

$tr(C_6) = 0 + 0 + 0 + +0 + 0 + 0 = 0$, dan

$$C_6{}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

maka

$tr\left(C_6{}^2\right) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$, dan

$$C_6{}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

maka

$tr\left(C_6{}^3\right) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

2.7 Induksi Matematika

Menurut [23] , induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus bilangan asli.

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut:

1. Ditunjukkan bahwa p (1) benar.

2. Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ juga benar.

Contoh 2.10 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a \in R$. Maka

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)a^n \\ 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

Bukti: pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut :

Misalkan $P(n)$: $A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)a^n \\ 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$ dibuktikan sebagai berikut:

1) Untuk $n = 1$ maka

$$P(1): A^1 = \begin{bmatrix} a^1 & 1a^1 & \left(\frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}1\right)a^1 \\ 0 & a^1 & 1a^1 \\ 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Maka $P(1)$ benar.

2) Asumsikan $n = k, P(k)$ benar, yaitu

$$P(k): A^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^k & \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k\right)a^k \\ 0 & a^k & ka^k \\ 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}$$

Maka akan ditunjukkan untuk $n = k+1, P(k+1)$ juga benar yaitu

$$P(k+1): A^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \left(\frac{1}{2}(k+1)^2 + \frac{1}{2}(k+1)\right)a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Pembuktian :

$$A^{k+1} = A^k . A^1$$

$$= \begin{bmatrix} a^k & ka^k & \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k\right)a^k \\ 0 & a^k & ka^k \\ 0 & 0 & a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^k a & a^k a + k a^k a & a^k a + k a^k a + \left(\left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k\right) a^k\right) a \\ 0 & a^k a & a^k + k a^k a \\ 0 & 0 & a^k a \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{k+1} & a^{k+1} + k a^{k+1} & a^{k+1} + k a^{k+1} + \frac{1}{2}k^2 a^{k+1} + \frac{1}{2} k a^{k+1} \\ 0 & a^k + 1 & a^{k+1} + k a^{k+1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \left(1 + k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k\right) a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \left(\left(\frac{1}{2}k^2 + k + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\right)\right) a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \left(\frac{1}{2}(k^2 + 2k + 1) + \frac{1}{2}(k+1)\right) a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \left(\frac{1}{2}(k+1)^2 + \frac{1}{2}(k+1)\right) a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Maka $P(k+1)$ benar.

Dari langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar. Maka terbukti

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) a^n \\ 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}.$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Tugas Akhir ini diselesaikan menggunakan metode studi literatur dengan bantuan dari buku dan artikel terkait. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu:

1. Diberikan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran ordo 4×4 pada Persamaan (1.1).
   (a). Menentukan perpangkatan dan determinan matriks $C_4{}^2$ sampai $C_4{}^9$.
   (b). Menduga bentuk umum matriks $C_4{}^n$ dengan n bilangan bulat positif.
   (c). Membuktikan bentuk umum matriks $C_4{}^n$ dengan metode induksi matematika.
   (d). Membuktikan $|C_4{}^n|$ dengan menggunakan metode ekspansi kofaktorsepanjang baris pertama.
   (e). Menentukan $tr(\ C_4{}^n)$ menggunakan definisi *trace* matriks.
2. Diberikan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran ordo 6×6 pada Persamaan (1.2).
   (a). Menentukan perpangkatan dan determinan matriks $C_6{}^2$ sampai $C_6{}^9$ menggunakan sofware maple.
   (b). Menduga bentuk umum matriks $C_6{}^n$ dengan n bilangan bulat positif.
   (c). Membuktikan bentuk umum matriks $C_6{}^n$ dengan metode induksi matematika.
   (d). Membuktikan $|C_6{}^n|$ dengan menggunakan metode induksi matematika.
   (e). Menentukan $tr(\ C_6{}^n)$ menggunakan definisi *trace* matriks.
3. Diberikan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran ordo 8×8 pada Persamaan(1.3).
   (a). Menentukan perpangkatan dan determinan matriks $C_8{}^2$ sampai $C_8{}^9$ menggunakan sofware maple.
   (b). Menduga bentuk umum matriks $C_8{}^n$ dengan n bilangan bulat positif.
   (c). Membuktikan bentuk umum matriks $C_8{}^n$ dengan metode induksi

matematika.

(d). Membuktikan $|C_8{}^n|$ dengan menggunakan metode induksi matematika.

(e). Menentukan $tr(\ C_8{}^n)$ menggunakan definisi *trace* matriks.

4. Mengaplikasikan bentuk matriks C_4^n, C_6^n dan C_8^n pada contoh soal.
5. Mengaplikasikan $tr(\ C_4{}^n)$, $tr(\ C_6{}^n)$, dan $tr(\ C_8{}^n)$ pada contoh soal.
6. Mengaplikasikan $|C_4{}^n|$, $|C_6{}^n|$ dan $|C_8{}^n|$ pada contoh soal.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah di paparkan pada Bab IV tentang *trace* dan determinan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo genap sebagai berikut:

1. Bentuk umum perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran ordo 4×4 (C_4) dan 8×8 (C_8) yaitu:

(a) Bentuk umum perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran ordo 4×4 (C_4) yaitu :

$$C_4{}^n = \begin{bmatrix} 0 & 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{untuk } n \text{ ganjil}$$

$$C_4{}^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{untuk } n \text{ genap.}$$

(b) Bentuk umum perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran ordo 6×6 (C_6) yaitu :

$$C_6{}^n = \begin{bmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} + 1 \\ \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} \\ \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} + 1 \\ \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{untuk } n \text{ ganjil}$$

$$C_6{}^n = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 2 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 2 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 1 \\ \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 2 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 2 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 1 \\ \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 2 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 1 & 0 & \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 2 \end{bmatrix}, \text{untuk } n \text{ genap.}$$

(c) Bentuk umum perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran ordo 8×8 (C_8) yaitu :

$$C_8{}^n = \begin{bmatrix} 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} \\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} \\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} \\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} \\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & 0 \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ ganjil}$$

$$C_8{}^n = \begin{bmatrix} 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & 0 & 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & 0 & 2^{n-2} \\ 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} \\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & 0 & 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & 0 & 2^{n-2} \\ 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & 0 & 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ genap.}$$

2. Bentuk umum determinan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran pada ordo 4×4 (C_4), 6×6 (C_6) dan 8×8 (C_8) yaitu:
   (a) $|C_4{}^n| = 0$, untuk semua n bilangan bulat positif.
   (b) $|C_6{}^n| = (-4)^n$, untuk semua n bilangan bulat positif.
   (c) $|C_8{}^n| = 0$, untuk semua n bilangan bulat positif.

3. Bentuk umum *trace* matriks ketetangaan dari graf lingkaran pada ordo 4×4 (C_4) dan 8×8 (C_8) yaitu:

(a) $tr({C_4}^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk n ganjil} \\ 2^{n+1} & \text{, untuk } n \text{ genap.} \end{cases}$

(b) $tr({C_6}^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 6\sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2i} + 2 & \text{, untuk } n \text{ genap.} \end{cases}$

(c) $tr({C_8}^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 2^{n+1} + 2^{\frac{n+4}{2}} & \text{, untuk } n \text{ genap.} \end{cases}$

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini penulis membahas tentang *trace* dan determinan matriks ketetanggaan dari graf lingkaran berpangkat bilangan bulat positif pada ordo genap. Disarankan untuk mengembangkan perpangkatannya yang berbeda misalkan berpangkat bilangan bulat negatif atau mengembangkan bentuk ordo yang lebih besar, seperti ordo 10×10, ordo 12×12 dan seterusnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] F. Aryani dan Yulianis, "Trace Matriks Berbentuk Khusus 2x2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol.4, No.2, p. 105, 2018.

[2] F. Aryani, R. Andesta, dan C. C. Marzuki, "Trace Matriks Berbentuk Khusus 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol.6 No.1, p. 40, 2020.

[3] P. J. and J. M., "Trace of Positive Integer Power of Adjacency Matrix," *Glob. J. Pure Appl. Math.*, vol.13, 2017.

[4] F. Aryani, A. Arjuna Nugraha, M. Faisal, Helsivianingsih, dan C. Corazon Marzuki, "Trace Matriks Ketetanggaan nxn Berpangkat m=-2, -3, -4," *Semin. Nas. Teknol. Informasi, Komun. dan Ind. 12*, p. 553, 2020.

[5] C. Corazon Marzuki, F. Aryani, dan Rahmawati, "Trace Matriks 2 × 2 Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol.7, p. 36, 2021.

[6] F. Aryani, E. Syafri Ramadhani, Y. Muda, dan C. Corazon Marzuki, "Trace Matriks Toeplitz Heptadiagonal Simetris Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *J. FOURIER*, vol.11, p. 47, 2022.

[7] A. Novia Rahma, S. Sukmawati, dan Rahmawati, "Trace Matriks FLDCIRCR Bentuk Khusus Berpangkat Dua," *J. Ilm. Pendidik. Mat. Mat. dan Stat.*, vol.5, pp. 544–545, 2024.

[8] F. Aryani dan Corry Corazon Marzuki, "Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 4. No. 2, pp. 82–83, 2018.

[9] A. Novia Rahma, Rahmawati, dan R. Husnudzan Vitho, "Determinan Matriks Segitiga Atas Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Kofaktor," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol.6, p. 41, 2020.

[10] A. Novia Rahma dan Z. Aqilah, "Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol.7, p. 102, 2021.

[11] A. Novia Rahma, E. Erizona, dan Rahmawati, "Determinan Matriks Centrosymmetric bentuk khusus ordo 4x4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *J. Fundam. Math. Appl.*, vol. 4, p. 14, 2021.

[12] Rahmawati, M. Nurul Ihza, A. Novia Rahma, dan C. Corazon Marzuki, "Bentuk Umum Determinan Matriks Segitiga Bentuk Khusus Ordo 6×6 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Semin. Nas. Teknol. Informasi, Komun. dan Ind. 15*, p. 218, 2023.

[13] A. Safarina, B. Prihandono, dan Helmi, "Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo 4x4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Metode Salihu," *Bul. Ilm. Math. Stat. dan Ter.*, vol.13, p. 658, 2024.

[14] R. Munir, *Matematika Diskrit*, Edisi 3. Bandung: Informatika, 2005.

[15] Z. Amri, A. Aulia, A. Syella, H. Pratama, S. Ramadhani, dan Chairunnisa, "Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf 2Sn (C4n)," *J. EduTech*, vol.4 No.1, p. 88, 2018.

[16] Rosen and K. H, *Discrete Mathematics and Its Applications*. New York, 2007.

[17] Khairani dan Majidah, *Matematika Diskrit*. Lampung: Perahu Litera, 2018.

[18] Anton, H., and R. C, *Elementary Linear Algebra*. United States of Amerika, 2013.

[19] Marsudi dan Marjono, *Aljabar Linear*. Malang: Universitas Brawijaya Press, 2012.

[20] S. Maharani dan T. Andari, *Aljabar Linear*. Jawa Timur: UNIPMA Press (Anggota IKAPI) dan Universitas PGRI Madiun, 2020.

[21] Anton H and Rorres C, *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*, 8th ed. Jakarta: Erlangga, 2004.

[22] Anton and H, *Aljabar Liniear elementer*, Edisi Ke. Jakarta: Erlangga, 1987.

[23] Sukirman, *Pengantar Teori Bilangan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator, 2006.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis lahir di Ujung Batu II pada 27 Februari 2002. Penulis ialah anak kedua dari Almarhum Bapak Iwan Haryanto dan Ibu Suprap Finaryati, penulis memiliki 1 orang saudara laki-laki. Jenjang pendidikan yang pertama ditempuh penulis ialah SDN 0708 Aliaga II pada tahun 2008 sampai dengan tahun 2014. Selanjutnya penulis melanjutkan pendidikan di SMPN 1 Hutaraja Tinggi, penulis menyelesaikan pendidikan di SMP ini selama 3 tahun dan selesai pada tahun 2017. Untuk Sekolah Menengah Atas penulis melanjutkannya di SMKN 1 BARUMUN yang dimulai dari tahun 2017 sampai tahun 2020. Ditahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau tepatnya di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan yang diambil ialah Jurusan Matematika.

Bulan Januari 2024 penulis melaksanakan Kerja Praktek di Dinas Pangan Tanaman Pangan dan Hortikultura Provinsi Riau dan membuat laporan kerja praktek dengan judul **"Penerapan Metode Exponential Smoothing pada Peramalan Produksi Cabe Keriting di Provinsi Riau Tahun 2024"** yang dibimbing oleh Ibu Fitri Aryani, M.Sc. dan melakukan seminar pada tanggal 26 Juni 2024. Selanjutnya penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Seremban Jaya, Kecamatan Rimba Melintang, Kabupaten Rokan Hilir pada bulan Juli Sampai Agustus 2023.

Ditahun 2024 tepatnya di semeter IX penulis mengambil mata kuliah Tugas Akhir dengan judul yang diambil **"*Trace* dan Determinan Matriks Ketetanggaan dari Graf Lingkaran Berpangkat Bilangan Bulat Positif pada Ordo Genap**. Dengan dosen pembimbing yaitu Ibu Fitri Aryani, M.Sc. Selanjutnya penulis melaksanakan Seminar Proposal pada tanggal 19 November 2024, dengan dosen pengujinya Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si. dan Ibu Rahmawati, M.Sc.