

**Hak Cipta Diindungi Undang-Undang**

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**TRACE MATRIKS TOEPLITZ 2-TRIDIAGONAL ORDO 4×4
BERPANGKAT BILANGAN BULAT****TUGAS AKHIR**

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika



oleh:

GEFIRA RAUDHATUL JANNAH
12050420403

UIN SUSKA RIAU

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2024**

**Hak Cipta Diindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERSETUJUAN**TRACE MATRIKS TOEPLITZ 2-TRIDIAGONAL ORDO 4×4
BERPANGKAT BILANGAN BULAT****TUGAS AKHIR**

oleh:

GEFIRA RAUDHATUL JANNAH
12050420403Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 19 Juni 2024**Ketua Program Studi****Wartono, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003**Pembimbing****Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19770913 200604 2 002



Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PENGESAHAN

**TRACE MATRIKS TOEPLITZ 2-TRIDIAGONAL ORDO 4×4
BERPANGKAT BILANGAN BULAT**

TUGAS AKHIR

oleh:

GEFIRA RAUDHATUL JANNAH
12050420403

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 19 Juni 2024

Pekanbaru, 19 Juni 2024
Mengesahkan,

Ketua Program Studi

Wartono, M.Sc.
NIP. 19730818 200604 1 003

Dekan
Dr. Hartono, M.Pd.
NIP. 19640301 199203 1 003

DEWAN PENGUJI :

- Ketua : Wartono, M.Sc.**
Sekretaris : Fitri Aryani, M.Sc.
Anggota I : Corry Corazon Marzuki, M.Si.
Anggota II : Zukrianto, M.Si.



LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta ada pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan dengan mengikut kaidah pengutipan yang berlaku.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa di dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan oleh saya maupun orang lain untuk keperluan lain, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak memuat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali disebutkan dalam referensi dan didalam daftar pustaka.

Saya bersedia menerima sanksi jika pernyataan ini tidak sesuai dengan yang sebenarnya.

Pekanbaru, 19 Juni 2024

Yang membuat pernyataan,



GEFIRA RAUDHATUL JANNAH
12050420403

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbilalamin segala puji syukur atas kehadiran Allah SWT. karena berkat rahmat serta karunia-Nya, Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan sebaik-baiknya. shalawat serta salam semoga terlimpahkan kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW.

Saya persembahkan karya ini kepada orang-orang yang sangat saya sayangi

Ayah dan Ibu Tercinta

Terima kasih kepada kedua orang tua saya yaitu Bapak Suprpto dan Ibu Suriyani yang telah memberikan kasih sayang, doa, serta segala bentuk dukungan kepada saya. Terima kasih atas segala usaha dalam memberikan yang terbaik, yang tentunya jika dijabarkan pada habishnya. Saya persembahkan tugas akhir ini kepada kalian yang luar biasa sebagai awal perjalanan membahagiakan kalian.

Adik, Kakak, dan Orang Terdekat

Terima kasih kepada adik tersayang yaitu Shafa Zilfani yang selalu memberikan dukungan serta doa. Kepada kedua kakak dan abang saya yaitu Indah Denni Pratiwi, Lilis Three Patmawati, dan Riandi Eka Putra yang telah memberikan saran, doa, serta begitu banyak dukungan kepada saya. Dan terima kasih kepada pakde dan bude saya yaitu Alm. Suaman dan Atminah yang telah memberikan nasihat serta dukungan kepada saya.

Dosen Pembimbing Tugas Akhir

Terima kasih kepada Ibu Fitri Aryani, M.Sc. yang telah membimbing saya dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Terima kasih atas nasihat, saran, dan waktu yang telah diberikan selama proses penyusunan tugas akhir ini.

Sahabat

Terima kasih kepada Sahabat Mager Squad yaitu Fitri Ambar Wati, Mia Santika Rm, dan Fitri Wahyuni yang telah berjuang bersama selama masa perkuliahan dan telah memberikan begitu banyak kenangan yang sangat berarti. Terimakasih kepada Yudhistira Budi Utomo yang selalu memberikan bantuan dan dukungan yang sangat berarti. Terima kasih kepada sahabat seperjuangan sejak SMA yaitu Sukma Kencana dan Ireniza Pratiwi Bangun yang telah memberikan dukungan yang begitu berharga serta telah setia menemani saya dalam segala keadaan baik di saat suka maupun duka. Terima kasih kepada sahabat SMP saya yaitu Eko Prasetyo yang telah menemani perjalanan saya hingga sejauh ini dan memberikan dukungan yang begitu berarti. Semoga kalian selalu diberi kelancaran serta kemudahan dalam segala urusan.

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

TRACE MATRIKS TOEPLITZ 2-TRIDIAGONAL ORDO 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

GEFIRA RAUDHATUL JANNAH
NIM : 12050420403

Tanggal Sidang : 19 Juni 2024
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum trace matriks dari matriks toeplitz 2-tridiagonal berpangkat bilangan bulat dengan ordo 4×4 . Langkah dimulai dengan memangkatkan matriks dari pangkat dua hingga sebelas dan dari pangkat negatif dua hingga negatif sebelas. Selanjutnya menduga bentuk umum matriks berpangkat bilangan bulat positif dan membuktikannya dengan menggunakan induksi matematika, serta menduga bentuk umum matriks berpangkat bilangan bulat negatif dan membuktikannya dengan menggunakan aturan invers. Terakhir dengan menggunakan definisi *trace* matriks, maka diperoleh bentuk umum *trace* matriks toeplitz 2-tridiagonal ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif serta bilangan bulat negatif yang kemudian implementasikan ke dalam contoh soal.

Kata Kunci: aturan invers, induksi matematika, matriks toeplitz 2-tridiagonal, *trace* matriks



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

TRACE OF A 2-TRIDIAGONAL TOEPLITZ MATRIX OF ORDER 4×4 WITH INTEGER POWERS

GEFIRA RAUDHATUL JANNAH
NIM : 12050420403

Date of Final Exam : June 19, 2024
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

This final project aims to obtain the general form of trace matrix of 2-tridiagonal toeplitz matrix with integer rank of order 4×4 . The step begins by raising the matrix from powers of two to eleven and from negative powers of two to negative eleven. Next, we conjecture the general form of a matrix with positive integer rank and prove it using mathematical induction, and conjecture the general form of a matrix with negative integer rank and prove it using inverse rule. Finally, by using the definition of trace matrix, the general form of trace matrix of 2-tridiagonal toeplitz order 4×4 with positive integer rank and negative integer rank is obtained and then implemented into an example problem.

Keywords: *2-tridiagonal toeplitz matrix, inverse rule, mathematical induction, trace matrix*

UIN SUSKA RIAU



KATA PENGANTAR

Assalaamu'alaikum Warahmatullaahi Wabarakaatuh

Alhamdulillah rabbil 'alamin segala puji syukur penulis panjatkan atas kehadiran Allah *Subhanahu wa ta'ala* karena berkat rahmat serta karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas akhir yang berjudul “**Trace Matriks Toeplitz Tridiagonal Ordo 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat**”. Shalawat serta salam semoga terlimpahkan pada junjungan kita yaitu baginda Rasulullah Muhammad *Shalallahu alaihi wa sallam*, yang telah membawa kita dari dunia yang penuh akan kegelapan ke dunia yang penuh akan ilmu pengetahuan serta kemajuan teknologi seperti saat ini.

Pada Proses penyusunan Tugas Akhir ini berbagai pihak telah memberikan bantuan kepada penulis, baik secara moril maupun material, terutama kepada kedua orang tua saya yaitu Bapak Suprpto dan Ibu Suriyani yang telah memberikan berbagai dukungan kepada penulis termasuk dukungan kasih sayang yang turut menyertai penulis. Kemudian, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya juga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Ag. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.
- Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
- Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekertaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
- Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku Pembimbing Tugas Akhir yang telah membetikan banyak bantuan, memberikan arahan dan membimbing penulis dengan sabar sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
- Bapak Dr. Riswan Efendi, M.Sc. selaku Pembimbing Akademik yang telah memberi arahan serta membimbing penulis hingga penulis dapat sampai pada titik ini.

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si. selaku Penguji I yang telah memberikan arahan serta bimbingan kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Bapak Zukrianto, M.Si. selaku Penguji II yang telah memberikan arahan serta bimbingan kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Seluruh bapak dan Ibu Dosen dari Program Studi Matematika yang telah memberikan segudang ilmu pengetahuan, nasihat serta bimbingan kepada penulis.

Adik dan Mbak Kembar yaitu Shafa Zilfani, Indah Denni Pratiwi, dan Lilis Three Patmawati yang selalu memberikan segala bentuk dukungan yang sangat bermakna sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

Sahabat dari Mager Squad yaitu Fitri Ambar Wati, Mia Santika RM, dan Sri Wahyuni yang selalu memberikan semangat dan dukungan kepada penulis dalam proses penyusunan tugas akhir ini.

12. Sahabat seperjuangan penulis dari saat menempuh Pendidikan SMA hingga saat ini yaitu Sukma Kencana dan Ireniza Pratiwi Bangun yang telah menemani perjalanan penulis hingga saat ini serta selalu memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

13. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan bantuan hingga tugas akhir ini dapat terselesaikan.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih terdapat berbagai kekurangan serta kesalahan dan jauh dari apa yang diharapkan. Untuk itu, penulis berharap adanya kritik dan saran yang bersifat membangun dari berbagai pihak terhadap tugas akhir ini.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Pekanbaru, 19 Juni 2024

GEFIRA RAUDHATUL JANNAH
12050420403



DAFTAR ISI

LEMBAR PERSETUJUAN	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL.....	iv
LEMBAR PERNYATAAN	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
KATA PENGANTAR.....	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Penelitian	3
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	4
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
BAB II LANDASAN TEORI	5
2.1 Matriks Toeplitz	5
2.2 Perpangkatan Matriks.....	7
2.3 Determinan dan Invers Matriks	8
2.4 <i>Trace</i> Matriks dan Sifat-Sifat <i>Trace</i> Matriks.....	10
2.5 <i>Trace</i> Matriks Berpangkat.....	11
2.6 Induksi Matematika.....	14
2.7 Teorema Binomial.....	18
BAB III METODE PENELITIAN	20

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB IV PEMBAHASAN.....	21
4.1 Matriks Toeplitz 2-Tridiagonal Ordo 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif	21
4.2 Matriks Toeplitz 2-Tridiagonal Ordo 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif.....	35
4.3 <i>Trace</i> Matriks Toeplitz 2-Tridiagonal Ordo 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat.....	62
4.4 Aplikasi Matriks Berpangkat dan <i>Trace</i> Matriks Toeplitz 2-Tridiagonal Ordo 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat.....	64
BAB V PENUTUP.....	68
5.1 Kesimpulan	68
5.2 Saran	70
DAFTAR PUSTAKA.....	71
LAMPIRAN.....	73
DAFTAR RIWAYAT HIDUP	81

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1. Solusi A_4^4 dan $tr(A_4^4)$ Menggunakan Aplikasi <i>Maple</i>	65
Gambar 4.2. Solusi $tr(A_4^7)$ dan $tr(A_4^{-6})$ Menggunakan Aplikasi <i>Maple</i>	66
Gambar 4.3. Solusi A_4^{-5} dan $tr(A_4^{-5})$ Menggunakan Aplikasi <i>Maple</i>	67



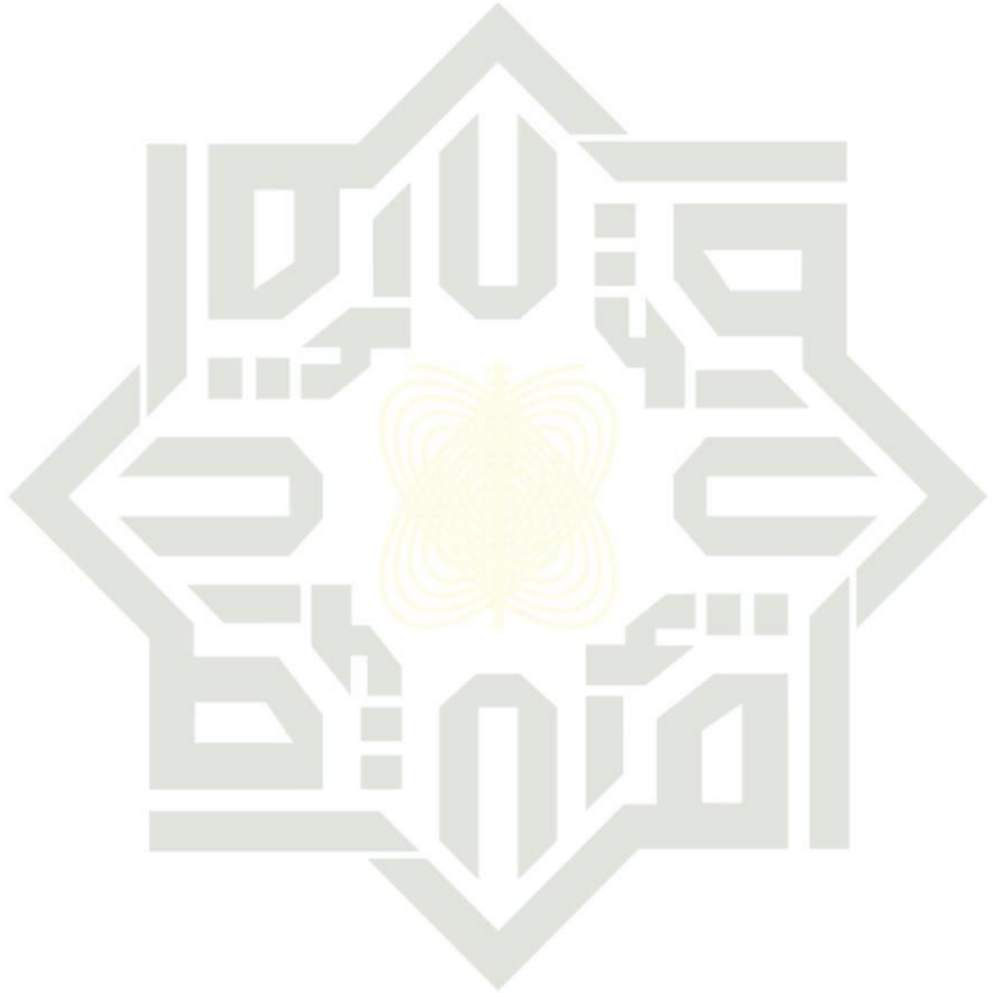
UIN SUSKA RIAU

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Uraian pembuktian matriks berpangkat bilangan positif ganjil.....	73
Lampiran 2	Uraian pembuktian matriks berpangkat bilangan positif genap.....	76



UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB I PENDAHULUAN

Latar Belakang

Matriks adalah salah satu komponen studi aljabar linear. Matriks memiliki definisi sebagai susunan dari angka atau bilangan yang berbentuk persegi panjang. Susunan angka atau bilangan membentuk persegi panjang disebut entri dalam matriks. Terdapat beberapa jenis matriks yang diantaranya adalah matriks bujur sangkar atau persegi, matriks toeplitz, matriks tridiagonal, dan sebagainya. Salah satu operasi matriks selain penjumlahan, perkalian, perpangkatan, determinan, invers, dan *transpose* adalah *trace* matriks. *Trace* matriks adalah penjumlahan dari semua entri yang berada di diagonal utama pada suatu matriks persegi [1].

Trace matriks dapat dicari dengan mudah yaitu hanya dengan menjumlahkan entri diagonal utama, termasuk juga pada pencarian *trace* matriks toeplitz 2-tridiagonal. Namun, jika mencari *trace* matriks pada matriks toeplitz 2-tridiagonal berpangkat n , maka perlu dilakukan perpangkatan pada matriksnya, yaitu mengalikan matriks dengan dirinya sendiri sebanyak n kali [1]. Setelah itu, bentuk umum *trace* matriks dibuat dengan menggunakan definisi *trace* matriks.

Banyak peneliti telah melakukan penelitian mengenai bentuk umum *trace* matriks berpangkat, diantaranya adalah [2] pada tahun 2020 yang membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks pada matriks bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Pada penelitian ini, matriks khusus dengan bentuk:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix} \text{ dengan } a, b \in \mathbb{R}.$$

Penelitian ini menemukan bahwa bentuk umum *trace* matriks berpangkatnya adalah $\text{tr}(A^n) = 1 + (a + b)^n$.

Peneliti lainnya yang melakukan penelitian terhadap *trace* matriks berpangkat adalah [3] pada tahun 2021 yang membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks $n \times n$ dengan matriks yang berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif. Pada penelitian ini, matriks berbentuk khusus yang digunakan adalah:



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$A_n = \{(a_{ij})_{n \times n} \mid a_{ij} = a \in \mathbb{R}\}$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa $tr(A_n^m) = (na)^m$.

Kemudian penelitian [4] yang juga membahas mengenai *trace* matriks berpangkat pada tahun 2020 yang membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks segitiga ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat. Matriks yang digunakan pada penelitian ini adalah:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ dan } B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Penelitian ini menemukan bahwa bentuk umum *trace* matriks berpangkatnya adalah $tr(A_4^n) = tr(B_4^n) = 4(a^n), \forall n \in \mathbb{Z}^+$, dan $tr(A_4^{-n}) = tr(B_4^{-n}) = 4\left(\frac{1}{a^n}\right)$.

Selain itu, penelitian [5] yang dilakukan pada tahun 2020 tentang *trace* matriks berpangkat yang membahas bentuk umum *trace* matriks untuk matriks kompleks berordo 3×3 berpangkat bilangan bulat. Matriks berikut digunakan dalam penelitian ini:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a + bi & a - bi & a + bi \\ a + bi & a - bi & a + bi \\ a + bi & a - bi & a + bi \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \text{ dan } i = \text{imajiner}.$$

Hasil penelitian menunjukkan bahwa $tr(A_3^n) = (3a + bi)^n$.

Kemudian penelitian lainnya adalah [6] pada tahun 2021 yang membahas tentang bentuk umum *trace* matriks *circulant* kompleks bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat. Pada penelitian ini, matriks yang digunakan adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ z & 0 & z \\ z & z & 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } z = a + ib, \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ dan } i = \sqrt{-1}.$$

Penelitian ini menemukan bahwa bentuk umum *trace* matriks berpangkatnya adalah $tr(A^n) = (2^n + 2(-1)^n)z^n$.

Selain itu, penelitian [7] pada tahun 2021 yang membahas bentuk umum *trace* matriks berpangkat dari matriks Toeplitz 2-tridiagonal ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Hasil penelitian ini menunjukkan bentuk umum *trace* matriks sebagai berikut:

$$\text{tr}(A^n) = \begin{cases} a^n + 2 \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i, & n \text{ ganjil}, n > 0, n \in \mathbb{Z} \\ a^n + 2 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i, & n \text{ genap}, n \geq 0, n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Dalam penelitian [7], digunakan matriks toeplitz 2-tridiagonal dengan ordo 3×3 , yang berarti bentuk umum *trace* matriks berpangkat hanya berlaku untuk matriks ordo 3×3 . Oleh karena itu, pengembangan penelitian dapat dilakukan dengan menggunakan matriks yang sama tetapi dengan ordo matriks yang lebih besar. Maka penulis tertarik untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks dari matriks toeplitz 2-tridiagonal berpangkat bilangan bulat dengan ordo 4×4 . Sehingga penelitian tugas akhir diberi judul “*Trace Matriks Toeplitz 2-tridiagonal Ordo 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pada uraian yang terdapat di latar belakang, maka masalah yang dapat dirumuskan pada penelitian tugas akhir ini adalah “Bagaimana bentuk umum dari *trace* matriks toeplitz 2-tridiagonal ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat?”.

Batasan Penelitian

Berdasarkan pada rumusan masalah, batasan penelitian diperlukan agar masalah tidak berkembang. Oleh karena itu, penelitian tugas akhir ini membatasi masalah dengan menggunakan matriks toeplitz 2-tridiagonal dengan ordo 4×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ dan } a, b, c \neq 0 \tag{1.1}$$



Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum dari *trace* matriks toeplitz 2-tridiagonal ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat.

Manfaat Penelitian

Penelitian tugas akhir ini memiliki beberapa manfaat, yaitu sebagai berikut:
 Dapat meningkatkan pemahaman tentang matriks dan memudahkan penyelesaian *trace* matriks dari perpangkatan matriks toeplitz 2-tridiagonal. Dapat menjadi sebagai bahan referensi serta kajian pustaka untuk penelitian bagi pihak yang membutuhkan.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari lima bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini akan membahas latar belakang penelitian, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini akan membahas teori-teori pendukung yang berkaitan dengan *trace* matriks toeplitz 2-tridiagonal berpangkat bilangan bulat.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini akan diisi dengan langkah-langkah untuk menentukan bentuk umum *trace* matriks Toeplitz 2-tridiagonal berpangkat bilangan bulat.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini akan menjelaskan bagaimana mendapatkan bentuk umum *trace* matriks Toeplitz 2-tridiagonal berpangkat bilangan bulat.

BAB V PENUTUP

Bab ini akan diisi dengan kesimpulan dari seluruh pembahasan pada Bab IV serta saran dari penulis.

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB II LANDASAN TEORI

Untuk menyelesaikan masalah di bab berikutnya, bab ini memberikan dasar-dasar teori pendukung yang akan digunakan yaitu jenis-jenis matriks, perpangkatan, determinan, invers matriks, *trace* matriks, induksi matematika, dan teorema binomial.

2.1 Matriks Toeplitz

Definisi 2.1 [8] Matriks toeplitz adalah matriks berukuran $n \times n$ yang dapat dinyatakan dengan $T_n = [t_{k,j} : k, j = 0, 1, \dots, n - 1]$ dengan $t_{k,j} = t_{k-j}$, dan matriks ini memiliki bentuk berikut:

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

Suatu matriks toeplitz dapat didefinisikan secara sederhana, yaitu sebagai berikut:

- 1) Matriks berbentuk bujur sangkar dengan ordo $n \times n$.
 - 2) Semua entri yang berada di diagonal utama bernilai sama, dengan notasi $t_{k,j} = t_{k-j}$ untuk $k = j$ dan $k, j = 1, 2, \dots, n$.
- Semua entri yang berada di subdiagonal atau entri yang berada di atas diagonal serta bawah diagonal bernilai sama, dengan notasi $t_{k,j} = t_{k-j}$ untuk $k \neq j$ dan $k, j = 1, 2, \dots, n$ [9].

Contoh 2.1 Berikut diberikan contoh matriks toeplitz berukuran 4×4 dan 6×6 .

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ -9 & 1 & 9 & 7 & 5 & 3 \\ -7 & -9 & 1 & 9 & 7 & 5 \\ -5 & -7 & -9 & 1 & 9 & 7 \\ -3 & -5 & -7 & -9 & 1 & 9 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya pada bagian ini akan dijelaskan juga mengenai matriks tridiagonal, matriks toeplitz tridiagonal, dan matriks toeplitz k -tridiagonal.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.2.1. Matriks Tridiagonal

Jenis matriks persegi atau bujur sangkar yang disebut tridiagonal memiliki semua entri nol kecuali yang ada di diagonal utama dan diagonal tetangganya, yaitu diagonal dari kedua sisi diagonal utama [10]. Maka dapat disimpulkan bahwa entri yang memiliki nilai tidak nol hanya entri yang berada di diagonal utama serta pada diagonal atas dan bawah dari diagonal utama matriks. Bentuk umum dari matriks tridiagonal $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ adalah sebagai berikut:

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_2 & d_2 & a_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_3 & d_3 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & d_n \end{bmatrix}$$

dengan $t_{ij} = 0$ untuk $|i - j| \geq 2$ [11].

Contoh 2.2 Berikut diberikan contoh matriks tridiagonal berukuran 4×4

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

2.2.2. Matriks Toeplitz Tridiagonal

Salah satu jenis matriks toeplitz adalah matriks toeplitz tridiagonal, dan bentuk umum matriks toeplitz tridiagonal ordo $n \times n$ adalah sebagai berikut:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 \\ c & b & a & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & 0 & c & b \end{bmatrix}$$

dengan $a \neq 0$ dan $c \neq 0$ [12].

Contoh 2.3 Berikut diberikan contoh matriks toeplitz tridiagonal berukuran 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.3. Matriks Toeplitz k -Tridiagonal

Menurut [13], matriks toeplitz k -tridiagonal umumnya dapat ditulis dengan:

$$A_n^{(k)} = [a_{ij}]_{n \times n},$$

dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} a, & i = j \\ b, & i - j = k \\ c, & j - i = k \\ 0, & i, j, i - j, k, j - i, k \end{cases}$$

Menurut [14], bentuk umum dari matriks toeplitz k -tridiagonal ditunjukkan dengan

$$A_n^{(k)} = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \vdots & 0 & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & a & \ddots & \vdots & \ddots & b \\ c & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & c & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & 0 & a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}$$

dengan $n \geq k$ dan $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Matriks tridiagonal merupakan matriks toeplitz k -tridiagonal dengan $k = 1$. Kemudian jika $k = 2$, maka matriks yang dimiliki adalah matriks toeplitz 2-tridiagonal dengan bentuk matriksnya secara umum yaitu:

$$A_n^{(2)} = \begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & c & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & \dots & c & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}$$

Perpangkatan Matriks

Operasi matriks yang melakukan perkalian berulang terhadap matriks itu sendiri disebut perpangkatan matriks. Sebelum melakukan perpangkatan matriks, perlu diperhatikan bahwa matriks tersebut harus berupa matriks bujur sangkar, karena perkalian matriks memerlukan jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua. Jika matriks bukan bujur sangkar, maka



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

ukuran kolom serta barisnya tidak sama, sehingga tidak memenuhi syarat perkalian dan tidak dapat dilakukan perkalian terhadap matriks itu sendiri secara berulang.

Definisi 2.2 [15] Matriks bujur sangkar A memiliki pangkat bulat positif yang dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$A^0 = I \text{ dan } A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ faktor}} \text{ dengan } n > 0.$$

Di sisi lain, jika matriks A memiliki sifat invers atau dapat dibalik, pangkat bilangan bulat negatifnya adalah sebagai berikut:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1} \times A^{-1} \times \dots \times A^{-1}}_{n \text{ faktor}}.$$

Contoh 2.4 Matriks B diberikan dengan bentuk berikut:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Maka B^4 dari matriks ini adalah:

$$\begin{aligned} B^4 &= B \times B \times B \times B \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 31 & 63 \\ 21 & 52 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 251 & 594 \\ 198 & 449 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2284 & 5229 \\ 1743 & 4027 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.3 Determinan dan Invers Matriks

Definisi 2.3 [15] Misalkan matriks bujur sangkar A memiliki fungsi determinan (*determinant function*). Fungsi determinan disebut *det* dan didefinisikan sebagai $\det(A)$, yang merupakan penjumlahan semua hasilkali elementer bertanda pada matriks A . Bilangan $\det(A)$ disebut determinan dari matriks A .

Nilai determinan dari suatu matriks dapat diperoleh melalui berbagai metode. Salah satu metode yang dapat digunakan ialah metode ekspansi kofaktor. Berikut beberapa definisi dan teorema terkait metode ekspansi kofaktor.

Definisi 2.4 [15] Matriks bujur sangkar A dengan minor yang berasal dari entri a_{ij} dapat diwakili dengan M_{ij} serta dapat didefinisikan sebagai determinan pada sisa



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

dari submatriks setelah baris ke- i serta kolom ke- j yang dihapuskan dari A . Selanjutnya, C_{ij} merupakan bilangan yang dihasilkan dari $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dan dikenal sebagai kofaktor dari entri a_{ij} .

Teorema 2.1 [15] Perhitungan nilai determinan pada matriks $A_{n \times n}$ dapat dilakukan melalui perkalian entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan nilai dari kofaktor-kofaktornya serta menjumlahkan perolehan hasilkali-hasilkali, di mana untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$,

Ekspansi untuk kofaktor sepanjang kolom ke- j

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}.$$

Ekspansi untuk kofaktor sepanjang baris ke- i

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

Definisi 2.5 [15] Jika matriks A berukuran $n \times n$ dan memiliki kofaktor C_{ij} untuk a_{ij} , maka matriks kofaktor A adalah matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari A serta dinyatakan dengan $\text{adj}(A)$.

Contoh 2.5 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \end{bmatrix}$, carilah nilai determinannya dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor.

Penyelesaian

$$C_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -13$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 37$$

Sehingga diperoleh determinan dari matriks A yaitu:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 7(3) + 1(-13) + 2(37) = 82.$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Definisi 2.6 [15] Jika matriks A adalah matriks bujur sangkar dan matriks B memiliki ukuran (ordo) yang sama dengan matriks A sehingga $AB = BA = I$, maka matriks A dianggap dapat dibalik (*invertible*) dan matriks B dianggap sebagai invers (*inverse*) dari matriks A . Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka matriks A dianggap sebagai matriks singular.

Teorema 2.2 [15] Jika matriks A memiliki invers atau dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Contoh 2.6 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan invers matriksnya.

Penyelesaian

Dalam Contoh 2.5, nilai determinan dari matriks A adalah $\det(A) = 82$. Kemudian untuk mendapatkan invers matriks A maka perlu didapatkan matriks kofaktornya.

Matriks kofaktor A diperoleh dari nilai kofaktor-kofaktor dari A , yaitu:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 3, & C_{12} &= -13, & C_{13} &= 37, \\ C_{21} &= 15, & C_{22} &= 17, & C_{23} &= -61, \\ C_{31} &= -7, & C_{32} &= 3, & C_{33} &= 23. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktor A yaitu sebagai berikut.

$$\text{Kofaktor}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -13 & 37 \\ 15 & 17 & -61 \\ -7 & 3 & 23 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Definisi 2.6 untuk mendapatkan $\text{adj}(A)$, yaitu $(\text{kof}(A))^t = \text{adj}(A)$, maka dapat diperoleh inversnya yaitu:

$$A^{-1} = \frac{1}{82} \begin{bmatrix} 3 & 15 & -7 \\ -13 & 17 & 3 \\ 37 & -61 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{82} & \frac{15}{82} & \frac{-7}{82} \\ \frac{-13}{82} & \frac{17}{82} & \frac{3}{82} \\ \frac{37}{82} & \frac{-61}{82} & \frac{23}{82} \end{bmatrix}.$$

2.4 Trace Matriks dan Sifat-Sifat Trace Matriks

Definisi 2.7 [1] Matriks bujur sangkar A memiliki jejak (*trace*) yang dinotasikan $\text{tr}(A)$ yang merupakan penjumlahan dari entri yang berada di diagonal utama



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

matriks A . Jika matriks A bukan matriks bujur sangkar, maka jejak (*trace*) dari matriks A tidak terdefinisi.

Contoh 2.7 Diberikan matriks A dan B :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 8 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 9 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 8 & 3 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Nilai *trace* untuk matriks A dan B adalah:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} \text{ dan } tr(B) = 1 + 8 + 8 + 7 + 3 + 2 = 29.$$

Teorema berikut akan memberikan karakteristik *trace* matriks untuk matriks persegi.

Teorema 2.3 [16] Jika matriks A dan B berukuran $n \times n$ dan k adalah skalar, maka berlaku:

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
2. $tr(A - B) = tr(A) - tr(B)$
3. $tr(kA) = k \cdot tr(A)$
4. $tr(AB) = tr(BA)$
5. $tr(A^T) = tr(A)$

Trace Matriks Berpangkat

Dalam penelitiannya, [7] membahas mengenai bentuk umum dari *trace* matriks berpangkat. Penelitian tersebut menggunakan matriks teoplitz 2-tridiagonal order 3×3 yang berjudul “*Trace Matriks Toeplitz 2-tridiagonal 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif*”. Pada bagian ini penulis akan menjelaskan hasil dari penelitian tersebut. Langkah-langkah penelitiannya adalah sebagai berikut:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$

Menentukan perpangkatan A^2 sampai A^{13} , yaitu sebagai berikut:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & 0 & 2ac \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2ab & 0 & a^2 + bc \end{bmatrix}$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 A^3 &= \begin{bmatrix} a^3 + 3abc & 0 & 3a^2c + bc^2 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 3a^2b + b^2c & 0 & a^3 + 3abc \end{bmatrix} \\
 A^4 &= \begin{bmatrix} a^4 + 6a^2bc + b^2c^2 & 0 & 4a^3c + 4abc^2 \\ 0 & a^4 & 0 \\ 4a^3b + 4ab^2c & 0 & a^4 + 6a^2bc + b^2c^2 \end{bmatrix} \\
 A^5 &= \begin{bmatrix} a^5 + 10a^3bc + 5ab^2c^2 & 0 & 5a^4c + 10a^2bc^2 + b^2c^3 \\ 0 & a^5 & 0 \\ 5a^4b + 10a^2b^2c + b^3c^2 & 0 & a^5 + 10a^3bc + 5ab^2c^2 \end{bmatrix} \\
 A^6 &= \begin{bmatrix} a^6 + 15a^4bc + 15a^2b^2c^2 + b^3c^3 & 0 & 6a^5c + 20a^3bc^2 + 6ab^2c^3 \\ 0 & a^6 & 0 \\ 6a^5b + 20a^3b^2c + 6ab^3c^2 & 0 & a^6 + 15a^4bc + 15a^2b^2c^2 + b^3c^3 \end{bmatrix} \\
 A^7 &= \begin{bmatrix} a^7 + 21a^5bc + 35a^3b^2c^2 + 7ab^3c^3 & 0 & 7a^6c + 35a^4bc^2 + 21a^2b^2c^3 + b^3c^4 \\ 0 & a^7 & 0 \\ 7a^6b + 35a^4b^2c + 21a^2b^3c^2 + b^4c^3 & 0 & a^7 + 21a^5bc + 35a^3b^2c^2 + 7ab^3c^3 \end{bmatrix} \\
 A^8 &= \begin{bmatrix} a^8 + 28a^6bc + 70a^4b^2c^2 + 28a^2b^3c^3 + b^4c^4 & 0 & 8a^7c + 56a^5bc^2 + 56a^3b^2c^3 + 8ab^3c^4 \\ 0 & a^8 & 0 \\ 8a^7b + 56a^5b^2c + 56a^3b^3c^2 + 8ab^4c^3 & 0 & a^8 + 28a^6bc + 70a^4b^2c^2 + 28a^2b^3c^3 + b^4c^4 \end{bmatrix} \\
 A^9 &= \begin{bmatrix} a^9 + 36a^7bc + 126a^5b^2c^2 + 84a^3b^3c^3 + 9ab^4c^4 & 0 & 9a^8c + 84a^6bc^2 + 126a^4b^2c^3 + 28a^2b^3c^4 + b^4c^5 \\ 0 & a^9 & 0 \\ 9a^8b + 84a^6b^2c + 126a^4b^3c^2 + 28a^2b^4c^3 + b^5c^4 & 0 & a^9 + 36a^7bc + 126a^5b^2c^2 + 84a^3b^3c^3 + 9ab^4c^4 \end{bmatrix} \\
 A^{10} &= \begin{bmatrix} a^{10} + 45a^8bc + 210a^6b^2c^2 + 210a^4b^3c^3 + 45a^2b^4c^4 + b^5c^5 & 0 & 10a^9c + 120a^7bc^2 + 252a^5b^2c^3 + 120a^3b^3c^4 + 10ab^4c^5 \\ 0 & a^{10} & 0 \\ 10a^9b + 120a^7b^2c + 252a^5b^3c^2 + 120a^3b^4c^3 + 10ab^5c^4 & 0 & a^{10} + 45a^8bc + 210a^6b^2c^2 + 210a^4b^3c^3 + 45a^2b^4c^4 + b^5c^5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$A^{11} = \begin{bmatrix} a^{11} + 55a^9bc + 330a^7b^2c^2 + 462a^5b^3c^3 + 165a^3b^4c^4 + 11ab^5c^5 & 0 & 11a^{10}c + 165a^8bc^2 + 462a^6b^2c^3 + 330a^4b^3c^4 + 55a^2b^4c^5 + b^5c^6 \\ 0 & a^{11} & 0 \\ 11a^{10}b + 165a^8b^2c + 462a^6b^3c^2 + 330a^4b^4c^3 + 55a^2b^5c^4 + b^6c^5 & 0 & a^{11} + 55a^9bc + 330a^7b^2c^2 + 462a^5b^3c^3 + 165a^3b^4c^4 + 11ab^5c^5 \end{bmatrix}$$

$$A^{12} = \begin{bmatrix} a^{12} + 66a^{10}bc + 495a^8b^2c^2 + 924a^6b^3c^3 + 495a^4b^4c^4 + 66a^2b^5c^5 + b^6c^6 & 0 & 12a^{11}c + 220a^9bc^2 + 792a^7b^2c^3 + 792a^5b^3c^4 + 220a^3b^4c^5 + 12ab^5c^6 \\ 0 & a^{12} & 0 \\ 12a^{11}b + 220a^9b^2c + 792a^7b^3c^2 + 792a^5b^4c^3 + 220a^3b^5c^4 + 12ab^6c^5 & 0 & a^{12} + 66a^{10}bc + 495a^8b^2c^2 + 924a^6b^3c^3 + 495a^4b^4c^4 + 66a^2b^5c^5 + b^6c^6 \end{bmatrix}$$

$$A^{13} = \begin{bmatrix} a^{13} + 78a^{11}bc + 715a^9b^2c^2 + 1716a^7b^3c^3 + 1287a^5b^4c^4 + 286a^3b^5c^5 + 13ab^6c^6 & 0 & 13a^{12}c + 286a^{10}bc^2 + 1287a^8b^2c^3 + 1716a^6b^3c^4 + 715a^4b^4c^5 + 78a^2b^5c^6 + b^6c^7 \\ 0 & a^{13} & 0 \\ 13a^{12}b + 286a^{10}b^2c + 1287a^8b^3c^2 + 1716a^6b^4c^3 + 715a^4b^5c^4 + 78a^2b^6c^5 + b^7c^6 & 0 & a^{13} + 78a^{11}bc + 715a^9b^2c^2 + 1716a^7b^3c^3 + 1287a^5b^4c^4 + 286a^3b^5c^5 + 13ab^6c^6 \end{bmatrix}$$

Menduga bentuk umum dari A^n , yaitu:

Teorema 2.4 Berdasarkan matriks $A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \forall a, b, c \in \mathbb{R}$, maka didapatkan

bentuk umum matriks berpangkat hingga ke n :

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1}b^i c^{i+1} \\ 0 & a^n & 0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1}b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i \end{bmatrix}, n \text{ ganjil}, n > 0, n \in \mathbb{Z} \\ \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1}b^i c^{i+1} \\ 0 & a^n & 0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1}b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i \end{bmatrix}, n \text{ genap}, n \geq 0, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Pembuktian bentuk umum A^n dengan menggunakan induksi matematika akan dibahas pada bagian induksi matematika.

Mendapatkan bentuk umum *trace* matriks A^n .

Teorema 2.5 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \forall a, b, c \in \mathbb{R}$, maka:

$$tr(A^n) = \begin{cases} a^n + 2 \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i, & n \text{ ganjil}, n > 0, n \in \mathbb{Z} \\ a^n + 2 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i, & n \text{ genap}, n \geq 0, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2.6 Induksi Matematika

Salah satu metode dalam melakukan pembuktian terhadap suatu pernyataan apakah pernyataan tersebut benar atau salah secara deduktif disebut dengan induksi matematika. Metode ini telah sering digunakan untuk melakukan pembuktian terhadap pernyataan matematika.

Definisi 2.8 [17] Misalkan proposisi $p(n)$ berkaitan dengan perihalan bilangan bulat positif, kemudian akan dilakukan pembuktian bahwa $p(n)$ benar terhadap semua bilangan bulat positif n . Dalam membuktikan hal ini, harus dibuktikan:

1. $p(1)$ benar, dan
2. jika diasumsikan $p(n)$, maka $p(n + 1)$ juga akan benar untuk setiap $n \geq 1$.

Dengan demikian, $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n .

Dalam induksi matematika, basis induksi adalah langkah pertama, dan langkah induksi adalah langkah kedua. Pada langkah kedua akan diisi dengan asumsi atau pengandaian yang menyatakan bahwa $p(n)$ adalah benar, disebut hipotesis induksi. Ketika telah didapatkan pembuktian bahwa kedua langkah tersebut benar, maka telah terbukti bahwasannya $p(n)$ benar bagi semua bilangan bulat positif n .

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Langkah pertama yaitu basis induksi dibuktikan agar menunjukkan bahwa dari pernyataan yang sedang dibuktikan itu benar dengan mengganti n menjadi 1, yang mana 1 merupakan bilangan bulat positif terkecil.

Selanjutnya, untuk melakukan pembuktian bahwasannya implikasi $p(n) \rightarrow p(n + 1)$ benar bagi semua bilangan bulat positif, perlu ditunjukkan bahwa $p(n + 1)$ tidak mungkin salah atau pasti benar jika $p(n)$ benar. Sehingga penyelesaian hal ini dapat dilakukan dengan menunjukkan bahwa jika hipotesis $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga harus benar.

Contoh 2.8 Pembuktian bentuk umum A^n pada penelitian [7] dengan menggunakan induksi matematika.

Penyelesaian

Untuk n ganjil, matriks A akan dibuktikan dengan induksi matematika, sebagai berikut:

$$p(n): A^n = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1} \\ 0 & a^n & 0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i \end{bmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa $p(1)$ benar.

$$p(1): A^1 = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^0 \binom{1}{2i} a^{1-2i} (bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^0 \binom{1}{2i+1} a^{1-2i-1} b^i c^{i+1} \\ 0 & a^1 & 0 \\ \sum_{i=0}^0 \binom{1}{2i+1} a^{1-2i-1} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^0 \binom{1}{2i} a^{1-2i} (bc)^i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^1 (bc)^0 & 0 & a^0 b^0 c^1 \\ 0 & a^n & 0 \\ a^0 b^1 c^0 & 0 & a^1 (bc)^0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$$

2. Buktikan bahwa $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{2i} a^{k-2i} (bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^i c^{i+1} \\ a^k & 0 & 0 \\ \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{2i} a^{k-2i} (bc)^i \end{bmatrix}$$

3. Buktikan $p(k+2)$ juga benar yaitu:

$$p(k+2): A = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \\ 0 & a^{k+2} & 0 \\ \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Pembuktian sebagai berikut:

$$A^{k+2} = A^k \cdot A^2$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{2i} a^{k-2i} (bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^i c^{i+1} \\ a^k & 0 & 0 \\ \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{2i} a^{k-2i} (bc)^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^2 \binom{2}{2i} a^{2-2i} (bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^2 \binom{2}{2i+1} a^{1-2i} b^i c^{i+1} \\ 0 & a^2 & 0 \\ \sum_{i=0}^2 \binom{2}{2i+1} a^{1-2i} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^2 \binom{2}{2i} a^{2-2i} (bc)^i \end{bmatrix}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \\ 0 & a^{k+2} & 0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i \end{bmatrix}$$

Dengan melihat Persamaan (2.1) maka terbukti bahwa $p(k+2)$ benar, dan karena pada langkah (1) dan (2) sudah ditunjukkan benar, maka terbukti untuk n bilangan positif ganjil. Selanjutnya dengan cara yang sama dapat dibuktikan A^n untuk n bilangan positif genap.

2.7 Teorema Binomial

Teorema binomial banyak digunakan untuk penurunan beberapa teorema serta pemecahan dari masalah dalam matematika.

Teorema 2.6 [18] Jika k dan r merupakan bilangan-bilangan asli dengan $k > r$, maka

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}.$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} &= \frac{k!}{(k-r+1)!(r-1)!} + \frac{k!}{(k-r)!r!} \\ &= \frac{k!(r) + k!(k-r+1)}{(k+1-r)!r!} \\ &= \frac{k!(r+k-r+1)}{(k+1-r)!r!} \\ &= \frac{k!(k+1)}{(k+1-r)!r!} \\ &= \frac{(k+1)!}{(k+1-r)!r!} \\ &= \binom{k+1}{r} \end{aligned}$$

sehingga terbukti bahwa $\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$.

Contoh 2.9 Diberikan

$$\binom{8}{5} = \binom{7}{4} + \binom{7}{5}.$$

Buktikan bahwa pernyataan tersebut benar.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \binom{8}{5} &= \binom{7}{4} + \binom{7}{5} \\ \frac{8!}{5!(8-5)!} &= \frac{7!}{4!(7-4)!} + \frac{7!}{5!(7-5)!} \\ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!(3)!} &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!(3)!} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!(2)!} \\ &= 35 + 21 \\ &= 56 \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa $\binom{8}{5} = \binom{7}{4} + \binom{7}{5}$.

Teorema 2.7 [17] Misalkan x dan y merupakan peubah, dan n merupakan bilangan bulat non-negatif. Maka

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Contoh 2.9 Jabarkan bentuk $(k - lm)^3$ dengan menggunakan Teorema 2.7.

Penyelesaian

Untuk $(p^2 - qr)^4$, dapat diketahui bahwa nilai $x = p^2$, $y = (-qr)$, dan $n = 4$.

Maka:

$$\begin{aligned} (p^2 - qr)^4 &= (p^2 + (-qr))^4 = \sum_{i=0}^4 \binom{4}{k} ((p^2)^{4-k} (-qr)^k \\ &= \sum_{i=0}^4 \binom{4}{k} p^{8-2k} (-qr)^k \\ &= \binom{4}{0} p^{8-2(0)} (-qr)^0 + \binom{4}{1} p^{8-2(1)} (-qr)^1 + \\ &\quad \binom{4}{2} p^{8-2(2)} (-qr)^2 + \binom{4}{3} p^{8-2(3)} (-qr)^3 + \\ &\quad \binom{4}{4} p^{8-2(4)} (-qr)^4 \\ &= (1)p^8 + (4)p^6(-qr) + (6)p^4(q^2r^2) + \\ &\quad (4)p^2(-q^3r^3) + (1)p^0(q^4r^4) \\ &= p^8 - 4p^6qr + 6p^4q^2r^2 - 4p^2q^3r^3 + q^4r^4 \end{aligned}$$

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Diarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB III METODE PENELITIAN

Tujuan dari penelitian tugas akhir ini adalah untuk menentukan bentuk umum dari *trace* matriks toeplitz 2-tridiagonal berordo 4×4 berpangkat bilangan bulat. Penelitian ini menggunakan beberapa langkah atau prosedur. Pada tugas akhir ini, studi literatur digunakan untuk mengumpulkan data. Ini dilakukan dengan menggunakan buku, jurnal, dan sumber literatur lainnya. Untuk mencapai tujuan tersebut, langkah-langkah berikut harus dilakukan:

Diberikan matriks toeplitz 2-tridiagonal dengan ordo 4×4 pada Persamaan (1.1).

2. Menentukan perpangkatan matriks A_4 dari A_4^2 hingga A_4^k , dengan k merupakan batas atas ketika pola telah terlihat.
3. Menduga bentuk umum dari A_4^n dengan n bilangan bulat positif.
4. Membuktikan bentuk umum dari A_4^n dengan n bilangan bulat positif menggunakan induksi matematika.
5. Menentukan invers matriks A_4 menggunakan metode adjoin.
6. Menentukan perpangkatan matriks A_4^{-1} dari A_4^{-2} hingga A_4^{-k} , dengan k merupakan batas atas ketika pola telah terlihat.

Menduga bentuk umum dari A_4^n dengan n bilangan bulat negatif.
Membuktikan bentuk umum dari A_4^n dengan n bilangan bulat negatif.
menggunakan aturan invers, yaitu $A_4^n A_4^{-n} = A_4^{-n} A_4^n = I$.

Mendapatkan bentuk umum dari $tr(A_4^n)$ dengan n bilangan bulat menggunakan definisi *trace* matriks.
Mengaplikasikan bentuk umum dari A_4^n dan $tr(A_4^n)$ pada contoh soal.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berikut ini pembahasan mengenai *trace* matriks toeplitz 2-tridiagonal ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat dengan menggunakan matriks Persamaan (1,1), maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

Diberikan matriks $A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, dan $a, b, c \neq 0$. Maka bentuk umum perpangkatan matriks toeplitz 2-

tridiagonal ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif, yaitu:

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-2i} (bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1} & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1} \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i & 0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^{i+1} c^i & 0 & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i \end{bmatrix}, & n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a^{n-2i} (bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1} & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1} \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i & 0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a^{n-2i-1} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i \end{bmatrix}, & n \text{ genap} \end{cases}$$

dan

$$\text{tr}(A_4)^n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i, \quad n \text{ ganjil}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i, \quad n \text{ genap}$$

Selanjutnya bentuk umum berpangkat matriks toeplitz 2-tridiagonal ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat negatif, yaitu:

$$A^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1}}{(a^2-bc)^n} & 0 & 0 \\ \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i}{(a^2-bc)^n} & 0 & \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1}}{(a^2-bc)^n} & 0 \\ 0 & \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i}{(a^2-bc)^n} & 0 & 0 \\ \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1}}{(a^2-bc)^n} & 0 & \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i}{(a^2-bc)^n} & 0 \end{bmatrix}, \quad n \text{ ganjil}$$

$$A^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1}}{(a^2-bc)^n} & 0 & 0 \\ \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i}{(a^2-bc)^n} & 0 & \frac{\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1}}{(a^2-bc)^n} & 0 \\ 0 & \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i}{(a^2-bc)^n} & 0 & 0 \\ \frac{\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1}}{(a^2-bc)^n} & 0 & \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i}{(a^2-bc)^n} & 0 \end{bmatrix}, \quad n \text{ genap}$$

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\text{tr}(A_4^{-n}) = \begin{cases} 4 \left(\frac{\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i}{(a^2-bc)^n} \right) & , n \text{ ganjil} \\ 4 \left(\frac{\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i} (bc)^i}{(a^2-bc)^n} \right) & , n \text{ genap} \end{cases} .$$

Saran

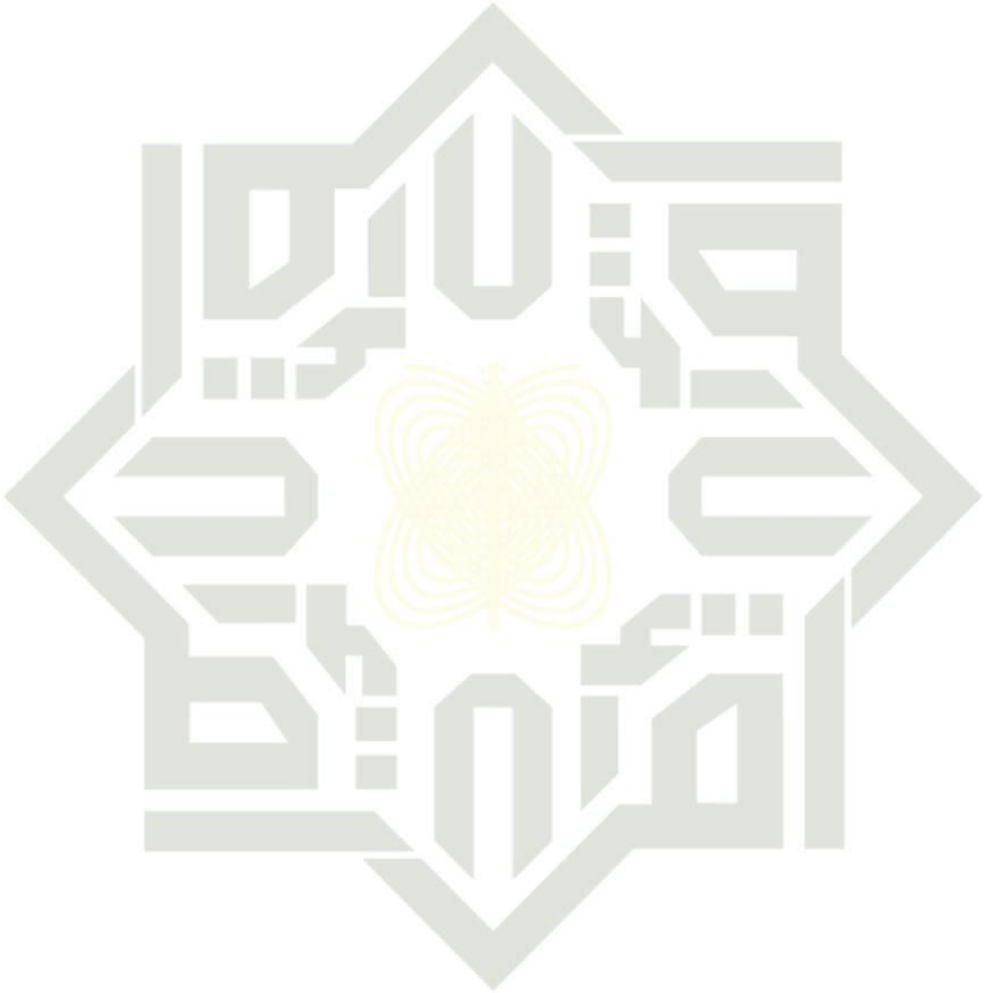
Pembahasan pada tugas akhir ini ialah *trace* matriks toeplitz 2-tridiagonal ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat. Bagi pembaca yang tertarik untuk membahas topik yang sama dengan tugas akhir ini, penulis menyarankan untuk mengembangkan penelitian dengan memperbesar ukuran atau ordo dari matriks toeplitz 2-tridiagonal dan kemudian menentukan bentuk umum *trace* matriksnya.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

DAFTAR PUSTAKA

1. Diararang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Diararang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
-
- [6] J. Soebagyo, *Matematika Teknik Aljabar Linear dan Matriks*. Bandung: Manggu Makmur Tanjung Lestari, 2019.
 - [7] F. Aryani, R. Andesta, dan C. C. Marzuki, "Trace Matriks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 1, pp. 40–49, 2020.
 - [8] C. C. Marzuki, F. Aryani, dan R. Rahmawati, "Trace Matriks $n \times n$ Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 7, no. 1, pp. 28–37.
 - [9] C. C. Marzuki, "Trace Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat," in *Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi dan Industri*, 2020, p. 651.
 - [10] F. Aryani, C. Anam, dan C. C. Marzuki, "Trace Matriks Kompleks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 1, pp. 122–132, 2020.
 - [11] D. Mamula, N. Achmad, and R. Resmawan, "Matriks Circulant Kompleks Bentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat," *Jurnal Matematika Integratif*, vol. 17, no. 2, pp. 109–118, 2021.
 - [12] I. R. Ollie dan L. Y. Resmawan, "Trace Matriks Toeplitz 2-tridiagonal 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Berekeng Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 15, no. 3, pp. 441 – 452, 2021.
 - [13] R. M. Gray, "Toeplitz and circulant matrices: A review," *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, vol. 2, no. 3, pp. 155–239, 2006.
 - [14] S. Fatmasari dan T. A. Nurman, "Bentuk Umum Determinan Matriks Toeplitz Tridiagonal," *Jurnal Matematika dan Statistika serta Aplikasinya*, vol. 4, no. 1, pp. 33–39, 2016.
 - [15] C. Clapham dan J. Nicholson, *The Concise Oxford Dictionary of Mathematics*, 4th ed. England: Oxford University Press, 2009.
 - [16] M. El-Mikkawy dan A. Karawia, "Inversion of general tridiagonal matrices," *Applied Mathematics Letters*, vol. 19, no. 8, pp. 712–720, 2006.
 - [17] D. K. Salkuyeh, "Positive integer powers of the tridiagonal Toeplitz matrices," in *International Mathematical Forum*, Hikari, Ltd., 2006, pp. 1061–1065.
 - [18] R. Rasmawati, L. Yahya, A. R. Nuha, dan R. Resmawan, "Determinan Suatu Matriks Toeplitz K-tridiagonal Menggunakan Metode Reduksi Baris dan Ekspansi Kofaktor," *Euler Jurnal Ilmiah Matematika Sains dan Teknologi*, vol. 9, no. 1, pp. 6–16, 2021.
 - [19] A. Z. Küçük, M. Özen, dan H. İnce, "Recursive and combinational formulas for permanents of general k-tridiagonal Toeplitz matrices," *Filomat*, vol. 33, no. 1, pp. 307–317, 2019.
 - [20] H. Anton dan C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*, 8th ed. Jakarta: Erlangga, 2004.

- 6] G. Hartman, *Fundamentals of Matrix Algebra*, 3rd ed. Lexington: CreateSpace Independent Publishing Platform, 2011.
- 7] R. Munir, *Matematika Diskrit*, 6th ed. Bandung: Informatika Bandung, 2016.
- 8] Sukirman, *Pengantar Teori Bilangan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator, 2006.



UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Uraian pembuktian matriks berpangkat bilangan positif ganjil

Uraian ini akan menggunakan Teorema 2.6.

Entri a_{11} , a_{22} , a_{33} , dan a_{44}

Akan ditunjukkan

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} = \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i$$

maka:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k-1}{2i} a^{k-2i} (bc)^i \right) + bc \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k-1}{2i} a^{k-2i} (bc)^i \right) + 2ab \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^i c^{i+1} \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k-1}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i \right) + \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k-1}{2i} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \right) + 2 \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k-1}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i \right) + \left(\left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k-1}{2i} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \right) + \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \right) \right) + \\ & \quad \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k-1}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i \right) + \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \right) + \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k-1}{2i} a^{k-2i+2} \cdot (bc)^i + (a^{k+2}) \right) + \left(\left(\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i} \cdot (bc)^{i+1} \right) + a(bc)^{\frac{k+1}{2}} \right) + \\ & \quad \left(\left(\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \right) + (k+1) a(bc)^{\frac{k+1}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \\ &= i+1 \rightarrow l=0+1 \rightarrow i=1 \\ & \sum_{i=1}^{\frac{(k-3)}{2}+1} \binom{k+1}{2(l-1)+1} a^{k-2(l-1)} (bc)^{(l-1)+1} = \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i-1} a^{k-2i+2} (bc)^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \\ &= i+1 \rightarrow l=0+1 \rightarrow i=1 \\ & \sum_{i=1}^{\frac{(k-3)}{2}+1} \binom{k}{2(l-1)+1} a^{k-2(l-1)} (bc)^{(l-1)+1} = \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+2} (bc)^i \end{aligned}$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+2} \cdot (bc)^i + \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+2} (bc)^i \right) + \sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} \binom{k+1}{2i-1} a^{k-2i} \cdot (bc)^{i+1} + \\ & \left(ka(bc)^{\frac{k+1}{2}} + a(bc)^{\frac{k+1}{2}} \right) + \left(a(bc)^{\frac{k+1}{2}} \right) + (a^{k+2}) \\ & \left(\left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i} a^{k-2i+2} \cdot (bc)^i \right) + \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i-1} a^{k-2i+2} \cdot (bc)^i \right) + (a^{k+2}) + ka(bc)^{\frac{k+1}{2}} + \\ & 2a(bc)^{\frac{k+1}{2}} \\ & \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2} \cdot (bc)^i + (a^{k+2}) + \left(ka(bc)^{\frac{k+1}{2}} + 2a(bc)^{\frac{k+1}{2}} \right) \\ a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} &= \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2} \cdot (bc)^i \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Entri a_{13} dan a_{24}

Akan ditunjukkan

$$a_{13}, a_{24} = \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1}$$

maka:

$$\begin{aligned} & a^2 \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^i c^{i+1} \right) + bc \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^i c^{i+1} \right) + \\ & 2ac \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} (bc)^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^{i+2} + 2 \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^{i+2} + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \\ & \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \right) + \\ & \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^{i+2} + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \right) + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^{i+2} + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + (ka^{k+1}c + a^{k+1}c) \right) + \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^{i+2} + \right. \\ & \left. b^{\frac{k+1}{2}} c^{\frac{k+3}{2}} \right) + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + (a^{k+1}c) \right) \end{aligned}$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^{i+2}$$

$$= i+1 \rightarrow l=0+1 \rightarrow i=1$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{(k-3)}{2}+1} \binom{k}{2(l-1)+1} a^{k-2(l-1)-1} b^{(l-1)+1} c^{(l-1)+2} = \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \right) +$$

$$(ka^{k+1}c + a^{k+1}c) + (a^{k+1}c) + \left(b^{\frac{k+1}{2}} c^{\frac{k+3}{2}} \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \right) \right) + ka^{k+1}c + 2a^{k+1}c +$$

$$b^{\frac{k+1}{2}} c^{\frac{k+3}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \right) + (ka^{k+1}c + 2a^{k+1}c) + \left(b^{\frac{k+1}{2}} c^{\frac{k+3}{2}} \right)$$

$$a_{13}, a_{24} = \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \quad \blacksquare$$

3. Entri a_{31} dan a_{42}

Akan ditunjukkan

$$a_{31}, a_{42} = \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i$$

maka:

$$= \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i \right) + bc \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i \right) +$$

$$2ab \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} (bc)^i \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+2} c^{i+1} + 2 \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+2} c^{i+1} + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i +$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i \right) + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+2} c^{i+1} +$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i \right) + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+2} c^{i+1} + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i + (ka^{k+1}b + a^{k+1}b) \right) + \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+2} c^{i+1} + \left(b^{\frac{k+3}{2}} c^{\frac{k+1}{2}} \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i + (a^{k+1}b) \right)$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+2} c^{i+1}$$

$= i + 1 \rightarrow l = 0 + 1 \rightarrow i = 1$

$$\sum_{i=1}^{\frac{(k-3)}{2}+1} \binom{k}{2(l-1)+1} a^{k-2(l-1)-1} b^{(l-1)+2} c^{(l-1)+1} = \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i + (ka^{k+1}b + a^{k+1}b) \right) + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i + \left(b^{\frac{k+3}{2}} c^{\frac{k+1}{2}} \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i + (a^{k+1}b) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i + \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i \right) + (ka^{k+1}b + a^{k+1}b) + \left(b^{\frac{k+3}{2}} c^{\frac{k+1}{2}} \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+1}{2i} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i \right) \right) + ka^{k+1}b + 2a^{k+1}b + b^{\frac{k+3}{2}} c^{\frac{k+1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \right) + (ka^{k+1}b + 2a^{k+1}b) + \left(b^{\frac{k+3}{2}} c^{\frac{k+1}{2}} \right)$$

$$a_{31}, a_{42} = \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \quad \blacksquare$$

Lampiran 2 Uraian pembuktian matriks berpangkat bilangan positif genap

Uraian ini akan menggunakan Teorema 2.6.

Entri a_{11} , a_{22} , a_{33} , dan a_{44}

Akan ditunjukkan

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} = \sum_{i=0}^{\frac{k+2}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i$$

Baka:

$$\left(\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i} (bc)^i \right) + bc \left(\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i} (bc)^i \right) + 2ab \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^i c^{i+1} \right)$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i \right) + \left(\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \right) + 2 \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \right) \\
 & \left(\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i + (a^{k+2}) \right) + \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i} (bc)^{i+1} + ((bc)^{\frac{k+2}{2}}) \right) + \\
 & \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \right) \\
 & \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i} (bc)^{i+1} + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} + \\
 & \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} + a^{k+2} + (bc)^{\frac{k+2}{2}} \\
 & \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i + \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \right) + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} + \\
 & a^{k+2} + (bc)^{\frac{k+2}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \\
 & l = i + 1 \rightarrow l = 0 + 1 \rightarrow i = 1 \\
 & \sum_{i=1}^{\frac{(k-2)}{2}+1} \binom{k+1}{2(l-1)+1} a^{k-2(l-1)} (bc)^{(l-1)+1} = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k+1}{2i-1} a^{k-2i+2} (bc)^i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i} (bc)^{i+1} \\
 & = i + 1 \rightarrow l = 0 + 1 \rightarrow i = 1 \\
 & \sum_{i=1}^{\frac{(k-2)}{2}+1} \binom{k}{2(l-1)+1} a^{k-2(l-1)} (bc)^{(l-1)+1} = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+2} (bc)^i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k+1}{2i-1} a^{k-2i+2} (bc)^i + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+2} (bc)^i + a^{k+2} + \\
 & (bc)^{\frac{k+2}{2}} \\
 & \left(\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+2} (bc)^i \right) + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k+1}{2i-1} a^{k-2i+2} (bc)^i + \\
 & a^{k+2} + (bc)^{\frac{k+2}{2}} \\
 & \left(\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k+1}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i \right) + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k+1}{2i-1} a^{k-2i+2} (bc)^i + a^{k+2} + (bc)^{\frac{k+2}{2}} \\
 & \left(\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k+1}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k+1}{2i-1} a^{k-2i+2} (bc)^i \right) + a^{k+2} + (bc)^{\frac{k+2}{2}}
 \end{aligned}$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\left(\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i \right) + a^{k+2} + (bc)^{\frac{k+2}{2}}$$

$$a_{01}, a_{22}, a_{33}, a_{44} = \sum_{i=0}^{\frac{k+2}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2} (bc)^i \quad \blacksquare$$

Entri a_{13} dan a_{24}

Akan ditunjukkan

$$a_{13}, a_{24} = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1}$$

maka:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^i c^{i+1} \right) + bc \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^i c^{i+1} \right) + \\ & 2ac \left(\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} (bc)^i \right) \\ & = \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^{i+2} + 2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \\ & = \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^{i+2} + \\ & 2 \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \left(ab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}} \right) \right) \\ & = \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^{i+2} + 2 \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \\ & 2ab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}} \\ & = \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^{i+2} + \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \\ & \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + 2ab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}} \\ & = \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \right) + \\ & \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-4}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^{i+2} + \left(kab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}} \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + (a^{k+1}c) \right) + \\ & 2ab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}} \\ & = \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \right) + \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-4}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^{i+2} + \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \right. \\ & \left. a^{k+1}c + kab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}} + 2ab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}} \right) \end{aligned}$$



$$\sum_{i=0}^{\frac{k-4}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^{i+2}$$

$$l = i + 1 \rightarrow l = 0 + 1 \rightarrow i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{(k-4)}{2}+1} \binom{k}{2(l-1)+1} a^{k-2(l-1)-1} b^{(l-1)+1} c^{(l-1)+2} = \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + (ka^{k+1}c + a^{k+1}c) \right) + \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} +$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + a^{k+1}c + kab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}} + 2ab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}}$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \right) +$$

$$ka^{k+1}c + 2a^{k+1}c + kab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}} + 2ab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k+1}{2i} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \right) \right) + ka^{k+1}c + 2a^{k+1}c +$$

$$kab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}} + 2ab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \right) + (ka^{k+1}c + 2a^{k+1}c) + \left(kab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}} + 2ab^{\frac{k}{2}} c^{\frac{k+2}{2}} \right)$$

$$a_{13}, a_{24} = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \quad \blacksquare$$

3. Entri a_{31} dan a_{42}

Akan ditunjukkan

$$a_{31}, a_{42} = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i$$

maka:

$$\left(\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i \right) + bc \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i \right) +$$

$$2ab \left(\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1} (bc)^i \right)$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+2} c^{i+1} + 2 \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+2} c^{i+1} +$$

$$2 \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + \left(ab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} \right) \right)$$

- Hak Cipta Diindungi Undang-Undang**
1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Diarangi mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+2} c^{i+1} + 2 \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + \\
 & 2ab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} \\
 & \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+2} c^{i+1} + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + \\
 & \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + 2ab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} \\
 & \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i \right) + \\
 & \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-4}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+2} c^{i+1} + \left(kab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + (a^{k+1}b) \right) + \\
 & 2ab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} \\
 & \left(\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i \right) + \sum_{i=0}^{\frac{k-4}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+2} c^{i+1} + \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + \\
 & a^{k+1}b + kab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} + 2ab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{k-4}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+2} c^{i+1}$$

$l = i + 1 \rightarrow l = 0 + 1 \rightarrow i = 1$
 $\sum_{i=1}^{\frac{(k-4)}{2}+1} \binom{k}{2(l-1)+1} a^{k-2(l-1)-1} b^{(l-1)+2} c^{(l-1)+1} = \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i$

$$\begin{aligned}
 & = \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + (ka^{k+1}b + a^{k+1}b) \right) + \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i + \\
 & \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + a^{k+1}b + kab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} + 2ab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} \\
 & \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i-1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i \right) + \\
 & ka^{k+1}b + 2a^{k+1}b + kab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} + 2ab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} \\
 & \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k+1}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i + \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k+1}{2i} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i \right) \right) + ka^{k+1}b + 2a^{k+1}b + \\
 & kab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} + 2ab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} \\
 & \left(\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i \right) + (ka^{k+1}b + 2a^{k+1}b) + \left(kab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} + 2ab^{\frac{k+2}{2}} c^{\frac{k}{2}} \right) \\
 & \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 10 Juni 2002 di Perawang, sebagai anak pertama dari 2 bersaudara. Dilahirkan dari pasangan Bapak Suprpto dan Ibu Suriyani. Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SDIT I'aanatuth Thalibin pada tahun 2014. Pada Tahun 2017 menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Pertama (SMP)

SMP N 2 Bagan Sinembah. Kemudian pada Tahun 2020 menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA N 2 Bagan Sinembah dengan jurusan IPA. Pada tahun yang sama dengan selesainya pendidikan di SMA, penulis melanjutkan pendidikan ke perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dengan Program Studi Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi.

Pada bulan Januari Tahun 2023 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Dinas Pendidikan Kota Pekanbaru dengan judul **“Pengaruh Tata Ruang Kantor dan Komunikasi Internal terhadap Efektivitas Kerja Pegawai Dinas Pendidikan Kota Pekanbaru”** yang dibimbing oleh Bapak Sarbaini, M.Si., dan diseminarkan pada tanggal 5 Juni 2023. Pada tahun yang sama dengan kerja praktek, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Koto Bangun, Kecamatan Tapung Hilir, Kabupaten Kampar.

Pada Tahun 2023 penulis juga memulai penyusunan tugas akhir dengan judul **“Trace Matriks Toeplitz 2-tridiagonal Ordo 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat”** yang dibimbing oleh Fitri Aryani, M.Sc. Pada Tahun 2024 penulis melaksanakan seminar proposal pada tanggal 3 Januari 2024, dan melaksanakan sidang tugas akhir pada tanggal 19 Juni 2024.