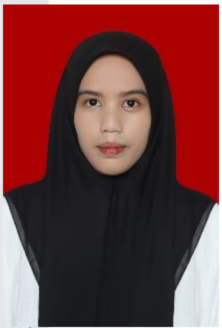
INVERS MATRIKS *LESLIE* BENTUK KHUSUS ORDO $n \times n$ $(n \geq 4)$ DENGAN METODE BLOK

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

RIZKY AULIA
12050422610



FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2025

LEMBAR PERSETUJUAN

INVERS MATRIKS *LESLIE* BENTUK KHUSUS ORDO
$n \times n$ ($n \geq 4$) DENGAN METODE BLOK

TUGAS AKHIR

oleh:

RIZKY AULIA
12050422610

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 6 Januari 2025

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Ade Novia Rahma, S.Pd., M.Mat.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIP. 19901128 202321 2 045

ii

LEMBAR PENGESAHAN

INVERS MATRIKS *LESLIE* BENTUK KHUSUS ORDO $n \times n$ ($n \geq 4$) DENGAN METODE BLOK

TUGAS AKHIR

oleh:

RIZKY AULIA
12050422610

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 6 Januari 2025

Pekanbaru, 6 Januari 2025
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Wartono, M.Sc.**
Sekretaris	**: Ade Novia Rahma, S.Pd., M.Mat.**
Anggota I	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota II	**: Zukrianto, M.Si.**

iii

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 6 Januari 2025
Yang membuat pernyataan,

RIZKY AULIA
12050422610

v

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamiin.

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan nikmat-Nya. Tiada tempat yang pantas mengadu kecuali pada-Mu, Tiada tempat yang layak untuk meminta kecuali pada-Mu, Kini kubersyukur ya Allah atas kelulusan yang engkau berikan padaku. Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW dengan mengucapkan "allahhummaa sholli'alaa syaidinaa muhammad wa'alaa aalii syaidinaa muhammad".

Karya ini saya persembahkan untuk:

Orang tua tercinta

Untuk almarhum Ayah tercinta. Terima kasih atas doa, dukungan, cinta, dan pengorbanan Ayah yang tak terhingga. Nasihat dan kenangan Ayah akan selalu menjadi pedoman dan kekuatan penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Skripsi ini penulis persembahkan sebagai bentuk cinta dan penghormatan untuk Ayah. Semoga Ayah merasakan kebahagiaan ini di sisi-Nya.

Untuk Umi tersayang. Terima kasih tak terhingga untuk semua yang umi berikan. Setiap kebutuhan penulis, Umi penuhi dengan penuh cinta dan pengorbanan. Umi telah menggantikan peran Ayah dengan keberanian dan kekuatan yang luar biasa, selalu mendukung penulis dengan doa' dan saran. Semoga Umi selalu diberkahi dengan kekuatan dan kebahagiaan yang tiada henti.

Saudara dan kelurga tercinta

Terima kasih atas dukungan, kasih sayang, dan kebersamaan yang selalu menguatkan penulis. Kalian adalah sumber semangat yang tak ternilai, yang selalu ada di setiap langkah penulis. Skripsi ini penulis persembahkan sebagai bentuk rasa cinta dan terima kasih atas segala perhatian dan kebahagiaan yang telah kalian beri.

Dosen pembimbing

Kepada Ibu Ade Novia Rahma, S.Pd, M.Mat, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas kesabaran, keikhlasan, dan semangat yang Ibu berikan dalam membimbing penulis. Terima kasih telah sabar menghadapi setiap kelalaian dan kekurangan penulis, serta memberi arahan yang sangat berharga. Penulis juga berterima kasih atas pengertian dan maaf yang Ibu berikan atas setiap kesalahan yang penulis buat.

Sahabatku

Teman yang tak sengaja menjadi akrab, yang penulis kenal di tahun 2020, di awal perkuliahan. Terima kasih atas segala kenangan yang telah kita lalui bersama sejak 2020 hingga 2024 ini. Terima kasih atas tawa, tangis, dan segala perjalanan yang kita jalani bersama, mulai dari tugas – tugas kuliah yang penuh tantangan hingga momen – momen santai yang tak terlupakan. Dukungan, semangat, dan kebersamaanmu telah menjadi bagian tak terpisahkan dalam proses ini. Semoga persahabatan kita selalu terjaga, dan kita terus berbagi momen indah ke depannya, Semoga kita selalu diberikan keberkahan, kesuksesan, dan kebahagiaan dalam setiap langkah hidup kita, dan terus mencapai impian bersama, apapun yang kita raih di masa depan.

Diriku sendiri

Terima kasih untuk diriku sendiri yang sudah bertahan sejauh ini, melewati hari-hari sulit dan tetap berdiri. Maaf kalau sering terlalu keras pada diri sendiri, memaksakan banyak hal tanpa memberi waktu untuk istirahat. Perjalanan ini masih panjang, tapi aku percaya aku bisa melaluinya dengan kekuatan, kesehatan, semangat dengan penuh harapan.

INVERS MATRIKS *LESLIE* BENTUK KHUSUS ORDO $n \times n$ $(n \geq 4)$ DENGAN METODE BLOK

RIZKY AULIA
12050422610

Tanggal Sidang : 6 Januari 2025
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Matriks *Leslie* merupakan alat yang digunakan untuk memodelkan dinamika populasi dengan memprediksi jumlah dan laju pertumbuhannya. Matriks ini memiliki struktur yang khas, di mana hampir semua entri bernilai 0, kecuali pada baris pertama dan subdiagonalnya. Penelitian ini membahas invers dari matriks *Leslie* bentuk khusus ordo $n \times n$ dengan $n \geq 4$, dengan tujuan untuk mengembangkan metode blok sebagai pendekatan untuk menghitung inversnya. Penelitian ini dilakukan dalam tiga tahap utama. Pertama, matriks *Leslie* bentuk khusus berordo 4×4 hingga 10×10 dibagi menjadi matriks blok 2×2 sesuai dengan ketentuan yang berlaku. Kedua, mencari invers dari submatriks yang *invertible* dengan menggunakan penerapan komplemen *schur*. Ketiga, bentuk umum invers matriks *Leslie* bentuk khusus untuk ordo 4×4 hingga 10×10 dengan menerapkan kembali komplemen *schur*. Pembuktian bentuk umum invers dilakukan berdasarkan definisi Invers. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa invers matriks *Leslie* dalam bentuk khusus dapat dihitung secara efektif menggunakan metode ini, dan menghasilkan teorema baru mengenai bentuk umum invers matriks *Leslie* bentuk khusus ordo $n \times n$.

Kata Kunci: matriks blok 2×2, invers matriks, *invertible*, komplemen *schur*, matriks *Leslie*

INVERSION OF LESLIE MATRIXES OF SPECIAL ORDER $n \times n$ $(n \geq 4)$ BY BLOCK METHODS

RIZKY AULIA
12050422610

Date of Final Exam : January 6, 2025
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

The Leslie matrix is a tool used to model population dynamics by predicting its size and growth rate. This matrix has a typical structure, where almost all entries are 0, except in the first row and its subdiagonals. This research discusses the inverse of a special form Leslie matrix of order $n \times n$ with $n \geq 4$, with the aim of developing the block method as an approach to computing its inverse. This research is conducted in three main stages. First, the special-form Leslie matrices of order 4×4 to 10×10 are divided into 2×2 block matrices according to the applicable provisions. Second, finding the inverse of the invertible submatrix by using the application of Schur complement. Third, the general form of the inverse of the special form Leslie matrix for orders 4×4 to 10×10 by reapplying Schur complement. The proof of the general form of the inverse is done based on the definition of Invers. The result of this research shows that the inverse of Leslie matrix in special form can be calculated effectively using this method, and produces a new theorem regarding the general form of the inverse of special form Leslie matrix of order $n \times n$.

***Keywords**: matrix block 2×2, matrix inverse, invertible, schur complement, Leslie matrix.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Alhamdulillahirabbil'alamiin. Puji syukur kehadirat Allah Subhanallahu Wa Ta'ala atas limpahan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul " Invers Matriks *Leslie* Bentuk Khusus Ordo $n \times n\ (n \geq 4)$ Dengan Metode Blok". Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam, beserta keluarga, para sahabat, dan seluruh pengikutnya yang setia menjalankan sunnah beliau hingga akhir zaman. Penulisan Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat untuk menyelesaikan program studi Strata 1 (S1) pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Penyusunan skripsi ini tentunya tidak terlepas dari bantuan, dukungan, serta doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Sidang dan Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
5. Ibu Ade Novia Rahma, S.Pd., M.Mat. selaku Dosen Pembimbing pada Tugas Akhir dan sekaligus dosen Pembimbing Akademik yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, penjelasan serta petunjuk kepada penulis sehingga dapat menyelesaiakan Tugas Akhir ini.

6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku Dosen Penguji I Tugas Akhir yang telah memberi masukan dan arahan kepada penulis untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
7. Bapak Zukrianto, M.Si. selaku Dosen Penguji II Tugas Akhir yang telah memberi masukan dan arahan kepada penulis untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
8. Bapak/Ibu Dosen di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi khususnya Program Studi Matematika yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu yang sudah membagikan ilmu serta motivasi dalam pelaksanaan Tugas Akhir ini.
9. Orang tua tercinta, almarhum Ayah, Umi, adik – adik, serta seluruh keluarga besar, penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya atas doa yang senantiasa dipanjatkan, perhatian dan kasih sayang yang tak terhingga, serta semangat dan dukungan yang selalu diberikan. Berkat doa tulus dari mereka semua, penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan baik.
10. Risa Indah Sari, sahabat baik penulis, yang telah berjuang bersama dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini serta tak henti – hentinya memberikan dukungan dan semangat sepanjang proses pengerjaannya.
11. WACANA, Terima kasih atas semua momen berharga yang tak akan terlupakan selama penulis menjalani perkuliahan. Setiap kebersamaan, suka dan duka yang terjalin telah memberikan banyak pelajaran dan kenangan indah. Penulis sangat bersyukur bisa bertemu dan berbagi perjalanan ini dengan kalian.
12. Teman-teman seperjuangan Matematika khususnya angkatan 20
13. Semua pihak yang telah banyak membantu penulis baik secara langsung maupun tidak langsung yang selalu memberikan motivasi kepada penulis yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga kebaikan yang mereka berikan menjadi amal kebaikan dan dibalas oleh Allah Subhanahu Wa Ta’ala. Dalam proses penyusunan dan penulisan tugas akhir ini, penulis telah berupaya sebaik mungkin untuk menghindari kekeliruan.

Namun, sebagai manusia yang tidak luput dari kesalahan, penulis menyadari bahwa karya ini masih jauh dari kesempurnaan, sebagaimana pepatah mengatakan, "Tak ada gading yang tak retak." Oleh karena itu, penulis dengan rendah hati mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari para pembaca. Semoga tugas akhir ini dapat memberikan kontribusi yang bermanfaat bagi ilmu pengetahuan dan pihak-pihak yang membutuhkan.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 6 januari 2025

RIZKY AULIA
12050422610

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

Beberapa subbagian akan dibahas pada bab ini, mulai dari latar belakang, rumusan, batasan masalah serta tujuan dan manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

1.1 Latar Belakang

Matriks merupakan sebuah cabang ilmu yang termasuk pokok penting dalam matematika. Matriks sering digunakan sebagai alat untuk menentukan solusi dari suatu sistem persamaan linier. Saat ini banyak jenis matriks yang sudah ditemukan, salah satunya matriks yang dikembangkan oleh Sir Paul *Leslie* pada tahun 1945 yaitu matriks *Leslie* [1].

Banyak penelitian terkait matriks *Leslie*. Biasanya penelitian yang dilakukan adalah untuk menentukan laju pertumbuhan suatu populasi [2],[3]. Seperti penelitian pada tahun 2016 yang dilakukan oleh [4] yang membahas prediksi jumlah laju pertumbuhan Perempuan di Provinsi Riau pada tahun 2017 dengan mengunakan matriks *Leslie*, dimana menghasilkan kesimpulan bahwa pertumbuhan jumlah perempuan di Provinsi Riau cenderung mengalami perkembangan positif atau mengalami peningkatan.

Penelitian selanjutnya yang dilakukan oleh [5] tentang karakteristik matriks *Leslie* dengan ordo 4×4. Dalam pengerjaannya dibutuhkan 3 lemma dan 3 teorema untuk memperoleh karakteristik dari matriks *Leslie* ordo 4×4 tersebut. Tahun 2022, [6] juga melakukan penelitian terkait matriks *Leslie*. Namun peneliti bukan membahas mengenai aplikasi dari matriks *Leslie*, melainkan mencari invers dari matriks *Leslie* bentuk khusus menggunakan adjoin, dengan bentuk khusus dari matriksnya seperti berikut:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & a & \cdots & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \forall\, a \geq 0 \text{ dan } 0 < b \leq 1 \qquad (1.1)$$

Sehingga diperoleh bentuk umum invers dari matriks *Leslie* bentuk khususnya seperti berikut:

$$L_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & -\frac{1}{b} & \cdots & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

Invers matriks tidak hanya bisa diketahui dengan menggunakan metode adjoin [7],[8], tapi juga bisa menggunakan metode komplemen *schur* (metode blok) dan sejumlah metode lainnya. Pembahasan mengenai invers matriks menggunakan komplemen *schur* (metode blok) banyak menjadi fokus penelitian sebelumnya, seperti penelitian yang dilakukan oleh [9] yang membahas invers dari matriks *toeplitz* menggunakan metode blok 2×2 dengan bentuk khusus seperti berikut:

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & a & a & \cdots & a & a & a & a \\ a & 0 & a & \cdots & a & a & a & a \\ a & a & 0 & \cdots & a & a & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 0 & a & a & a \\ a & a & a & \cdots & a & 0 & a & a \\ a & a & a & \cdots & a & a & 0 & a \\ a & a & a & \cdots & a & a & a & 0 \end{bmatrix} \text{dengan } a \in \mathbb{R}$$

Sehingga didapatkan bentuk umum dari invers matriks *toeplitz* bentuk khusus seperti berikut:

$$T_n^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{n-2}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \cdots & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} \\ \frac{1}{(n-1)a} & -\frac{n-2}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \cdots & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} \\ \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & -\frac{n-2}{(n-1)a} & \cdots & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \cdots & -\frac{n-2}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} \\ \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \cdots & \frac{1}{(n-1)a} & -\frac{n-2}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} \\ \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \cdots & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & -\frac{n-2}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} \\ \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \cdots & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & -\frac{n-2}{(n-1)a} \end{bmatrix}$$

Penelitian selanjutnya dilakukan oleh [10] yang membahas mengenai matriks sirkulan khususnya matrisk RSLPFL$_{circfr}$ $(b, 0, \cdots, 0, b)$ menggunakan matriks blok 2×2, dengan bentuk umum seperti berikut:

$$R_n = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2b & -b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2b & -b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2b & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } b \in \mathbb{R}$$

Diperoleh hasil bentuk umum dari matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(b, 0, \cdots, 0, b)$ adalah seperti berikut:

$$R_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{1}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-4)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} \\ \frac{2}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^2}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2^{(n-1)})b} \\ \frac{2^2}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^2}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^3}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2}{(1+2^{(n-1)})b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-6)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-5)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2^{(n-1)})b} \\ \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-5)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} \\ \frac{2^{(n-1)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan berbagai penelitian yang telah dipaparkan sebelumnya, penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian invers matriks *Leslie* dalam konteks teorema matematika murni dengan judul kajian "**Invers Matriks *Leslie* Bentuk Khusus Ordo $\boldsymbol{n \times n}$ $(\boldsymbol{n \geq 4})$ Dengan Metode Blok**". Penelitian ini berfokus pada bentuk khusus matriks sesuai dengan Persamaan (1.1). Meskipun invers matriks *Leslie* dengan bentuk khusus yang sama telah diteliti sebelumnya, penelitian tersebut menggunakan pendekatan yang berbeda, yaitu metode adjoin, seperti yang telah dijelaskan sebelumnya.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan bentuk umum dari invers matriks *Leslie* bentuk khusus dari Persamaan (1.1) menggunakan metode komplemen *schur* (metode blok)?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini terdapat sejumlah batasan masalah yang bertujuan agar penelitian ini dapat dilakukan secara terarah, diantaranya:

1. Matriks yang dibahas adalah matriks *Leslie* bentuk khusus sesuai pada Persamaan (1.1).
2. Metode blok yang digunakan adalah metode blok 2×2.
3. Cara yang digunakan untuk memblok matriks adalah cara 1 dan 3 pada matriks yang berordo 4×4 sampai 10×10.
4. Menggunakan Teorema 2.3 dan Teorema 2.5 bagian (ii) dan bagian (iv).

1.4 Tujuan Masalah

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan bentuk umum dari invers matriks *Leslie* bentuk khusus sesuai pada Persamaan (1.1) dengan ordo $n \times n$ dimana $n \geq 4$ menggunakan metode komplemen *schur* (metode blok).

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian diatas adalah:

a. Bagi penulis

Harapan penulis dapat memperluas wawasan ilmu matematika yang telah dipelajari untuk menelaah masalah mengenai matriks, khususnya matriks *Leslie*, metode blok dan invers dari suatu matriks.

b. Bagi lembaga pendidikan

Sebagai bahan referensi yang bisa memberikan solusi agar memudahkan pembaca dalam menyelesaikan suatu masalah yang berkaitan dengan invers matriks.

1.6 Sistematika Penelitian

Sistematika penulisan proposal tugas akhir ini terdiri dari pokok-pokok permasalahan yang diuraikan menjadi beberapa bagian yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab I ini akan dijelaskan latar belakang pemilihan judul dengan acuan pada penelitian terdahulu yang berhubungan mengenai invers matriks dengan blok dan matriks *Leslie*, setelahnya menetapkan rumusan dan batasan masalah serta tujuan dan manfaat dari penelitian disertai dengan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab II berisi tentang matriks dan operasi matriks, matriks *Leslie*, matriks blok, komplemen *schur* dan invers yang menjadi dasar atau landasan pada penelitian ini.

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab III berisi langkah – langkah yang dilakukan pada penelitian ini untuk memperoleh bentuk umum dari invers matriks *Leslie* bentuk khusus dengan ordo $n \times n$ dimana $n \geq 4$ menggunakan metode komplemen *schur* (metode blok).

BAB IV PEMBAHASAN

Bab IV berisi penjelasan langkah – langkah dalam menentukan invers matriks *Leslie* bentuk khusus dengan ordo $n \times n$ dimana $n \geq 4$ menggunakan matriks blok 2×2.

BAB V PENUTUP

Pada bab terakhir ini berisikan kesimpulan dan juga saran dari hasil penelitain yang telah penulis lakukan.

BAB II
LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dipaparkan sejumlah teori pendukung yang sekaligus di jadikan landasan teori, sebagai panduan bagi penulis untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini yaitu:

2.1 Matriks dan Operasi Matriks

Definisi 2.1 Matriks merupakan jajaran empat persegi panjang dari bilangan – bilangan. Bilangan – bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Matriks dilambangkan menggunakan huruf besar atau kapital sedangkan entri – entrinya dilambangkan dengan menggunakan huruf kecil [11]. Menurut matriks dapat disebut berdasarkan ukuran dengan m baris dan n kolom, atau matriks $m \times n$, sehingga bentuk umum dari matriks $m \times n$ seperti berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

terdapat sejumlah operasi yang dapat digunakan pada matriks diantaranya:

a. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Penjumlahan dan pengurangan dua matriks $m \times n$, yaitu $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ yang ditulis $A + B$ dan $A - B$ merupakan matriks $m \times n$ yang diperoleh dengan menjumlahkan atau mengurangkan unsur – unsur yang seletak dari A dan B[12]. Perlu diperhatikan bahwa penjumlahan dan pengurangan matriks hanya dapat dilakukan apabila kedua matriks mempunyai ukuran yang sama. Maka unsur dari $A + B$ adalah:

$$a_{ij} + b_{ij} \begin{cases} i = 1,2,\cdots,m \\ j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

Contoh 2.1:

Berapakah hasil dari penjumlahan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \\ -3 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$A + B = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 8 & 10 \\ 2 & -4 & 5 & 5 \\ -3 & 13 & 6 & -2 \\ -1 & 3 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

Begitu pula untuk pengurangan, maka unsur $A - B$ adalah:

$$a_{ij} - b_{ij} \begin{cases} i = 1,2,\cdots,m \\ j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

Contoh 2.2:

Berapakah selisih dari dua matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$A - B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 & 8 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 8 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b. Perkalian Matriks dengan Skalar

Hasil dari perkalian matriks dengan skalar dapat di peroleh dengan mengalikan setiap entri pada matriks dengan skalar tersebut [12]. Misalkan z adalah sebarang skalar yang akan dikalikan dengan matriks A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Maka,

$$zA = \begin{bmatrix} za_{11} & za_{12} & \cdots & za_{1n} \\ za_{21} & za_{22} & \cdots & za_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ za_{m1} & za_{m2} & \cdots & za_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.3:

Berapakah hasil kali skalar dari matriks A berikut dengan suatu bilangan yaitu 2.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$2A = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 8 & 6 \\ 14 & 12 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 12 \\ 10 & 14 & 14 & 10 \end{bmatrix}$$

c. Perkalian Matriks

Perkalian matriks dapat dipandang sebagai perkalian baris – baris dan kolom- kolom [12]. Jika suatu matriks A yang memiliki ordo $m \times p$ akan dikalikan dengan matriks B yang berordo $p \times n$ maka akan menghasilkan matriks C dengan ordo $m \times n$. Pada perkalian matriks harus diperhatikan bahwa jumlah kolom pada matriks A harus sama dengan jumlah baris pada matriks B. Jika syarat ini tidak terpenuhi maka hasil kali matriks tidak dapat diidentifikasi. Misalkan $A = 4 \times 4$ dan $B = 4 \times 1$ maka matriks C akan berordo 4×1, seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{41} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.4:

Berapakah hasil dari perkalian matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Perkalian antara matriks A dan B diatas akan menghasilkan matriks dengan ukuran 2×1 sehingga:

$$C = \begin{bmatrix} 28 \\ 58 \end{bmatrix}$$

2.2 Matriks *Leslie*

Definisi 2.2 [4] matriks *Leslie* adalah suatu matriks yang digunakan untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi. Matriks *Leslie* merupakan matriks yang memiliki susunan yang unik, dimana baris pertama berisikan entri – entri dari tingkat kesuburan, kemudian subdiagonal dari matriks *Leslie* berisikan entri – entri dari tingkat ketahanan hidup, sedangkan entri – entri yang lainnya bernilai nol. Bentuk umum dari matriks *Leslie* adalah:

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_i \geq 0 \text{ untuk } i = 1,2,\cdots,n \\ 0 < b_i \leq 1 \text{ untuk } i = 1,2,\cdots,n-1 \end{matrix}$$

Bentuk umum dari matriks *Leslie* ini juga dapat di perbesar seperti berikut:

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Matriks Blok

Definisi 2.4 [13] Matriks blok adalah matriks yang diperoleh dengan cara membagi matriks dengan memasukkan garis horizontal diantara baris dan garis vertikal diantara kolom, sehingga diperoleh submatriks dengan ukuran lebih kecil. Tujuan dari ukuran matriks dibuat lebih sederhana adalah agar mempermudah operasi pada matriks.

Pada penelitian ini matriks blok yang akan dibahas lebih lanjut adalah matriks blok 2×2, yaitu sebuah matrik yang dipartisi oleh garis yang memiliki 2 baris dan 2 kolom. Misalkan P adalah matrik $m \times n$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ a_{(m-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1)(k-1))} & a_{(m-(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Setelah itu dilakukan blok pada matriks tersebut dengan cara menyisipkan ngaris vertikal dan horizontal sehingga matriks menjadi seperti berikut:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ \hline a_{(m-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1)(k-1))} & a_{(m-(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \tag{2.1}$$

Sehingga dihasilkan beberapa submatriks, yang dimisalkan dengan A, B, C dan D seperti berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1)(k-1))} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sehingga, $P = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

Contoh 2.5:

Tentukan cara memblok matriks *Leslie* berikut menjadi matriks blok 2×2.

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Matriks diatas mempunyai ordo 3×3 dimana terdapat 3 baris dan 3 kolom, sehingga terdapat beberapa kemungkinan cara memblok matriks tersebut, yaitu:

Cara 1:

$$L = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ \hline 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{array}\right]$$

Cara 2:

$$L = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 2 & 2 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/3 & 0 \end{array}\right]$$

Cara 3:

$$L = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/3 & 0 \end{array}\right]$$

Cara 4:

$$L = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 2 & 2 \\ \hline 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{array}\right]$$

2.4 Determinan Matriks

Menurut [11] determinan adalah suatu fungsi khusus yang mengasosiasikan suatu bilangan real dengan matriks bujursangkar. Determinan juga dapat di artikan sebagai selisih antara perkalian diagonal – diagonal utama dengan perkalian diagonal – diagonal sekunder.

Teorema 2.1 [11] misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Jika A mempunyai satu baris atau kolom bilangan nol, maka $|A| = 0$.

Teorema 2.2 [11] jika A adalah suatu matriks bujursangkar dengan dua baris atau dua kolom yang proporsional (sebanding), maka det $(A) = 0$.

2.5 Komplemen *Schur*

Menurut [14] komplemen *schur* biasa digunakan pada matriks bujur sangkar yang berukuran besar, dimana matriks tersebut sebelumnya sudah dilakukan blok atau dipartisi. Komplemen *schur* merupakan suatu metode yang banyak digunakan dalam masalah matriks yang sering kali mengandung pertidaksamaan matriks.

Diberikan matriks:

$$\underset{(j+k)\times(l+m)}{P} = \begin{pmatrix} \underset{j\times l}{A} & \underset{j\times m}{B} \\ \underset{k\times l}{C} & \underset{k\times m}{D} \end{pmatrix}$$

1. Jika A merupakan suatu matriks yang *invertible* maka dapat diperoleh komplemen *schur* dari A yaitu $D - CA^{-1}B$
2. Jika B merupakan suatu matriks yang *invertible* maka dapat diperoleh komplemen *schur* dari B yaitu $C - DB^{-1}A$
3. Jika C merupakan suatu matriks yang *invertible* maka dapat diperoleh komplemen *schur* dari C yaitu $B - AC^{-1}D$
4. Jika D merupakan suatu matriks yang *invertible* maka dapat diperoleh komplemen *schur* dari D yaitu $A - BD^{-1}C$

2.6 Invers Matriks

Definisi 2.5 [15] jika A merupakan sebuah matriks bujur sangkar dan terdapat matriks B yang memiliki ukuran yang sama dengan matriks A lalu diperoleh $AB = BA = I$, maka A disebut *invertible* atau memiliki sifat dapat dibalik dan B merupakan invers dari matriks A. Sehingga dapat dijabarkan dengan $B = A^{-1}$, namun jika hasil dari B tidak dapat didefinisikan atau tidak dapat ditemukan, maka A disebut matriks singular.

Teorema 2.3 [16] misalkan P merupakan matriks bujur sangkar, maka:

i. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ akan memiliki invers jika dan hanya jika A dan D memiliki invers, maka $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.

ii. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ akan memiliki invers jika dan hanya jika B dan C memiliki invers, maka $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ C^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.4 [16] misalkan P merupakan matriks bujur sangkar, maka:

i. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$ akan memiliki invers jika dan hanya jika A dan D memiliki invers, maka $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$.

ii. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$ akan memiliki invers jika dan hanya jika A dan D memiliki invers, maka $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.

Teorema 2.5 [16] misalkan P merupakan matriks bujur sangkar, maka:

i. Misalkan submatriks A pada matriks P pada Persamaan (2.1) adalah nonsingular. Matriks pada Persamaan (2.1) punya invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari A punya invers dan $(D - CA^{-1}B)$ juga memiliki invers, maka didapat:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

ii. Misalkan submatriks D pada matriks P pada Persamaan (2.1) adalah nonsingular. Matriks pada Persamaan (2.1) punya invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari D punya invers dan $(A - BD^{-1}C)$ juga memiliki invers, maka didapat:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$$

iii. Misalkan submatriks B pada matriks P pada Persamaan (2.1) adalah nonsingular. Matriks pada Persamaan (2.1) punya invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari B punya invers dan $(C - DB^{-1}A)$ juga memiliki invers, maka didapat:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}$$

iv. Misalkan submatriks C pada matriks P pada Persamaan (2.1) adalah nonsingular. Matriks pada Persamaan (2.1) punya invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari C punya invers dan $(B - AC^{-1}D)$ juga memiliki invers, maka didapat:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1} & C^{-1} + C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & -(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$$

Teorema 2.6 [16] misalkan P merupakan matriks bujur sangkar, maka:

i. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$ akan memiliki invers jika dan hanya jika B dan C memiliki invers, maka $P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

ii. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ akan memiliki invers jika dan hanya jika B dan C memiliki invers, maka $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$.

Contoh 2.6:

Tentukan invers matriks dari Contoh 2.5 diatas.

Dari contoh diatas ada 2 cara yang bisa digunakan, yaitu cara 1 dan cara 3. Berdasarkan cara 1 maka didapat 4 submatriks yang dimisalkan dengan:

$$A = [2 \quad 2], B = [2], C = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}, \text{dan } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian blok matriks C menjadi matriks 2×2

$$C = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}$$

Misalkan $K = 0, L = 1/3, M = 1/3$ dan $N = 0$.

Berdasarkan Teorema 2.3(i) untuk memperoleh invers dari C maka dimisalkan dengan

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} E' & F' \\ G' & H' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{bmatrix}$$

$$E' = K^{-1} = (1/3)^{-1} = 3$$

$$F' = 0$$

$$G' = 0$$

$$H' = N^{-1} = (1/3)^{-1} = 3$$

Maka,

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} E' & F' \\ G' & H' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan invers dari matriks L dengan memisalkan $L^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ dengan menggunakanb Teorema 2.5 bagian (iv) sebagai berikut.

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1} & C^{-1} + C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & -(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$$

$$G = (B - AC^{-1}D)^{-1} = \left([2] - [2 \quad 2] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = [2]^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$E = -C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1} = -C^{-1}DG = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{1}{2} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = -(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} = -GAC^{-1} = \left[-\frac{1}{2} \right] [2 \quad 2] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= [-3 \quad -3]$$

$$F = C^{-1} + C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} = C^{-1} + C^{-1}DGAC^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [2 \quad 2] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh,

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/2 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Untuk cara selanjutnya dilakukan dengan langkah yang sama.

BAB III

METODE PENELITIAN

Penelitian ini akan dilakukan dengan menerapkan langkah – langkah sebagai berikut:

1. Diberikan sebuah matriks *Leslie* bentuk dari Persamaan (1.1).
2. Mempartisi atau memblok matriks dari Persamaan (1.1) yang berordo 4×4 hingga ordo 10×10 dengan menggunakan matriks blok 2×2 yang masing – masingnya memiliki submatriks yang dimisalkan dengan A, B, C dan D.
3. Mengaplikasikan penerapan komplemen *schur* berdasarkan Teorema 2.3 bagian (i) dan Teorema 2.5 bagian (ii) dan (iv) pada submatriks berukuran besar yang sudah diblok secara berulang sehingga menghasilkan matriks blok 2×2 untuk menentukan invers dari submatriks A, B, C dan D yang *invertible* dari Persamaan (1.1) berordo 4×4 hingga ordo 10×10.
4. Menentukan invers dari matriks *Leslie* pada Persamaan (1.1) yang berordo 4×4 hingga 10×10 dengan matriks blok 2×2 melalui penerapan komlemen *schur* berdasarkan Teorema 2.5 bagian (i) dan (iv)
5. Mengamati dan menduga bentuk umum dari invers matriks *Leslie* dari Persamaan (1.1) yang berordo 4×4 sampai dengan ordo 10×10.
6. Membuktikan bentuk umum dari invers matriks *Leslie* dari Persamaan (1.1) dengan melakukan pembuktian $LL^{-1} = L^{-1}L = I$.
7. Menyelesaikan contoh soal dengan mengaplikasikan bentuk umum dari invers matriks *Leslie* tersebut.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Penelitian ini berhasil mengembangkan metode blok untuk menghitung invers matriks *Leslie* bentuk khusus ordo $n \times n$ dengan $n \geq 4$. Metode yang digunakan terbukti efektif dan valid, sebagaimana didukung oleh penerapan contoh-contoh. Melalui tiga tahapan utama yaitu pembentukan blok, penerapan komplemen *schur* pada submatriks yang *invertible* dan penentuan bentuk umum invers. Penelitian ini berhasil mengembangkan teorema baru mengenai invers matriks *Leslie* dalam bentuk khusus. Oleh karena itu, penelitian ini memberikan kontribusi penting terhadap pemahaman dan penerapan invers matriks *Leslie*, baik dalam ranah matematika murni maupun dalam model dinamis populasi. Berikut adalah teorema baru terkait invers matriks *Leslie* berbentuk khusus $n \times n$ dengan $n \geq 4$, yang disusun menggunakan pendekatan matriks blok 2×2:

$$L_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & -\frac{1}{b} & \cdots & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

5.2 Saran

Dalam pembahasan sebelumnya, penulis telah menguraikan langkah-langkah dan metode untuk menentukan invers matriks *Leslie* dalam bentuk khusus sesuai dengan Persamaan (1.1) dengan ordo $n \times n$ di mana $n \geq 4$, menggunakan pendekatan matriks blok 2×2. Adapun saran dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini memberikan kesempatan untuk membandingkan metode blok yang diusulkan dengan metode lain selain metode adjoin yang sudah ada.
2. Bagi pembaca yang tertarik, topik ini dapat dijadikan referensi atau dasar untuk pengembangan lebih lanjut, misalnya dalam menangani matriks *Leslie* yang lebih kompleks.
3. Penelitian ini juga bisa menggunakan analisis matematis dan perangkat lunak seperti MATLAB atau *Python*, serta penerapan teknologi kecerdasan buatan *(AI)*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Y. D. Pratiwi, N. Hidayati, M. Mariska, S. I. Sagita, and A. E. Gusaynsan, "Aplikasi Matriks Leslie untuk Memproyeksi Jumlah Penduduk Perempuan dan Laju Pertumbuhan Penduduk di Kabupaten Banyumas Tahun 2027," *Proceedings Series on Physical & Formal Sciences*, vol. 6, pp. 75–80, Oct. 2023, doi: 10.30595/pspfs.v6i.855.

[2] D. Anggreini and R. C. Hastari, "Penerapan matriks Leslie pada angka kelahiran dan harapan hidup wanita di Provinsi Jawa Timur," *Pythagoras: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 12, no. 2, pp. 109–122, 2017.

[3] H. Mustofa, "Analisis Jumlah Pertumbuhan Penduduk Perempuan Kota Pontianak Menggunakan Metode Matriks Leslie," *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 8, no. 4, 2019.

[4] C. C. Marzuki, Y. Muda, and N. Hasanah, "Aplikasi Matriks Leslie Untuk Memprediksi Jumlah Dan Laju Pertumbuhan Perempuan Di Provinsi Riau Pada Tahun 2017," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 2, no. 1, pp. 37–48, 2016.

[5] C. C. Marzuki *et al.*, "Karakterisasi Matriks Leslie Ordo Empat," *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, vol. 13, no. 1, pp. 108–114, 2015.

[6] A. N. Rahma, R. Arisanti, C. M. C. Marzuki, and F. Aryani, "Invers Matriks Leslie Bentuk Khusus Ordo $n \times n$ $(n \geq 4)$," *Jurnal Matematika Integratif*, vol. 18, no. 2, pp. 127–139, 2022.

[7] M. E. Karnain and F. Aryani, "Invers Matriks Positif Menggunakan Metode Adjoin," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 3, no. 1, pp. 45–52, 2017.

[8] A. N. Rahma, R. H. Vitho, R. Rahmawati, and E. Saftri, "Invers Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo $n \times n$ $(n \geq 3)$ Menggunakan Adjoin," *Jurnal Lebesgue: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Matematika dan Statistika*, vol. 4, no. 1, pp. 199–210, 2023.

[9] Teddy Irawan, "Invers matriks toeplitz bentuk khusus n × n (n ≥ 3) dengan matriks blok 2 × 2," Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru, 2022.

[10] Rahel Edrian, "Invers matriks RSLPFLcircfr bentuk khusus (b,0,⋯,0,b) berordo n × n dengan n ≥ 3 menggunakan matriks blok 2 × 2," Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru, 2022.

[11] Anton Howard and Rorres Chris, *Aljabar Linier Elementer* , 8th ed. Jakarta : Erlangga, 2004.

[12] N. A. Lutvi and N. Ariyanti, *Dasar - Dasar Aljabar Linier Elementer* . Sidoarjo: UMSIDA Press, 2020.

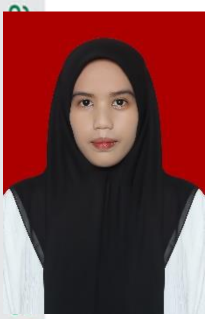
[13] I. Ilhamsyah, H. Helmi, and F. Fran, "Determinan dan Invers Blok 2 × 2," *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 6, no. 03.

[14] M. Redivo-Zaglia, "Pseudo-Schur complements and their properties," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 50, no. 3–4, pp. 511–519, Sep. 2004, doi: 10.1016/j.apnum.2004.05.004.

[15] H. Anton and C. Rorres, *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons, 2013.

[16] T. T. Lu and S. H. Shiou, "Inverses of 2 × 2 block matrices," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 43, no. 1–2, pp. 119–129, Jan. 2002, doi: 10.1016/S0898-1221(01)00278-4.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Rizky Aulia, lahir di Bikittinggi, Sumatera Barat pada tanggal 10 Desember 2001. Merupakan anak sulung dari Alm. Bapak Abdul Hakim Lubis dan Ibu Nurhidayati A. dari empat bersaudara lainnya yang bertempat tinggal di Jorong Bandar, Kecamatan Gunung Tuleh, Kabupaten Pasaman Barat, Provinsi Sumatera Barat. Berikut riwayat pendidikan penulis.

Tahun 2006 penulis mulai memasuki Taman Kanak – kanak (TK) Al – Falah Bandar dan menyelesaikannya dalam waktu 2 (dua) tahun yaitu pada tahun 2008. Kemudian memasuki bangku Sekolah Dasar (SD) pada tahun 2008 di SD Negeri 01 Gunung Tuleh dan menyelesaikannya dalam jangka waktu 6 (enam) tahun yaitu pada tahun 2014. Selanjutnya melanjutkan pendidikan di bangku Sekolah Menengah Pertama Islam Terpadu (SMP IT) Darul Hikmah Pasaman Barat selama 3 (tiga) tahun dan menyelesaikannya pada tahun 2017. Pada tahun 2017 Melanjutkan 3 (tiga) tahun bangku pendidikan Di Madrasah Aliyah Negeri (MAN) 2 Kota Bukittinggi dan menyelesaikannya pada tahun 2020. Di tahun yang sama penulis lulus tes masuk perguruan tinggi dan terdaftar di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim (UIN SUSKA) Riau dalam program studi S1 Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Dalam masa perkuliahan penulis telah melakukan Kerja Praktek di PT Andalas Agro Industri pada tahun 2023 dan di tahun yang sama penulis juga menyelesaikan program pengabdian kepada masyarakat yakni Kuliah Kerja Nyata di Desa Pangkalan Bunut Kabupaten Pelalawan. Pada awal tahun 2024 tepatnya di tanggal 04 Januari penulis sudah melaksanakan Seminar Proposal yang di bimbimbing oleh Ibu Ade Novia Rahma, S.Pd., M.Mat. satu tahun setelah dilakukannya seminar proposal tepatnya pada tanggal 06 Januari 2025 penulis dinyatakan lulus Ujian Sarjana dengan judul penelitian **"Invers Matriks *Leslie* Bentuk Khusus Ordo $\boldsymbol{n \times n}$ $(\boldsymbol{n \geq 4})$ Dengan Metode Blok"**.