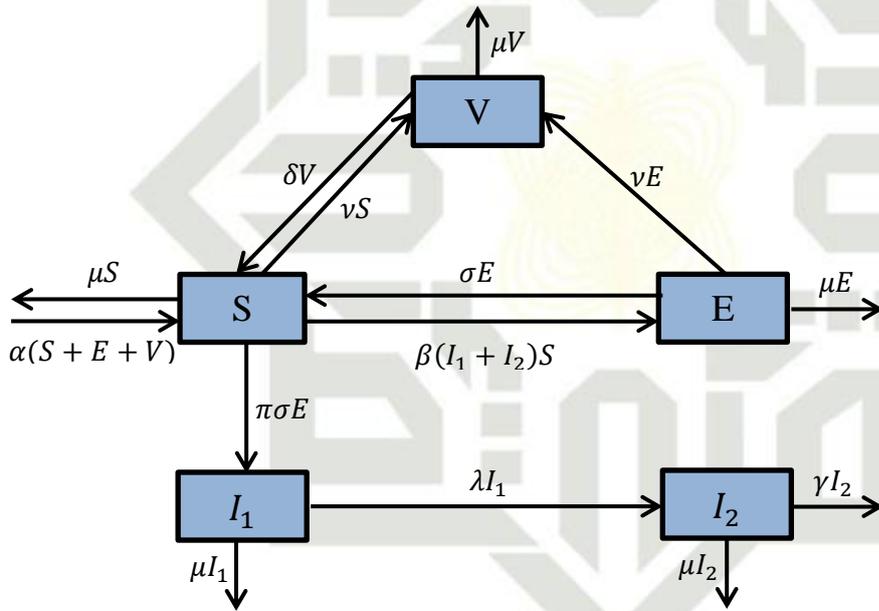


BAB IV PEMBAHASAN

4.1 Model Penyebaran Rabies

Model penyebaran rabies diperoleh dari penelitian yang dilakukan oleh [6], adapun model penyebaran rabies terdiri dari subpopulasi anjing rentan penyakit (*Susceptible*), subpopulasi anjing yang terinfeksi namun belum menunjukkan tanda-tanda (*Exposed*), subpopulasi anjing yang terinfeksi (*Infection*), terbagi menjadi dua fase yaitu fase tenang dan fase ganas serta subpopulasi anjing yang divaksinasi (*Vaccination*).



$$\frac{dS}{dt} = \alpha(S + E + V) + \delta V - vS - \mu S - \beta(I_1 + I_2)S + (1 - \pi)\sigma E \quad (4.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta(I_1 + I_2)S - \mu E - vE - \sigma E \quad (4.2)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \pi\sigma E - \mu I_1 - \lambda I_1 \quad (4.3)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \lambda I_1 - \mu I_2 - \gamma I_2 \quad (4.4)$$

$$\frac{dV}{dt} = vS + vE - \mu V - \delta V \quad (4.5)$$

$$N(t) = S(t) + E(t) + I_1(t) + I_2(t) + V(t)$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

dengan:

- S : subpopulasi anjing yang rentan penyakit rabies,
- E : subpopulasi anjing yang terinfeksi namun belum menunjukkan tanda-tanda,
- I_1 : subpopulasi anjing yang terinfeksi fase tenang,
- I_2 : subpopulasi anjing yang terinfeksi fase ganas,
- V : subpopulasi anjing yang divaksinasi,
- α : laju kelahiran anjing,
- β : tingkat penularan per kontak,
- γ : laju kematian karena penyakit pada anjing,
- δ : laju anjing kehilangan kekebalan dari vaksin,
- μ : laju kematian alami pada anjing,
- π : laju anjing yang terinfeksi fase tenang,
- σ : laju berakhirnya masa inkubasi penyakit rabies,
- ν : tingkat vaksinasi pada anjing,
- λ : laju interaksi anjing yang terinfkesi fase tenang.

4.2 Model Travelling Wave

Akan dilakukan linearisasi untuk mendapatkan model *travelling wave* pada penyebaran rabies dengan menambahkan persamaan difusi pada masing-masing subpopulasi laten, subpopulasi infeksi fase tenang dan subpopulasi infeksi fase ganas.

Adapun bentuk umum persamaan difusi adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.6}$$

dengan $D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ menunjukkan reaksi difusi, dimana hal ini D adalah koefisien difusifitas pada kompartemen u . Dengan menambahkan Persamaan (4.6) ke Persamaan (4.2),(4.3), dan (4.4) sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = D_E \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \beta(I_1 + I_2)S - \mu E - \nu E - \sigma E \tag{4.7}$$


Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = D_{I_1} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} + \pi \sigma E - \mu I_1 - \lambda I_1 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} = D_{I_2} \frac{\partial^2 I_2}{\partial x^2} + \lambda I_1 - \mu I_2 - \gamma I_2 \quad (4.9)$$

Langkah selanjutnya membentuk $E(u)$, $I_1(u)$ dan $I_2(u)$ dengan $u = x - ct$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} = 1 \leftrightarrow \partial u = \partial x \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(x-ct)}{\partial x} = -c \leftrightarrow \partial u = -c \partial t$$

$$\leftrightarrow \partial t = -\frac{\partial u}{c}$$

kemudian substitusikan transformasi diatas ke Persamaan (4.7), (4.8), dan (4.9), sehingga diperoleh:

$$-c E \frac{\partial E}{\partial u} = D_E \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} + \beta(I_1 + I_2)S - \mu E - \nu E - \sigma E \quad (4.10)$$

$$-c I_1 \frac{\partial I_1}{\partial u} = D_{I_1} \frac{\partial^2 I_1}{\partial u^2} + \pi \sigma E - \mu I_1 - \lambda I_1 \quad (4.11)$$

$$-c I_2 \frac{\partial I_2}{\partial u} = D_{I_2} \frac{\partial^2 I_2}{\partial u^2} + \lambda I_1 - \mu I_2 - \gamma I_2 \quad (4.12)$$

4.3 Travelling Wave pada Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit (*Disease Free Equilibrium*) yang diperoleh dari penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh [6] yaitu:

$$DFE = (S, E, I_1, I_2, V) = \left(\frac{\nu N(\alpha + \delta)}{(\mu + \delta + \nu)(\nu + \mu - \alpha)}, 0, 0, 0, \frac{\nu N}{(\mu + \delta + \nu)} \right) \quad (4.13)$$

Selanjutnya, dilakukan linearisasi dari model *travelling wave* Persamaan (4.10), (4.11), dan (4.12) pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan untuk mendapatkan solusi pada Persamaan (4.10), (4.11), dan (4.12) diberi penyelesaian umum yaitu dengan memisalkan :

$$(E, I_1, I_2) = (k_1 e^{\omega u}, k_2 e^{\omega u}, k_3 e^{\omega u}), \quad (4.14)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial I_1}{\partial u}, \frac{\partial I_2}{\partial u} \right) = (\omega k_1 e^{\omega u}, \omega k_2 e^{\omega u}, \omega k_3 e^{\omega u}) \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 I_1}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 I_2}{\partial u^2} \right) = (\omega^2 k_1 e^{\omega u}, \omega^2 k_2 e^{\omega u}, \omega^2 k_3 e^{\omega u}) \quad (4.16)$$

Kemudian substitusikan Persamaan (4.14), (4.15), dan (4.16) serta titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu Persamaan (4.13) ke Persamaan (4.10), (4.11), dan (4.12), maka diperoleh:

$$-c E \omega k_1 e^{\omega u} = D_E \omega^2 k_1 e^{\omega u} + \beta(k_2 e^{\omega u} + k_3 e^{\omega u}) \left(\frac{\nu N(\alpha + \delta)}{(\mu + \delta + \nu)(\nu + \mu - \alpha)} \right) - \mu k_1 e^{\omega u} - \nu k_1 e^{\omega u} - \sigma k_1 e^{\omega u} \quad (4.17)$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$-c_{I_1} \omega k_2 e^{\omega u} = D_{I_1} \omega^2 k_2 e^{\omega u} + \pi \sigma k_1 e^{\omega u} - \mu k_2 e^{\omega u} - \lambda k_2 e^{\omega u} \quad (4.18)$$

$$-c_{I_2} \omega k_3 e^{\omega u} = D_{I_2} \omega^2 k_3 e^{\omega u} + \lambda k_2 e^{\omega u} - \mu k_3 e^{\omega u} - \gamma k_3 e^{\omega u} \quad (4.19)$$

Dengan $e^{\omega u} \neq 0$, maka untuk subpopulasi laten (*exposed*) yaitu:

$$D_E \omega^2 k_1 e^{\omega u} + c_E \omega k_1 e^{\omega u} + \beta (k_2 e^{\omega u} + k_3 e^{\omega u}) \left(\frac{vN(\alpha + \delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - \alpha)} \right) - \mu k_1 e^{\omega u} - v k_1 e^{\omega u} - \sigma k_1 e^{\omega u} = 0$$

$$e^{\omega u} \left(D_E \omega^2 k_1 + c_E \omega k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)(vN\alpha + vN\delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - \alpha)} - \mu k_1 - v k_1 - \sigma k_1 \right) = 0$$

$$D_E \omega^2 k_1 + c_E \omega k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)(vN\alpha + vN\delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - \alpha)} - \mu k_1 - v k_1 - \sigma k_1 = 0 \quad (4.20)$$

Persamaan (4.20) dimisalkan sebagai fungsi $f(\omega)$.

$$f(\omega) = D_E \omega^2 k_1 + c_E \omega k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)(vN\alpha + vN\delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - \alpha)} - \mu k_1 - v k_1 - \sigma k_1 = 0$$

Selanjutnya untuk subpopulasi infeksi (*infection*) pada fase tenang yaitu:

$$D_{I_1} \omega^2 k_2 e^{\omega u} + c_{I_1} \omega k_2 e^{\omega u} + \pi \sigma k_1 e^{\omega u} - \mu k_2 e^{\omega u} - \lambda k_2 e^{\omega u} = 0$$

$$e^{\omega u} (D_{I_1} \omega^2 k_2 + c_{I_1} \omega k_2 + \pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2) = 0$$

$$D_{I_1} \omega^2 k_2 + c_{I_1} \omega k_2 + \pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2 = 0 \quad (4.21)$$

Persamaan (4.21) dimisalkan sebagai fungsi $g(\omega)$.

$$g(\omega) = D_{I_1} \omega^2 k_2 + c_{I_1} \omega k_2 + \pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2 = 0$$

Kemudian untuk subpopulasi infeksi (*infection*) pada fase ganas yaitu:

$$D_{I_2} \omega^2 k_3 e^{\omega u} + c_{I_2} \omega k_3 e^{\omega u} + \lambda k_2 e^{\omega u} - \mu k_3 e^{\omega u} - \gamma k_3 e^{\omega u} = 0$$

$$e^{\omega u} (D_{I_2} \omega^2 k_3 + c_{I_2} \omega k_3 + \lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3) = 0$$

$$D_{I_2} \omega^2 k_3 + c_{I_2} \omega k_3 + \lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3 = 0 \quad (4.22)$$

Persamaan (4.22) dimisalkan sebagai fungsi $h(\omega)$.

$$h(\omega) = D_{I_2} \omega^2 k_3 + c_{I_2} \omega k_3 + \lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3 = 0$$

Untuk memperoleh titik kritis dapat dilakukan dengan $\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0, \frac{\partial g}{\partial \omega} = 0, \frac{\partial h}{\partial \omega} = 0$, sehingga didapatkan:

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial (D_E \omega^2 k_1 + c_E \omega k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)(vN\alpha + vN\delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - \alpha)} - \mu k_1 - v k_1 - \sigma k_1)}{\partial \omega} = 0$$

$$2D_E \omega k_1 + c_E k_1 = 0$$

$$2D_E \omega k_1 = -c_E k_1$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\omega = \frac{-c_E k_1}{2D_E k_1} = \frac{-c_E}{2D_E} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \omega} &= 0 \\ \frac{\partial(D_{I_1} \omega^2 k_2 + c_{I_1} \omega k_2 + \pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2)}{\partial \omega} &= 0 \\ 2D_{I_1} \omega k_2 + c_{I_1} k_2 &= 0 \\ 2D_{I_1} \omega k_2 &= -c_{I_1} k_2 \\ \omega &= \frac{-c_{I_1} k_2}{2D_{I_1} k_2} = \frac{-c_{I_1}}{2D_{I_1}} \quad (4.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \omega} &= 0 \\ \frac{\partial(D_{I_2} \omega^2 k_3 + c_{I_2} \omega k_3 + \lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3)}{\partial \omega} &= 0 \\ 2D_{I_2} \omega k_3 + c_{I_2} k_3 &= 0 \\ 2D_{I_2} \omega k_3 &= -c_{I_2} k_3 \\ \omega &= \frac{-c_{I_2} k_3}{2D_{I_2} k_3} = \frac{-c_{I_2}}{2D_{I_2}} \quad (4.25) \end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (4.23), (4.24), (4.25) ke Persamaan (4.20), (4.21), (4.22) maka didapatkan:

$$\begin{aligned} D_E \omega^2 k_1 + c_E \omega k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)(vN\alpha + vN\delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - \alpha)} - \mu k_1 - v k_1 - \sigma k_1 &= 0 \\ D_E \left(\frac{-c_E}{2D_E}\right)^2 k_1 + c_E \left(\frac{-c_E}{2D_E}\right) k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)(vN\alpha + vN\delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - \alpha)} - \mu k_1 - v k_1 - \sigma k_1 &= 0 \\ D_E \frac{c_E^2}{4D_E^2} k_1 - \frac{c_E^2}{2D_E} k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)(vN\alpha + vN\delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - \alpha)} - \mu k_1 - v k_1 - \sigma k_1 &= 0 \\ c_E^2 &= \frac{4D_E \left(\frac{(\beta k_2 + \beta k_3)(vN\alpha + vN\delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - \alpha)} - \mu k_1 - v k_1 - \sigma k_1\right)}{k_1} \\ c_E &= 2 \sqrt{\frac{D_E \left(\frac{(\beta k_2 + \beta k_3)(vN\alpha + vN\delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - \alpha)} - \mu k_1 - v k_1 - \sigma k_1\right)}{k_1}} \end{aligned}$$

Maka c_E merupakan solusi yang diperoleh dari Persamaan (4.17) yang berupa kecepatan minimum terjadinya penyebaran virus rabies pada subpopulasi laten



1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

(*exposed*). Selanjutnya akan dicari solusi pada subpopulasi terinfeksi (*infection*) pada fase tenang dengan cara yang sama, diperoleh:

$$D_{I_1} \omega^2 k_2 + c_{I_1} \omega k_2 + \pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2 = 0$$

$$D_{I_1} \left(\frac{-c_{I_1}}{2D_{I_1}} \right)^2 k_2 + c_{I_1} \left(\frac{-c_{I_1}}{2D_{I_1}} \right) k_2 + \pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2 = 0$$

$$D_{I_1} \frac{c_{I_1}^2}{4D_{I_1}^2} k_2 - \frac{c_{I_1}^2}{2D_{I_1}} k_2 + \pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2 = 0$$

$$c_{I_1}^2 = \frac{4D_{I_1}(\pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2)}{k_2}$$

$$c_{I_1} = 2 \sqrt{\frac{D_{I_1}(\pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2)}{k_2}}$$

Maka c_{I_1} merupakan solusi yang diperoleh dari Persamaan (4.18) yang berupa kecepatan minimum terjadinya penyebaran virus rabies pada subpopulasi terinfeksi (*infection*) pada fase tenang. Selanjutnya akan dicari solusi pada subpopulasi terinfeksi (*infection*) pada fase ganas dengan cara yang sama, diperoleh:

$$D_{I_2} \omega^2 k_3 + c_{I_2} \omega k_3 + \lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3 = 0$$

$$D_{I_2} \left(\frac{-c_{I_2}}{2D_{I_2}} \right)^2 k_3 + c_{I_2} \left(\frac{-c_{I_2}}{2D_{I_2}} \right) k_3 + \lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3 = 0$$

$$D_{I_2} \frac{c_{I_2}^2}{4D_{I_2}^2} k_3 - \frac{c_{I_2}^2}{2D_{I_2}} k_3 + \lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3 = 0$$

$$c_{I_2}^2 = \frac{4D_{I_2}(\lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3)}{k_3}$$

$$c_{I_2} = 2 \sqrt{\frac{D_{I_2}(\lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3)}{k_3}}$$

Maka c_{I_2} merupakan solusi yang diperoleh dari Persamaan (4.19) yang berupa kecepatan minimum terjadinya penyebaran virus rabies pada subpopulasi terinfeksi (*infection*) pada fase ganas.

4.4 Travelling Wave pada Titik Kestimbangan Endemik

Selanjutnya untuk Titik kesetimbangan endemik (*Endemic Equilibrium*) yang diperoleh dari penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh [6] yaitu:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$EE = (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*, V^*) = \left(\frac{(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)(\mu+\nu+\sigma)}{\pi\sigma\beta(\mu+\gamma+\lambda)}, \frac{(\mu+\lambda)}{\alpha\pi\sigma} \left((\alpha + \gamma) \frac{\lambda N(\alpha-\mu)}{(\lambda(\alpha+\gamma)+\alpha(\mu+\gamma))} - N(\alpha - \mu) \right), \frac{1}{\alpha} \left((\alpha + \gamma) \frac{\lambda N(\alpha-\mu)}{(\lambda(\alpha+\gamma)+\alpha(\mu+\gamma))} - N(\alpha - \mu) \right), \frac{\lambda N(\alpha-\mu)}{(\lambda(\alpha+\gamma)+\alpha(\mu+\gamma))}, \frac{\nu}{(\mu+\delta)\pi\sigma} \left\{ \frac{(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)(\mu+\nu+\sigma)}{\beta(\mu+\gamma+\lambda)} + \frac{(\mu+\lambda)}{\alpha} \left((\alpha + \gamma) \frac{\lambda N(\alpha-\mu)}{(\lambda(\alpha+\gamma)+\alpha(\mu+\gamma))} - N(\alpha - \mu) \right) \right\} \right) \quad (4.26)$$

Selanjutnya, dilakukan linearisasi dari model *travelling wave* Persamaan (4.10), (4.11), dan (4.12) pada titik kesetimbangan endemik dan untuk mendapatkan solusi pada Persamaan (4.10), (4.11), dan (4.12) diberi penyelesaian umum yaitu dengan memisalkan :

$$(E^*, I_1^*, I_2^*) = (k_1 e^{\omega u}, k_2 e^{\omega u}, k_3 e^{\omega u}) \quad (4.27)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial I_1}{\partial u}, \frac{\partial I_2}{\partial u} \right) = (\omega k_1 e^{\omega u}, \omega k_2 e^{\omega u}, \omega k_3 e^{\omega u}) \quad (4.28)$$

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 I_1}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 I_2}{\partial u^2} \right) = (\omega^2 k_1 e^{\omega u}, \omega^2 k_2 e^{\omega u}, \omega^2 k_3 e^{\omega u}) \quad (4.29)$$

Kemudian substitusikan Persamaan (4.27), (4.28), dan (4.29) serta titik kesetimbangan endemik yaitu Persamaan (4.26) ke Persamaan (4.10), (4.11), dan (4.12), maka diperoleh:

$$-c_E \omega k_1 e^{\omega u} = D_E \omega^2 k_1 e^{\omega u} + \beta(k_2 e^{\omega u} + k_3 e^{\omega u}) \left(\frac{(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)(\mu+\nu+\sigma)}{\pi\sigma\beta(\mu+\gamma+\lambda)} \right) - \mu k_1 e^{\omega u} - \nu k_1 e^{\omega u} - \sigma k_1 e^{\omega u} \quad (4.30)$$

$$-c_{I_1} \omega k_2 e^{\omega u} = D_{I_1} \omega^2 k_2 e^{\omega u} + \pi\sigma k_1 e^{\omega u} - \mu k_2 e^{\omega u} - \lambda k_2 e^{\omega u} \quad (4.31)$$

$$-c_{I_2} \omega k_3 e^{\omega u} = D_{I_2} \omega^2 k_3 e^{\omega u} + \lambda k_2 e^{\omega u} - \mu k_3 e^{\omega u} - \gamma k_3 e^{\omega u} \quad (4.32)$$

Dengan $e^{\omega u} \neq 0$, maka untuk subpopulasi laten (*exposed*) yaitu:

$$D_E \omega^2 k_1 e^{\omega u} + c_E \omega k_1 e^{\omega u} + \beta(k_2 e^{\omega u} + k_3 e^{\omega u}) \left(\frac{(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)(\mu+\nu+\sigma)}{\pi\sigma\beta(\mu+\gamma+\lambda)} \right) - \mu k_1 e^{\omega u} - \nu k_1 e^{\omega u} - \sigma k_1 e^{\omega u} = 0$$

$$e^{\omega u} \left(D_E \omega^2 k_1 + c_E \omega k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)((\mu+\lambda)(\mu+\gamma)(\mu+\nu+\sigma))}{\pi\sigma\beta(\mu+\gamma+\lambda)} - \mu k_1 - \nu k_1 - \sigma k_1 \right) = 0$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$D_E \omega^2 k_1 + c_E \omega k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)((\mu + \lambda)(\mu + \gamma)(\mu + \nu + \sigma))}{\pi \sigma \beta (\mu + \gamma + \lambda)} - \mu k_1 - \nu k_1 - \sigma k_1 = 0 \quad (4.33)$$

Persamaan (4.33) dimisalkan sebagai fungsi $f(\omega)$.

$$f(\omega) = D_E \omega^2 k_1 + c_E \omega k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)((\mu + \lambda)(\mu + \gamma)(\mu + \nu + \sigma))}{\pi \sigma \beta (\mu + \gamma + \lambda)} - \mu k_1 - \nu k_1 - \sigma k_1 = 0$$

Selanjutnya untuk subpopulasi infeksi (*infection*) pada fase tenang yaitu:

$$\begin{aligned} D_{I_1} \omega^2 k_2 e^{\omega u} + c_{I_1} \omega k_2 e^{\omega u} + \pi \sigma k_1 e^{\omega u} - \mu k_2 e^{\omega u} - \lambda k_2 e^{\omega u} &= 0 \\ e^{\omega u} (D_{I_1} \omega^2 k_2 + c_{I_1} \omega k_2 + \pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2) &= 0 \\ D_{I_1} \omega^2 k_2 + c_{I_1} \omega k_2 + \pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Persamaan (4.34) dimisalkan sebagai fungsi $g(\omega)$.

$$g(\omega) = D_{I_1} \omega^2 k_2 + c_{I_1} \omega k_2 + \pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2 = 0$$

Kemudian untuk subpopulasi infeksi (*infection*) pada fase ganas yaitu:

$$\begin{aligned} D_{I_2} \omega^2 k_3 e^{\omega u} + c_{I_2} \omega k_3 e^{\omega u} + \lambda k_2 e^{\omega u} - \mu k_3 e^{\omega u} - \gamma k_3 e^{\omega u} &= 0 \\ e^{\omega u} (D_{I_2} \omega^2 k_3 + c_{I_2} \omega k_3 + \lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3) &= 0 \\ D_{I_2} \omega^2 k_3 + c_{I_2} \omega k_3 + \lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Persamaan (4.35) dimisalkan sebagai fungsi $h(\omega)$.

$$h(\omega) = D_{I_2} \omega^2 k_3 + c_{I_2} \omega k_3 + \lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3 = 0$$

Untuk memperoleh titik kritis dapat dilakukan dengan $\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0, \frac{\partial g}{\partial \omega} = 0, \frac{\partial h}{\partial \omega} = 0$, sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \omega} &= 0 \\ \frac{\partial (D_E \omega^2 k_1 + c_E \omega k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)((\mu + \lambda)(\mu + \gamma)(\mu + \nu + \sigma))}{\pi \sigma \beta (\mu + \gamma + \lambda)} - \mu k_1 - \nu k_1 - \sigma k_1)}{\partial \omega} &= 0 \\ 2D_E \omega k_1 + c_E k_1 &= 0 \\ 2D_E \omega k_1 &= -c_E k_1 \\ \omega &= \frac{-c_E k_1}{2D_E k_1} \\ \omega &= \frac{-c_E}{2D_E} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \omega} &= 0 \\ \frac{\partial(D_{I_1}\omega^2k_2+c_{I_1}\omega k_2+\pi\sigma k_1-\mu k_2-\lambda k_2)}{\partial \omega} &= 0 \\ 2D_{I_1}\omega k_2 + c_{I_1}k_2 &= 0 \\ 2D_{I_1}\omega k_2 &= -c_{I_1}k_2 \\ \omega &= \frac{-c_{I_1}k_2}{2D_{I_1}k_2} \\ \omega &= \frac{-c_{I_1}}{2D_{I_1}} \quad (4.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \omega} &= 0 \\ \frac{\partial(D_{I_2}\omega^2k_3+c_{I_2}\omega k_3+\lambda k_2-\mu k_3-\gamma k_3)}{\partial \omega} &= 0 \\ 2D_{I_2}\omega k_3+c_{I_2}k_3 &= 0 \\ 2D_{I_2}\omega k_3 &= -c_{I_2}k_3 \\ \omega &= \frac{-c_{I_2}k_3}{2D_{I_2}k_3} \\ \omega &= \frac{-c_{I_2}}{2D_{I_2}} \quad (4.38) \end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (4.36), (4.37), (4.38) ke Persamaan (4.33), (4.34), (4.35) maka didapatkan:

$$\begin{aligned} D_E \omega^2 k_1 + c_E \omega k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)((\mu + \lambda)(\mu + \gamma)(\mu + \nu + \sigma))}{\pi \sigma \beta (\mu + \gamma + \lambda)} - \mu k_1 \\ - \nu k_1 - \sigma k_1 &= 0 \\ D_E \left(\frac{-c_E}{2D_E}\right)^2 k_1 + c_E \left(\frac{-c_E}{2D_E}\right) k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)((\mu + \lambda)(\mu + \gamma)(\mu + \nu + \sigma))}{\pi \sigma \beta (\mu + \gamma + \lambda)} - \mu k_1 - \nu k_1 - \\ \sigma k_1 &= 0 \\ D_E \frac{c_E^2}{4D_E^2} k_1 - \frac{c_E^2}{2D_E} k_1 + \frac{(\beta k_2 + \beta k_3)((\mu + \lambda)(\mu + \gamma)(\mu + \nu + \sigma))}{\pi \sigma \beta (\mu + \gamma + \lambda)} - \mu k_1 - \nu k_1 - \\ \sigma k_1 &= 0 \\ c_E^2 &= \frac{4D_E \left(\frac{(\beta k_2 + \beta k_3)((\mu + \lambda)(\mu + \gamma)(\mu + \nu + \sigma))}{\pi \sigma \beta (\mu + \gamma + \lambda)} - \mu k_1 - \nu k_1 - \sigma k_1\right)}{k_1} \\ c_E^* &= 2 \sqrt{\frac{D_E \left(\frac{(\beta k_2 + \beta k_3)((\mu + \lambda)(\mu + \gamma)(\mu + \nu + \sigma))}{\pi \sigma \beta (\mu + \gamma + \lambda)} - \mu k_1 - \nu k_1 - \sigma k_1\right)}{k_1}} \end{aligned}$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Maka c_E^* merupakan solusi yang diperoleh dari Persamaan (4.27) yang berupa kecepatan minimum terjadinya penyebaran virus rabies pada subpopulasi laten (*exposed*). Selanjutnya akan dicari solusi pada subpopulasi terinfeksi (*infection*) pada fase tenang dengan cara yang sama, diperoleh:

$$D_{I_1} \omega^2 k_2 + c_{I_1} \omega k_2 + \pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2 = 0$$

$$D_{I_1} \left(\frac{-c_{I_1}}{2D_{I_1}} \right)^2 k_2 + c_{I_1} \left(\frac{-c_{I_1}}{2D_{I_1}} \right) k_2 + \pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2 = 0$$

$$D_{I_1} \frac{c_{I_1}^2}{4D_{I_1}^2} k_2 - \frac{c_{I_1}^2}{2D_{I_1}} k_2 + \pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2 = 0$$

$$c_{I_1}^2 = \frac{4D_{I_1}(\pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2)}{k_2}$$

$$c_{I_1}^* = 2 \sqrt{\frac{D_{I_1}(\pi \sigma k_1 - \mu k_2 - \lambda k_2)}{k_2}}$$

Maka $c_{I_1}^*$ merupakan solusi yang diperoleh dari Persamaan (4.28) yang berupa kecepatan minimum terjadinya penyebaran virus rabies pada subpopulasi terinfeksi (*infection*) pada fase tenang. Selanjutnya akan dicari solusi pada subpopulasi terinfeksi (*infection*) pada fase ganas dengan cara yang sama, diperoleh:

$$D_{I_2} \omega^2 k_3 + c_{I_2} \omega k_3 + \lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3 = 0$$

$$D_{I_2} \left(\frac{-c_{I_2}}{2D_{I_2}} \right)^2 k_3 + c_{I_2} \left(\frac{-c_{I_2}}{2D_{I_2}} \right) k_3 + \lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3 = 0$$

$$D_{I_2} \frac{c_{I_2}^2}{4D_{I_2}^2} k_3 - \frac{c_{I_2}^2}{2D_{I_2}} k_3 + \lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3 = 0$$

$$c_{I_2}^2 = \frac{4D_{I_2}(\lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3)}{k_3}$$

$$c_{I_2}^* = 2 \sqrt{\frac{D_{I_2}(\lambda k_2 - \mu k_3 - \gamma k_3)}{k_3}}$$

Maka $c_{I_2}^*$ merupakan solusi yang diperoleh- dari Persamaan (4.29) yang berupa kecepatan minimum terjadinya penyebaran virus rabies pada subpopulasi terinfeksi (*infection*) pada fase ganas.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

4.5 Nilai Parameter dari Model SEIV Penyebaran Virus Rabies

Diberikan nilai awal yang diperoleh dari penelitian yang dilakukan oleh [6] yaitu: $S(0) = 350$, $E(0) = 200$, $I_1(0) = 35$, $I_2(0) = 15$, $V(0) = 200$.

Adapun nilai dari parameter yang digunakan dalam model yang digunakan yaitu:

Tabel 4. 1 Nilai Parameter Model Rabies

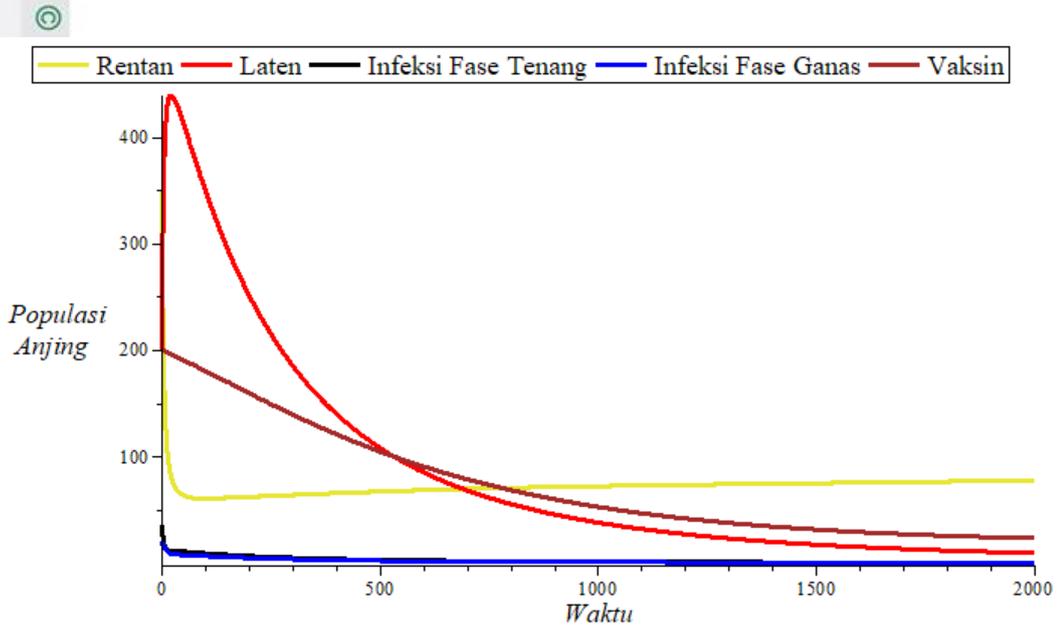
Parameter	Nilai	Sumber
α	0,001150685	[6]
β	0,003424657	[6]
μ	0,0009041096	[6]
γ	0,25	[6]
ν	0,0004931506	[6]
λ	0,17543859	[6]
σ	0,011	[6]
π	0,4	[6]
δ	0,001369863	[6]
D_E, D_{I_1}, D_{I_2}	0.349	[4]

Dari solusi yang telah didapatkan, selanjutnya dilakukan simulasi model penyebaran rabies serta *travelling wave* pada titik kesetimbangan bebas penyakit (*Disease Free Equilibrium*) dan titik kesetimbangan endemik (*Endemic Equilibrium*).

4.6 Simulasi Numerik

Simulasi pada model SEIV penyebaran penyakit rabies akan ditunjukkan oleh gambar dibawah ini.

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Gambar 4. 1 Simulasi Model Penyebaran Virus Rabies

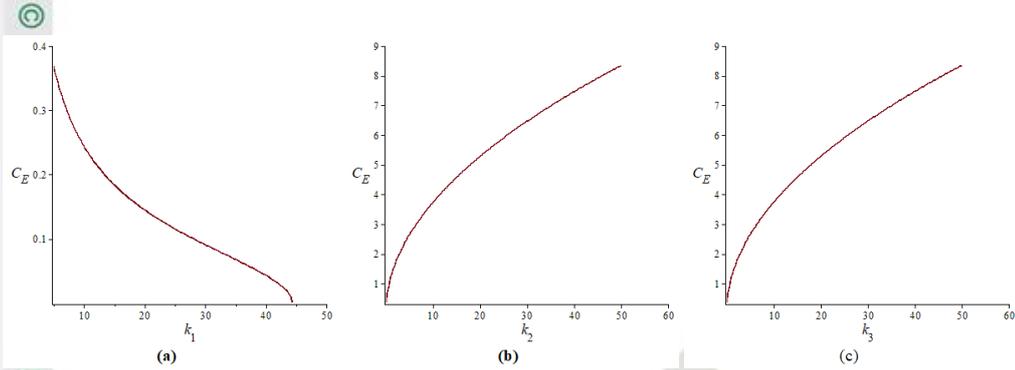
Berdasarkan Gambar 4.1 dapat disimpulkan bahwa pada populasi anjing yang rentan terhadap penyakit rabies (S) mengalami penurunan yang signifikan, pada populasi anjing yang sudah terinfeksi namun belum menunjukkan tanda-tanda atau Laten (E) terjadi kenaikan dalam waktu yang singkat lalu mengalami penurunan, pada populasi anjing yang terinfeksi pada fase tenang (I_1) mengalami penurunan tetapi virus rabies tetap ada, pada populasi anjing yang terinfeksi pada fase ganas (I_2) mengalami penurunan tetapi virus rabies tetap ada, dan pada populasi anjing yang divaksin (V) mengalami penurunan yang signifikan hal itu bisa dikarenakan anjing yang kehilangan kekebalan akibat vaksin dan mengalami kematian alami.

4.6.1 Simulasi *Travelling Wave* pada Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Selanjutnya akan disimulasikan koefisien k_1, k_2, k_3 di masing-masing persamaan kecepatan *travelling wave* dari titik keseimbangan yang berbeda. Untuk titik keseimbangan bebas penyakit akan digambarkan pada gambar dibawah ini.

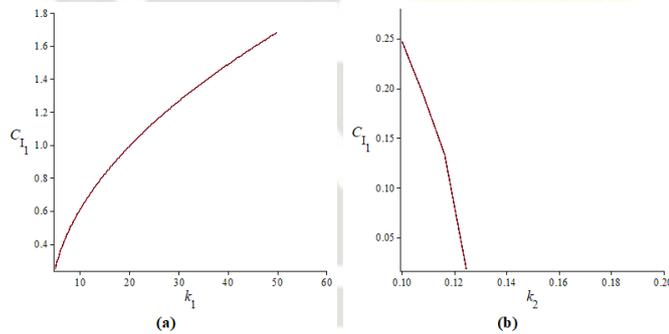
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



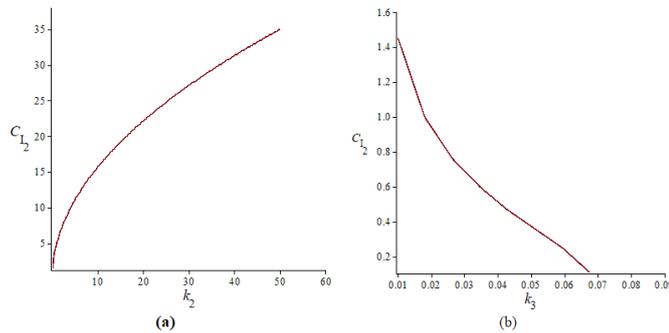
Gambar 4. 2 Simulasi *Travelling Wave* Terhadap k_1, k_2, k_3 di Populasi Laten pada Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Berdasarkan Gambar 4.2 dapat disimpulkan bahwa pada titik keseimbangan bebas penyakit, Pada Gambar 4.2.a ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi laten semakin kecil maka nilai koefisien k_1 semakin besar, namun Pada Gambar 4.2.b ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi laten juga semakin besar maka nilai koefisien k_2 semakin besar, begitu juga Pada Gambar 4.2.c ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi laten juga semakin besar maka nilai koefisien k_3 semakin besar.



Gambar 4. 3 Simulasi *Travelling Wave* Terhadap k_1, k_2, k_3 di Populasi Infeksi Fase Tenang pada Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Berdasarkan Gambar 4.3 dapat disimpulkan bahwa pada titik keseimbangan bebas penyakit, Pada Gambar 4.3.a ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi infeksi fase tenang semakin besar maka nilai koefisien k_1 semakin besar, namun Pada Gambar 4.3.b ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi infeksi fase tenang juga semakin kecil maka nilai koefisien k_2 semakin besar.

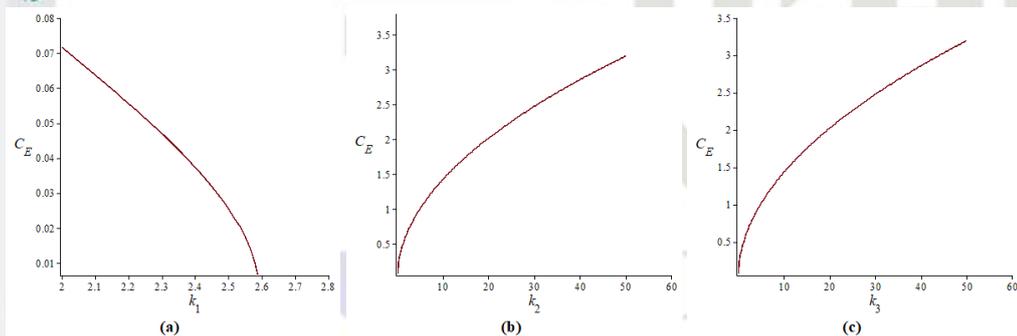


Gambar 4. 4 Simulasi *Travelling Wave* Terhadap k_1, k_2, k_3 di Populasi Infeksi Fase Ganas pada Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Berdasarkan Gambar 4.4 dapat disimpulkan bahwa pada titik kesetimbangan bebas penyakit, Pada Gambar 4.4.a ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi infeksi fase ganas semakin besar maka nilai koefisien k_2 semakin besar, namun Pada Gambar 4.4.b ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi infeksi fase ganas juga semakin kecil maka nilai koefisien k_3 semakin besar.

4.6.2 Simulasi *Travelling Wave* pada Titik Kesetimbangan Endemik

Selanjutnya akan disimulasikan koefisien k_1, k_2, k_3 di masing-masing persamaan kecepatan *travelling wave* dari titik kesetimbangan yang berbeda. Untuk titik kesetimbangan endemik akan digambarkan pada gambar dibawah ini.



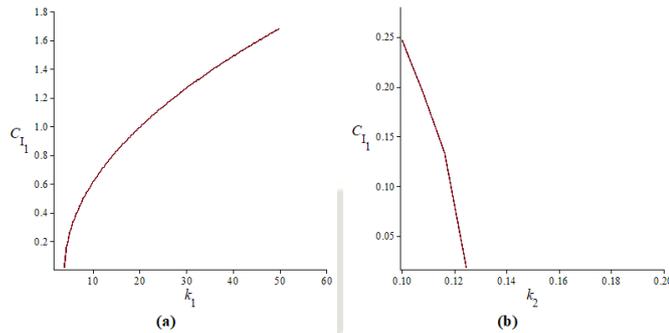
Gambar 4. 5 Simulasi *Travelling Wave* Terhadap k_1, k_2, k_3 di Populasi Laten pada Titik Kesetimbangan Endemik

Berdasarkan Gambar 4.5 dapat disimpulkan bahwa pada titik kesetimbangan endemik, Pada Gambar 4.5.a ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi laten semakin kecil maka nilai koefisien k_1 semakin besar, namun

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

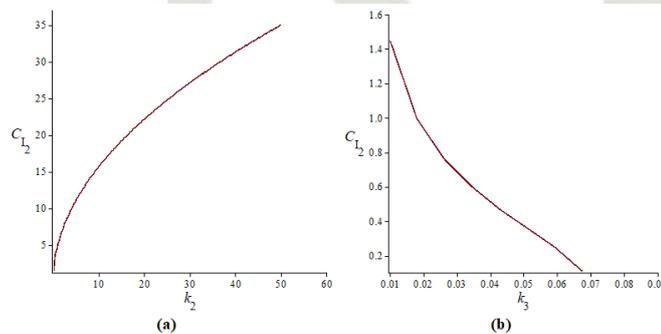
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Pada Gambar 4.5.b ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi laten juga semakin besar maka nilai koefisien k_2 semakin besar, begitu juga Pada Gambar 4.5.c ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi laten juga semakin besar maka nilai koefisien k_3 semakin besar.



Gambar 4.6 Simulasi *Travelling Wave* Terhadap k_1, k_2, k_3 di Populasi Infeksi Fase Infeksi Tenang pada Titik Kesetimbangan Endemik

Berdasarkan Gambar 4.6 dapat disimpulkan bahwa pada titik kesetimbangan endemik, Pada Gambar 4.6.a ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi infeksi fase tenang semakin besar maka nilai koefisien k_1 semakin besar, namun Pada Gambar 4.6.b ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi infeksi fase tenang juga semakin kecil maka nilai koefisien k_2 semakin besar.



Gambar 4.7 Simulasi *Travelling Wave* Terhadap k_1, k_2, k_3 di Populasi Infeksi Fase Infeksi Ganas pada Titik Kesetimbangan Endemik

Berdasarkan Gambar 4.7 dapat disimpulkan bahwa pada titik kesetimbangan endemik, Pada Gambar 4.7.a ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi infeksi fase ganas semakin besar maka nilai koefisien k_1 semakin besar, namun Pada Gambar 4.7.b ketika kecepatan *travelling wave* pada populasi infeksi fase ganas juga semakin kecil maka nilai koefisien k_2 semakin besar.

Dari hasil simulasi *travelling wave* yang telah diperoleh baik pada titik kesetimbangan bebas penyakit maupun titik kesetimbangan endemik, dan pada masing-masing populasi dimana diperoleh kecepatan *travelling wave* bergantung pada nilai koefisien k_1, k_2, k_3 dapat berlaku dengan syarat nilai koefisien $k_1 > k_2 > k_3$.



UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.