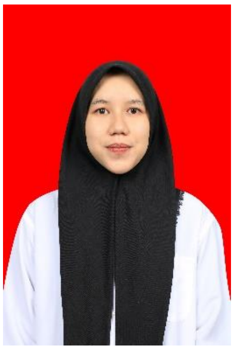
TRACE MATRIKS ANTI SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Program Studi Matematika

Oleh :

PUTRI ANGGRAINI
11750424987



FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2024

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Ria
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS ANTI SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

oleh:

PUTRI ANGGRAINI
11750424987

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan Tugas Akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 03 Juli 2024

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIP.19770913 200604 2 002

ii

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS ANTI SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

oleh:

PUTRI ANGGRAINI
11750424987

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 03 Juli 2024

Pekanbaru, 03 Juli 2024
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

KEMENTERIAN AGAMA
UIN SULTAN SYARIF KASIM RIAU
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Sri Basriati, M.Sc.**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota I	**: Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**
Anggota II	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si.**

iii

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan ssepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 03 Juli 2024
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
7B18EAKX795408982

PUTRI ANGGRAINI
11750424987

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamiin. Puji syukur tuturkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan nikmat-Nya. Sehingga penulis dapat menuntut ilmu dan belajar banyak hal. Semoga kita semua selalu dalam lindungan Allah Subhanahu Wa Ta"ala. Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi kita, Muhammad Shalallahu „Alaihi Wasalam dengan mengucapkan "Allahhummaa shalli'alaa sayyidinaa muhammad wa'alaa aalii sayyidinaa muhammad". Beliau telah membawa kita dari zaman jahiliyah menuju zaman yang penuh ilmu pengetahuan.

Untuk Mama Tercinta, terima kasih yang tak terhingga karena telah menjadi orang tua yang hebat karena telah menjadi sosok ayah dan ibu sekaligus.

Untuk Adik Tersayang, terima kasih karena telah menemani dan memberi dukungan kepadaku.

Untuk Oom dan Tante, terima kasih ku ucapkan yang telah memberi dukungan baik secara material dan emosional.

Untuk Bu Fitri Aryani, M.Sc dan Dosen-Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, terima kasih banyak telah membimbing saya dan memberikan ilmu serta arahan sehingga saya dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Untuk Semua Teman terima kasih banyak karena telah mendengarkan keluh kesah saya dan semoga kita sukses dunia akhirat.

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

TRACE MATRIKS ANTI SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

PUTRI ANGGRAINI
NIM : 11750424987

Tanggal Sidang : 03 Juli 2024
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas KM 15 No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tujuan dari tugas akhir ini adalah mendapatkan formula umum *trace* matriks anti simetris bentuk khusus. Secara spesifik matriks anti simetris yang dibahas adalah matriks ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat. Berdasarkan penelitian diperoleh bentuk umum $tr(A_4{}^n) = 0$ untuk n bilangan bulat ganjil, $tr(A_4{}^n) = (2^{2+\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}})a^n$ untuk n bilangan bulat genap, $tr(A_4{}^{-n}) = 0$ untuk n bilangan bulat ganjil dan $tr(A_4{}^{-n}) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-2}a^n}$ untuk n bilangan bulat genap.

Kata kunci: Trace Matriks, Invers, Matriks Anti Simetris,Perpangkatan Matriks dan Induksi Matemstika.

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

TRACE ANTI-SYMMETRICAL MATRIX IN SPECIAL SHAPED 4×4 INTEGER RATES

PUTRI ANGGRAINI
NIM : 11750424987

Date of Final Exam :July 03, 2024
Date of Graduation :

Mathematics Program Study
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

The aim of this final assignment is to obtain a general formula for anti-symmetric trace matrices of special shapes. Specifically, the anti-symmetric matrix discussed is a 4×4 matrix of integer rank. Based on research,obtain the general form $tr({A_4}^n) = 0$ for n odd integers, $tr({A_4}^n) = (2^{2+\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}})a^n$ for n even integers, $tr({A_4}^{-n}) = 0$ for n odd integers and $tr({A_4}^{-n}) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-2}a^n}$ for n even integers.

Keywords: *Trace Matrix, Inverse, Anti-Symmetric Matrix, Matrix Expansion and Mathematical Induction.*

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamiin. Puji syukur kepada Allah Subhanahu Wa Ta'ala karena atas rahmat, karunia, nikmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"*Trace* Matriks Anti Simetris Berbentuk Khusus 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat".** Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Shalallahu 'Alahi Wasallam, semoga kita semua mendapat syafaat-nya. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis banyak sekali mendapatkan bimbingan, arahan, dan masukan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih khususnya kepada Sang Ibunda Susi Susant yang selalu mendo'akan dan melimpahkan kasih sayang kepada penulis. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Khairunas, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr.Hartono, M.Pd., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Bapak Nilwan Adiraja, S.Pd., M.Sc., selaku Sekretaris Pembimbing Akademik Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
5. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si., selaku Pembimbing Akademik Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc., selaku Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, penjelasan serta petunjuk kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

7. Ibu Dr.Yuslenita Muda, M.Sc., selaku Penguji I yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
8. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si., selaku Penguji II yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
9. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
10. Keluarga tercinta dan terkasih yang telah memberikan dukungan, materi dan doa yang tak henti- hentinya serta kasih sayang yang tulus kepada penulis
11. Sahabat-sahabat terbaik seperjuangan penulis Ratih Julianti dan Resi Arisanti, terima kasih atas bantuan, masukan dan segala dukungan yang telah diberikan kepada penulis..
12. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal penyusunan tugas akhir hingga selesai, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua. *Aamiin ya Rabbal'alamiin*.

Pekanbaru, 03 Juli 2024

Putri Anggraini

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR ISI

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pembahasan mengenai matriks sangat menarik, disebabkan suatu matriks pada aljabar dapat dioperasikan ke dalam berbagai operasi matriks. Terdapat beberapa jenis operasi matriks yang dapat dilakukan yaitu perkalian, determinan, invers, *trace* dan lain sebagainya. Pada penelitian kali ini menggunakan operasi matriks yaitu *trace* matriks. *Trace* matriks merupakan jumlahan dari entri-entri pada diagonal utama dari matriks bujursangkar [1].

Pembahasan kali ini mengenai *trace* matriks dari matriks yang berpangkat. Untuk mendapatkan *trace* matriks berpangkat maka harus dicari terlebih dahulu bentuk umumnya. Langkah selanjutnya adalah menjumlahkan entri diagonal utama pada matriks tersebut, maka didapatlah hasil *trace* matriks berpangkat tersebut.

Beberapa penelitian tentang *trace* matriks berpangkat telah dilakukan pada tahun 2015 oleh [2], penelitian tersebut membahas mengenai *trace* matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif dengan bentuk matriks sebagai berikut :

$a = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \forall\, a, b, c, d \in R.$ Adapun bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif sebagai berikut :

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n\,[n-(r+1)][n-(r+2)] \ldots [n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r},$$

untuk n ganjil.

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n\,[n-(r+1)][n-(r+2)] \ldots [n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r},$$

untuk n genap.

Mengenai *trace* matriks real berpangkat bilangan bulat negatif telah dibahas juga oleh [3] pada tahun 2018, dengan bentuk matriks sebagai berikut :

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$a = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\forall\, a, b, c, d \in R$. Adapun bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif sesebagai berikut :

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n\,[n-(r+1)][n-(r+2)] \ldots [n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}$$

untuk n ganjil.

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n\,[n-(r+1)][n-(r+2)] \ldots [n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}$$

untuk n genap.

Selanjutnya pada tahun yang sama oleh [4] telah meneliti mengenai *trace* matriks yang berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dengan matriks A sebagai berikut :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix}$ dengan $a, b \in R$, dan nilai *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif adalah :

$tr(A^n) = 1 + (a+b)^n$.

Masih mengenai *trace* matriks berpangkat [5] membahas bentuk umum dari *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif dengan matriks yang digunakan adalah :

$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$ $\forall\, a \in R$. Dan hasil *trace* matriksnya diperoleh yaitu :

$tr(A^n) = (3a)^n$.

Penelitian oleh [6] pada tahun 2021 telah meneliti mengenai *trace* matriks berbentuk khusus 4×4 berpangkat bilangan bulat dengan matriks A_4 sebagai berikut :

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix}$ dengan $b \in R$, dan nilai *trace* matriks A_4 berpangkat bilangan bulat :

$tr(A_4{}^{-n}) = ((-1)^n 3^{n+1} + 1)3^{-n} b^{-n}$.

Selanjutnya penelitian [7] juga membahas mengenai bentuk umum dari *trace* matriks 4×4 berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan adalah matriks segitiga atas (A_4) dan matriks segitiga bawah (B_4) dengan bentuk matriks sebagai berikut :

$$(A_4) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \forall\, a, b, c, d \in R,$$

$$(B_4) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix} \forall\, a, b, c, d \in R,$$

Penelitian tersebut memperoleh hasil bentuk umum *trace* matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat positif yaitu :

$$tr(A_4{}^n) = tr(B_4{}^n) = 4(a^n).$$

Telah dibahas oleh [8] mengenai *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat dengan matriks yang digunakan adalah :

$A = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix} \forall\, b \in R$. Dan hasil *trace* matriks A berpangkat bilangan bulat diperoleh yaitu :

$tr(A_5{}^n) = (4^n - (-1)^{n+1}4)b^n$. Untuk berpangkat bilangan bulat positif.

$tr(A_5{}^n) = \frac{(-1)^n 4^{n+1} + 1}{4^n b^n}$. Untuk berpangkat bilangan bulat negatif.

Pada tahun 2019 [9] juga membahas bentuk umum dari *trace* matriks simetris bentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat negatif. Matriks yang digunakan adalah :

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$A_n = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & \cdots & b \\ b & 0 & b & b & \cdots & b \\ b & b & 0 & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & b & \cdots & 0 \end{bmatrix} \forall\, b \in R, b \neq 0.$ Hasil *trace* A_n berpangkat bilangan bulat negatif yang diperoleh yaitu :

$tr(A_n)^{-m} = \frac{(-1)^m(n-1)^{m+1}+1}{(n-1)^{m+1}b^m}.$

Selanjutnya [10] telah meneliti mengenai *trace* matriks simetris bentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif dengan matriks A_n sebagai berikut :

$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & \cdots & b \\ b & 0 & b & b & \cdots & b \\ b & b & 0 & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & b & \cdots & 0 \end{bmatrix} \forall\, b \in R, b \neq 0.$ Dan hasil *trace* yang diperoleh yaitu :

$tr(A_{n\times n})^m = ((n-1)^m - (-1)^{m+1}(n-1))b^m.$

Pada tahun 2019 [11] membahas *trace* matriks khusus berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan adalah :

$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_i & a_i & \cdots & a_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{bmatrix} \forall\, a_i \in R, i = 1, 2, \cdots, n.$ Hasil *trace* yaitu :

$tr(A_n)^m = (\sum_{i=1}^{n} a_i)^m, \forall n \geq 2$ dan $m \in Z^+.$

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan, diketahui bahwa belum ada yang membahas tentang *trace* matriks berpangkat dari matriks anti simetris. Jadi, penulis tertarik untuk membahas mengenai *trace* matriks anti simetris berpangkat bilangan bulat, maka penulis mengambil judul proposal tugas akhir ini dengan judul **"*Trace* Matriks Anti Simetris Berbentuk Khusus 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat".**

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, dapat dirumuskan suatu masalah yaitu bagaimana bentuk umum *trace* matriks anti simetris berbentuk khusus 4×4 dengan pangkat bilangan bulat ?

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini diperlukannya batasan masalah untuk mencegah meluasnya permasalahan yang ada dan agar pembahasan lebih terarah, adapun batasan masalahnya adalah matriks yang digunakan matriks anti simetris berbentuk khusus yaitu :

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix} \forall a \in R,\ a \neq 0. \qquad (1.1)$$

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks anti simetris berbentuk khusus 4×4 pada Persamaan (1.1) berpangkat bilangan bulat.

1.5 Manfaat Penelitian

Beberapa manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menambah wawasan yang lebih luas bagi penulis serta pembaca mengenai materi tentang *trace* matriks, khususnya untuk bentuk umum dari *trace* matriks anti simetris berbentuk khusus $\mathbf{4} \times \mathbf{4}$ berpangkat bilangan bulat.
2. Untuk menambah wawasan bagi penulis dan dijadikan referensi baru pada dunia pendidikan dalam bidang matematika.

1.6 Sistematika Penelitian

Sistematika penulisan pada proposal tugas akhir ini dibagi menjadi beberapa bab. Berikut penjelasan masing-masing bab:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan landasan teori yang digunakan matriks anti simetris, perkalian matriks dan *trace* matriks, serta beberapa definisi dan teorema.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan tentang langkah-langkah penulis dalam menentukan bentuk umum *trace* matriks anti simetris berbentuk khusus 4×4 berpangkat bilangan bulat.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi pembahasan tentang cara-cara untuk mendapatkan hasil penelitian Tugas Akhir.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang menjelaskan inti dari seluruh pembahasan dan saran.

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini membahas teori yang mendukung penulis dalam menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya. Teori yang dapat mendukung penyelesaian tugas akhir ini adalah matriks anti simetris, *trace* matriks, perkalian matriks dan perpangkatan.

2.1 Matriks Anti Simetris

Definisi 2.1 Matriks Anti Simetris [12] Sebuah matriks bujursagkar A disebut anti simetris jika $A = -A^t$.

Contoh 2.1

Diberikan suatu matriks A yang ordo 4×4 yaitu :

$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -9 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dan hasil transpose matriks ialah

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -9 \\ -2 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 9 & -7 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka A disebut matriks anti simetris sesuai dengan Definisi 2.1.

Teorema 2.1 Sifat-Sifat Matriks Anti Simetris [12] Jika A dan B adalah matriks anti simetris dengan ukuran yang sama, dan jika k adalah skalar sebarang, maka :

(a) $-A^t$ adalah anti simetris.

(b) Semua elemen yang berada didiagonal utama bernilai 0.

(c) kA adalah anti simetris.

Contoh 2.2

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -4 & -3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Periksa apakah:

(a) A dan B adalah matriks anti simetris.

(b) kA dan kB matriks adalah anti simetris.

Penyelesaian :

1. Akan diperiksa bahwa A dan B adalah matriks anti simetris.

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -A$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -4 & -3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -B$$

Berdasarkan matriks $A^t = -A$ dan $B^t = -B$ maka terbukti bahwa matriks A dan B adalah anti simetris.

2. Akan diperiksa kA dan kB adalah matriks anti simetris.

   a. Akan diperiksa bahwa $kA = -(kA)^t$.

$$kA = k \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3k & k & 4k \\ 3k & 0 & 2k & -4k \\ -k & -2k & 0 & -k \\ -4k & 4k & k & 0 \end{bmatrix}$$

$$(kA)^t = \begin{bmatrix} 0 & 3k & -k & -4k \\ -3k & 0 & -2k & 4k \\ k & 2k & 0 & k \\ 4k & 4k & -k & 0 \end{bmatrix}$$

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$= -\begin{bmatrix} 0 & -3k & k & 4k \\ 3k & 0 & 2k & -4k \\ -k & -2k & 0 & -k \\ -4k & -4k & k & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -kA$$

b. Akan diperiksa bahwa $kB = -(kB)^t$.

$$kB = k \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -4 & -3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 4k & -5k \\ -k & 0 & 3k & 2k \\ -4k & -3k & 0 & -2k \\ 5k & -2k & 2k & 0 \end{bmatrix}$$

$$(kB)^t = \begin{bmatrix} 0 & -k & -4k & 5k \\ k & 0 & -3k & -2k \\ 4k & 3k & 0 & 2k \\ -5k & 2k & -2k & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & k & 4k & -5k \\ -k & 0 & 3k & 2k \\ -4k & -3k & 0 & -2k \\ 5k & -2k & 2k & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -kB$$

Berdasarkan hasil tersebut maka terbukti bahwa kA dan kB adalah anti simetris.

2.2 Perkalian Matriks

Perkalian suatu matriks dapat dilakukan dengan dua cara yaitu perkalian matriks dengan skalar dan perkalian matriks dengan matriks. Berikut diberikan beberapa definisi yang berhubungan dengan perkalian matriks.

2.2.1 Perkalian Matriks dengan Skalar

Definisi 2.2 Perkalian Matriks dengan Skalar [13] Jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasil kali *(product)* cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian masing-masing entri A dengan c. Maka cA disebut sebagai kelipatan skalar dari A.

Contoh 2.3

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan hasil dari $3A$!

Penyelesaian :

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Jika $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, maka

$$3A = 3\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 12 \\ 9 & 0 & 6 & -12 \\ -3 & -6 & 0 & -3 \\ -12 & 12 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Perkalian Matriks dengan Matriks

Definisi 2.3 Perkalian Matriks dengan Matriks [13] Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali dari AB adalah matriks $m \times n$ yang mana entri-entrinya ditentukan.

Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom $j$dari AB,pisahkan baris i dari m atriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil kali yang didapatkan.

Contoh 2.4

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -4 & -3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

tentukan AB !

Penyelesaian :

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -4 & -3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -11 & -1 & -8 \\ -28 & 5 & 4 & -19 \\ -3 & 1 & -12 & 1 \\ -8 & -7 & -4 & 26 \end{bmatrix}.$$

2.3 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.4 Perpangkatan Matriks [13] Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat integer tak negatif dari $\boldsymbol{A}$ adalah :

$$A^0 = I,\ A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n\,faktor}\ (n > 0),$$

Selanjutnya, jika A dibalik maka definisi dari pangkat integer negatif dari A

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

adalah :

$$A^n = (A^{-1})^n,\ A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n\ faktor}.$$

Contoh 2.5

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tentukanlah A^2!

Penyelesaian :

$$A^2 = A \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -26 & 14 & -2 & 11 \\ 14 & -29 & -1 & 10 \\ -2 & -1 & -6 & 4 \\ 11 & 10 & 4 & -33 \end{bmatrix}$$

2.4 Determinan Matriks dan Invers Matriks

Definisi 2.5 Determinan Matriks Dalam menentukan determinan dari sebuah matriks, ada beberapa metode yang dapat digunakan salah satunya adalah metode ekspansi kofaktor. Berikut adalah definisi dan teorema yang berkaitan dengan ekspansi kofaktor.

Definisi 2.6 Kofaktor Matriks [14] Jika A adalah suatu matriks bujursangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Contoh 2.6

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, maka carilah minor dan kofaktor dari entri a_{12}!

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Penyelesaian :

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -2,$

dan kofaktor dari a_{12} adalah

$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = 2.$

Teorema 2.2 Determinan dengan Kofaktor [14] Determinan matriks $A_{n \times n}$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang diperoleh, dimana untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, maka

$$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j), dan

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-i).

Contoh 2.7

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, hitunglah $det(A)$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama dari A!

Penyelesaian :

$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

Dengan menggunakan Teorema 2.2, maka :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3(0) - 1(-2) + 0(-2) = 2.$$

Definisi 2.7 Invers Matriks [14] Jika A adalah suatu matriks bujursangkar dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik *(invertible)* dan B disebut sebagai invers *(inverse)* dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

sebagai *matriks singular*.

Definisi 2.8 Adjoin Matriks [12] Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$ disebut matriks kofaktor A. Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

Contoh 2.8

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, hitunglah kofaktor-kofaktor dari A!

Penyelesaian :

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Jadi matriks kofaktornya adalah $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Dan adjoin dari A adalah $adj(A) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.3 Invers [14] Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Contoh 2.9

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, hitunglah invers dari A!

Penyelesaian :

Berdasarkan Contoh 2.7 telah diperoleh $det(A) = 2$ dan pada Contoh 2.8 diperoleh $kof(A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $adj(A) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan Teorema 2.3 dapat diperoleh :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 3 & -3/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Untuk menunjukkan bahwa invers dari matriks A adalah benar, maka dilakukan pembuktian menggunakan aturan invers yaitu $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

$A^{-1}A = I$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 3 & -3/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa invers dari matriks A tersebut benar.

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.5 *Trace* Matriks

Definisi 2.9 *Trace* Matriks [14] Jika A adalah matriks bujursangkar, maka *trace* dari A dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika bukan matriks bujursangkar.

Contoh 2.10

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, hitunglah $tr(A)$ dan $tr(A^2)$!

Penyelesaian :

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$tr(A) = 3 + 1 + 2 = 6$, dan

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 1 \\ 14 & 5 & 3 \\ 34 & 12 & 6 \end{bmatrix}, \text{maka}$$

$tr(A^2) = 11 + 5 + 6 = 22.$

Pembahasan mengenai bentuk umum *trace* matriks berpangkat telah dibahas oleh [15] , dengan judul *"Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus* 3×3 *Berpangkat Bilangan Bulat"*.

Berikut uraian tahapan dalam memperoleh *trace* matriks tersebut.

a. Diberikan suatu matriks simetris bentuk khusus 3×3.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix} \forall b \in R, b \neq 0.$$

b. Menentukan perpangkatan matriks ${A_3}^2$ sampai ${A_3}^{10}$ yaitu :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}$$

$${A_3}^2 = A_3 \cdot A_3$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$= \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2b^2 & b^2 & b^2 \\ b^2 & 2b^2 & b^2 \\ b^2 & b^2 & 2b^2 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama diperoleh ${A_3}^3$ sampai ${A_3}^{10}$ yaitu :

$${A_3}^3 = \begin{bmatrix} 2b^3 & 3b^3 & 3b^3 \\ 3b^3 & 2b^3 & 3b^3 \\ 3b^3 & 3b^3 & 2b^3 \end{bmatrix}$$

$${A_3}^4 = \begin{bmatrix} 6b^4 & 5b^4 & 5b^4 \\ 5b^4 & 6b^4 & 5b^4 \\ 5b^4 & 5b^4 & 6b^4 \end{bmatrix}$$

$${A_3}^5 = \begin{bmatrix} 10b^5 & 11b^5 & 11b^5 \\ 11b^5 & 10b^5 & 11b^5 \\ 11b^5 & 11b^5 & 10b^5 \end{bmatrix}$$

$${A_3}^6 = \begin{bmatrix} 22b^6 & 21b^6 & 21b^6 \\ 21b^6 & 22b^6 & 21b^6 \\ 21b^6 & 21b^6 & 22b^6 \end{bmatrix}$$

$${A_3}^7 = \begin{bmatrix} 42b^7 & 43b^7 & 43b^7 \\ 43b^7 & 42b^7 & 43b^7 \\ 43b^7 & 43b^7 & 42b^7 \end{bmatrix}$$

$${A_3}^8 = \begin{bmatrix} 86b^8 & 85b^8 & 85b^8 \\ 85b^8 & 86b^8 & 85b^8 \\ 85b^8 & 85b^8 & 86b^8 \end{bmatrix}$$

$${A_3}^9 = \begin{bmatrix} 170b^9 & 171b^9 & 171b^9 \\ 171b^9 & 170b^9 & 171b^9 \\ 171b^9 & 171b^9 & 170b^9 \end{bmatrix}$$

$${A_3}^{10} = \begin{bmatrix} 342b^{10} & 341b^{10} & 341b^{10} \\ 341b^{10} & 342b^{10} & 341b^{10} \\ 341b^{10} & 341b^{10} & 342b^{10} \end{bmatrix}$$

c. Menduga bentuk umum ${A_3}^n$ sebagai berikut :

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$A_3{}^n = \begin{bmatrix} \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}3}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n \end{bmatrix}$$

d. Membuktikan bentuk umum $A_3{}^n$ dengan menggunakan induksi matematika yaitu :

Teorema 2.4 [15] Diberikan suatu matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \text{b} & \text{b} \\ \text{b} & 0 & \text{b} \\ \text{b} & \text{b} & 0 \end{bmatrix} \forall b \in R, b \neq 0,$ maka:

$$A_3{}^n = \begin{bmatrix} \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}3}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n \end{bmatrix}$$

Bukti : Pembuktian Teorema 2.4 telah dibuktikan di halaman 24-30 pada laporan tugas akhir [15] tahun 2021.

Setelah mendapatkan bentuk umum dari perpangkatan matriks simetris bentuk khusus $\mathbf{3 \times 3}$ berpangkat bilangan bulat positif dan telah terbukti pada Teorema 2.4, maka dapat diperoleh *trace* matriks simetris berpangkat bilangan bulat positif pada teorema 2.5 berikut :

Teorema 2.5 [15] Diberikan matriks

$$A_3{}^n = \begin{bmatrix} \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}3}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n \end{bmatrix}, \quad \forall b \in R, b \neq 0, \quad \text{maka}$$

$tr(A_3{}^n) = 3\left(\frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}\right)b^n$, dengan n bilangan bulat positif.

Bukti : Pembuktian Teorema 2.5 telah dibuktikan di halaman 30-31 pada laporan tugas akhir [15] tahun 2021.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

e. Menentukan invers matriks ${A_3}^{-1}$ dengan metode adjoin yaitu :

$$ {A_3}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) $$

$$ = \frac{1}{2b^3} \begin{bmatrix} -b^2 & b^2 & b^2 \\ b^2 & -b^2 & b^2 \\ b^2 & b^2 & -b^2 \end{bmatrix} $$

$$ {A_3}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} \end{bmatrix} $$

Menentukan perpangkatan matriks ${A_3}^{-2}$ sampai ${A_3}^{-10}$ yaitu :

$$ {A_3}^{-2} = {A_3}^{-1} \cdot {A_3}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4b^2} & -\frac{1}{4b^2} & -\frac{1}{4b^2} \\ -\frac{1}{4b^2} & \frac{3}{4b^2} & -\frac{1}{4b^2} \\ -\frac{1}{4b^2} & -\frac{1}{4b^2} & \frac{3}{4b^2} \end{bmatrix} $$

$$ {A_3}^{-3} = {A_3}^{-2} \cdot {A_3}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8b^3} & \frac{3}{8b^3} & \frac{3}{8b^3} \\ \frac{3}{8b^3} & -\frac{5}{8b^3} & \frac{3}{8b^3} \\ \frac{3}{8b^3} & \frac{3}{8b^3} & -\frac{5}{8b^3} \end{bmatrix} $$

$$ {A_3}^{-4} = {A_3}^{-3} \cdot {A_3}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{16b^4} & -\frac{5}{16b^4} & -\frac{5}{16b^4} \\ -\frac{5}{16b^4} & \frac{11}{16b^4} & -\frac{5}{16b^4} \\ -\frac{5}{16b^4} & -\frac{5}{16b^4} & \frac{11}{16b^4} \end{bmatrix} $$

$$ {A_3}^{-5} = {A_3}^{-4} \cdot {A_3}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{21}{32b^5} & \frac{11}{32b^5} & \frac{11}{32b^5} \\ \frac{11}{32b^5} & -\frac{21}{32b^5} & \frac{11}{32b^5} \\ \frac{11}{32b^5} & \frac{11}{32b^5} & -\frac{21}{32b^5} \end{bmatrix} $$

$$ {A_3}^{-6} = {A_3}^{-5} \cdot {A_3}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{43}{64b^6} & -\frac{21}{64b^6} & -\frac{21}{64b^6} \\ -\frac{21}{64b^6} & \frac{43}{64b^6} & -\frac{21}{64b^6} \\ -\frac{21}{64b^6} & -\frac{21}{64b^6} & \frac{43}{64b^6} \end{bmatrix} $$

$$ {A_3}^{-7} = {A_3}^{-6} \cdot {A_3}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{85}{128b^7} & \frac{43}{128b^7} & \frac{43}{128b^7} \\ \frac{43}{128b^7} & -\frac{85}{128b^7} & \frac{43}{128b^7} \\ \frac{43}{128b^7} & \frac{43}{128b^7} & -\frac{85}{128b^7} \end{bmatrix} $$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$A_3{}^{-8} = A_3{}^{-7} \cdot A_3{}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{171}{256b^8} & -\frac{85}{256b^8} & -\frac{85}{256b^8} \\ -\frac{85}{256b^8} & \frac{171}{256b^8} & -\frac{85}{256b^8} \\ -\frac{85}{256b^8} & -\frac{85}{256b^8} & \frac{171}{256b^8} \end{bmatrix}$$

$$A_3{}^{-9} = A_3{}^{-8} \cdot A_3{}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{341}{512b^9} & \frac{171}{512b^9} & \frac{171}{512b^9} \\ \frac{171}{512b^9} & -\frac{341}{512b^9} & \frac{171}{512b^9} \\ \frac{171}{512b^9} & \frac{171}{512b^9} & -\frac{341}{512b^9} \end{bmatrix}$$

$$A_3{}^{-10} = A_3{}^{-9} \cdot A_3{}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{683}{1024b^{10}} & -\frac{341}{1024b^{10}} & -\frac{341}{1024b^{10}} \\ -\frac{341}{1024b^{10}} & \frac{683}{1024b^{10}} & -\frac{341}{1024b^{10}} \\ -\frac{341}{1024b^{10}} & -\frac{341}{1024b^{10}} & \frac{683}{1024b^{10}} \end{bmatrix}$$

f. Menduga bentuk umum $A_3{}^{-n}$ sebagai berikut :

$$A_3{}^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 2^{n+1} + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1} + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1} + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} \end{bmatrix}$$

g. Membuktikan bentuk umum $A_3{}^{-n}$ dengan menggunakan aturan invers yaitu :

Teorema 2.6 [15] Diberikan suatu matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix} \forall b \in R, b \neq 0,$ maka:

$$A_3{}^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 2^{n+1} + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1} + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1} + 1}{3 \cdot 2^n \cdot b^n} \end{bmatrix}$$

Bukti : Pembuktian Teorema 2.6 telah dibuktikan di halaman 36-57 pada laporan tugas akhir [15] tahun 2021.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Setelah mendapatkan bentuk umum dari perpangkatan matriks simetris bentuk khusus $\mathbf{3 \times 3}$ berpangkat bilangan bulat negatif dan telah terbukti pada Teorema 2.6, maka dapat diperoleh *trace* matriks simetris berpangkat bilangan bulat negatif pada teorema 2.7 berikut :

Teorema 2.7 [15] Diberikan matriks

$$A_3{}^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3\cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n+1}{3\cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n+1}{3\cdot 2^n \cdot b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 2^n+1}{3\cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3\cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n+1}{3\cdot 2^n \cdot b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 2^n+1}{3\cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n+1}{3\cdot 2^n \cdot b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3\cdot 2^n \cdot b^n} \end{bmatrix}, \forall b \in R, b \neq 0, \text{ maka}$$

$$tr(A_3{}^{-n}) = 3\left(\frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3\cdot 2^n \cdot b^n}\right)$$

Bukti : Pembuktian Teorema 2.7 telah dibuktikan di halaman 57 pada laporan tugas akhir [15] tahun 2021.

2.6 Induksi Matematika

Induksi matematika adalah suatu metode pembuktian deduktif untuk membuktikan pernyataan matematika benar atau salah. Induksi matematika digunakan untuk membuktikan pernyataan matematika. Berikut prinsip induksi matematika : Misalkan $p(n)$ menyatakan suatu pernyataan bilngan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa pernyataan $p(n)$tersebut benar untuk semua bilangan positif n, maka untuk membuktikan pernyataan ini digunakan aturan sebagai berikut :

1. Akan ditunjukkan $p(1)$ benar.
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk $n \geq 1$.

Contoh 2.11

Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} a \in R, a \neq 0$, maka

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$A_3{}^n = \begin{bmatrix} \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}a^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}a^n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}a^n \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Misalkan $p(n)$ yang menyatakan bahwa untuk setiap $n \in N$ dengan

$$p(n) : A_3{}^n = \begin{bmatrix} \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}a^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}a^n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}a^n \end{bmatrix}, \forall\, n \in N.$$

1. Basis Induksi

   Akan ditunjukkan $p(1)$ benar.

$$p(n) : A_3{}^n = \begin{bmatrix} \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}a^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}a^n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}a^n \end{bmatrix}$$

$$p(1) : A_3{}^n = \begin{bmatrix} \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}a^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}a^n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}a^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

   Jadi, $p(1)$ benar.

2. Langkah Induksi

   Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu :

   $p(n+1): A_3{}^n =$

$$\begin{bmatrix} \frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1+1}}{4}a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1+1}}{4}a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1+1}}{4}a^{n+1} \end{bmatrix}$$

   Sehingga dapat kita buktikan sebagai berikut :

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$A_3{}^{n+1} = A_3{}^{n}.A_3{}^{1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1+1}}{4}a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1+1}}{4}a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1+1}}{4}a^{n+1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1+1}}{4}a^{n+1}(a) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1+1}}{4}a^{n+1}(a) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1+1}}{4}a^{n+1}(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3^{n+1}+(-a)^{n+2}}{4}a^{n+2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^{n+1}+(-a)^{n+2}}{4}a^{n+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^{n+1}+(-a)^{n+2}}{4}a^{n+2} \end{bmatrix}$$

Jadi, untuk langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa matriks $A_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} a \in R, a \neq 0$, maka

$$A_3{}^{n} = \begin{bmatrix} \frac{3^{n}+(-1)^{n+1}}{4}a^{n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^{n}+(-1)^{n+1}}{4}a^{n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^{n}+(-1)^{n+1}}{4}a^{n} \end{bmatrix}.$$

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Tugas Langkah-langkah yang digunakan penulis dalam menyelesaikan penelitian ini untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks anti simetris khusus 4×4 berpangkat bilangan bulat adalah sebagai berikut :

1. Diberikan matriks anti simetris pada Persamaan (1.1)

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix} \forall\, a \in R,\ a \neq 0.$$

2. Menentukan perpangkatan matriks $(A_4)^2$ sampai $(A_4)^{10}$.
3. Menduga bentuk umum perpangkatan matriks $(A_4)^n$ dengan n bilangan bulat positif.
4. Membuktikan bentuk umum matriks anti simetris $(A_4)^n$ dengan n bilangan bulat positif menggunakan induksi matematika.
5. Mendapatkan $tr({A_4}^n)$, n bilangan bulat positif dengan menggunakan definisi *trace* matriks.
6. Menentukan invers dari matriks A_4 menggunakan metode adjoin.
7. Menentukan perpangkatan matriks $(A_4)^{-2}$ sampai $(A_4)^{-10}$.
8. Menduga bentuk umum perpangkatan matriks $(A_4)^n$ dengan n bilangan bulat negatif.
9. Membuktikan bentuk umum $(A_4)^n$, dengan n bilangan bulat negatif menggunakan aturan invers yaitu ${A_4}^{-n}{A_4}^n = {A_4}^n{A_4}^{-n} = I$.
10. Mendapatkan bentuk umum $tr({A_4}^n)$, n bilangan bulat negatif dengan menggunakan definisi *trace* matriks.
11. Aplikasi bentuk umum $tr({A_4}^n)$, dengan n bilangan bulat dalam contoh soa

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada Bab IV tentang *trace* matriks anti simetris berbentuk khusus 4×4 berpangkat bilangan bulat dengan menggunakan matriks pada Persamaan (1.4) maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Bentuk umum perpangkatan matriks anti simetris untuk $A_4{}^n$ dan $A_4{}^{-n}$:

$$A_4{}^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{\frac{n-1}{2}}a^n \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{\frac{n-1}{2}}a^n \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \end{bmatrix}, \text{untuk n bilangan bulat ganjil.} \\ \begin{bmatrix} (-1)^{\frac{n}{2}}2^{\frac{n}{2}}a^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}2^{\frac{n}{2}}a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}2^{\frac{n}{2}}a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}2^{\frac{n}{2}}a^n \end{bmatrix}, \text{untuk n bilangan bulat genap.} \end{cases}$$

$$A_4{}^{-n} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & (-1)\frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}a^n} & 0 & (-1)\frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}a^n} \\ (-1)\frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}a^n} & 0 & (-1)\frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}a^n} & 0 \\ 0 & (-1)\frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}a^n} & 0 & (-1)\frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}a^n} \\ (-1)\frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}a^n} & 0 & (-1)\frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}a^n} & 0 \end{bmatrix}, \text{untuk n bilangan ganjil.} \\ \begin{bmatrix} (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}a^n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}a^n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}a^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}a^n} \end{bmatrix}, \text{untuk n bilangan genap.} \end{cases}$$

2. Bentuk umum *trace* matriks anti simetris untuk $A_4{}^n$ dan $A_4{}^{-n}$:

$$tr(A_4{}^n) = \begin{cases} 0, \text{untuk n bilangan bulat ganjil.} \\ \left(2^{2+\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}}\right)a^n, \quad \text{untuk n bilangan bulat genap.} \end{cases}$$

$$tr(A_4{}^{-n}) = \begin{cases} 0, \text{untuk n bilangan bulat ganjil.} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-2}a^n}, \quad \text{untuk n bilangan bulat genap.} \end{cases}$$

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini, penulis membahas *trace* dari matriks anti simetris yang berbentuk khusus berukuran 4×4 berpangkatan bilangan bulat dengan entri-entrinya bilangan real. Oleh karena itu, penulis berharap agar pembaca dapat mengembangkan penelitian *trace* matriks anti simetris yang berordo lebih besar.

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

DAFTAR PUSTAKA

[1] C. C. Marzuki, F. Aryani and Rahmawati, "Trace Matriks nxn Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika.*, vol. 7, no. 1, Jan. 2021.

[2] J. Pahade and M. Jha, "*Trace* of Positive Integer Power of Real 2×2 Matrices," *Adv. Linear Algebr. Matrix Theory*, vol. 5, no. 04, p. 150, 2015.

[3] F. Aryani and M. Solihin, "*Trace* Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika.*, vol. 3, no. 2, Juli. 2018.

[4] R. Andesta, "*Trace* Matriks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif". Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim.," 2018.

[5] A. R. Suci, "*Trace* Matriks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif". Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim.," 2019.

[6] Hartina, "*Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat". Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim.," 2021

[7] M. Zawarni, "*Trace* Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif". Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim.," 2020.

[8] S. P. Alfianov, "*Trace* Matriks Simetris 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat". Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim.," 2021.

[9] S. Maryam, "*Trace* Matriks Simetris Bentuk Khusus $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Negatif". Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim.," 2022.

[10] R. Nasution, "*Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif". Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim.," 2022.

[11] A. Citra, "*Trace* Matriks Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif". Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim.," 2019.

[12] P. Sembiring, *Teori dan Aplikasi Matriks*. Medan:USU Press, 2018.

[13] R. Munir, *Matematika Diskrit*. Penerbit Informatika. 2005.

[14] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer: Versi Aplikasi*. Erlangga, 2004.

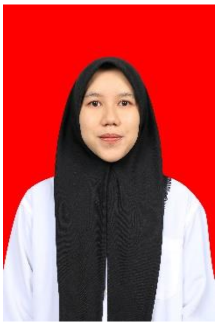
[15] F. B. Cenia, "*Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat". Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim.," 2021.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis lahir pada tanggal 14 Desember 1999 di Kerinci Kanan, Riau. Sebagai anak dari pasangan Bapak (Alm) Amiruddin dan Ibu Susi Susanti. Penulis menyelesaikan pendidikan formal di Sekolah Dasar Negeri 001 Kerinci Kanan, Kota Siak, Provinsi Riau tahun 2011. Pada tahun 2014 penulis menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di SMP Negeri 3 Kerinci Kanan, Kota Siak, Provinsi Riau dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas dengan Jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) di SMAN 1 Kerinci Kanan, Kota Siak, Provinsi Riau pada tahun 2017. Pada tahun 2017 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Program Studi Matematika.

Pada bulan Januari tahun 2020 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Unit Pelaksana Teknis Perbanihan Tanaman Hutan Dinas Lingkungan Hidup dan Kehutanan Provinsi Riau dengan judul **"Peramalan Jumlah Permintaan Bibit Matoa Menggunakan Metode Kuadrat Terkecil"** yang dibimbing oleh bapak Nilwan Adiraja,S.Pd.,M.Sc. dan diseminarkan pada tanggal 17 Juni 2020. Pada bulan Juli-Agustus 2020 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata-Dalam Jaringan (KKN-Daring) di Desa Delima Jaya, Kec. Kerinci Kanan, Kab. Siak, Provinsi Riau. Bulan Januari Tahun 2024 penulis telah menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"*Trace* Matriks Anti Simetris Berbentuk Khusus 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat"** dibawah bimbingan ibu Fitri Aryani, M.Sc. di Fakultas Sains dan Teknologi Program Studi Matematika.

UIN SUSKA RIAU