BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Model Matematika SEII$_T$RS$_P$ Penyebaran Penyakit DM dengan Pengaruh Faktor Genetik

Pada bab ini akan dibahas model SEII$_T$RS$_P$ penyebaran penyakit DM yang merupakan gabungan dari model matematika Nur Fajri, dkk dan Karlina, dkk dengan menambahkan adanya pengaruh faktor genetik.

4.1.1 Pembentukan Model SEII$_T$RS$_P$

Pembentukan Model SEII$_T$RS$_P$ dengan pengaruh faktor genetik dibagi menjadi enam kelas populasi yaitu kelas *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Ill* (I), *Ill with Treatment* (I_T), *Recovery* (R), *Susceptible with Genetic Factor* (S_P). Adapun tambahan parameter yang digunakan pada model ini adalah sebagai berikut:

λ : Laju rekrutmen populasi.
θ : Laju rekrutmen populasi akibat faktor genetik.
$1-\varepsilon\varphi$: Laju individu sakit dengan perawatan akibat faktor genetik.
$\varepsilon\varphi$: Laju individu sakit tanpa perawatan akibat faktor genetik.
ω : Laju individu terkontrol.

Dengan menggunakan variabel dan parameter tersebut, maka model SEII$_T$RS$_P$ dengan pengaruh faktor genetik dapat diilustrasikan sebagai berikut:

Pada kelas *Susceptible* $S(t)$, maka jumlah populasi akan bertambah disebabkan adanya bayi yang lahir dan akan mengalami penurunan jumlah populasi disebabkan oleh adanya individu yang meninggal dan individu yang mnejadi laten.

Pada kelas *Exposed* $E(t)$, maka jumlah populasi akan bertambah disebabkan adanya peluang individu sehat dengan individu rentan terpapar penyakit dengan laju perpindahan β. Populasi $E(t)$ akan mengalami penurunan diakibatkan oleh adanya individu yang meninggal dan adanya individu yang berpindah menjadi individu yang terinfeksi tanpa perawatan dan terinfeksi dengan perawatan.

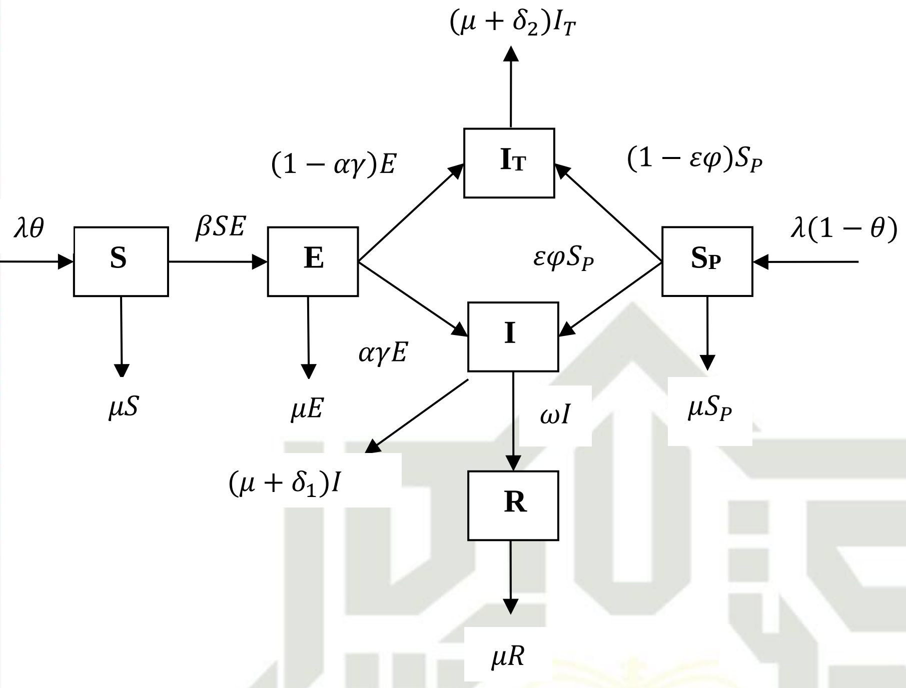
Pada kelas terinfeksi $I(t)$, maka jumlah populasi akan meningkat disebabkan adanya perpindahan individu rentan menjadi terinfeksi tanpa perawatan dengan laju perpindahan sebesar $\alpha\gamma$ dan adanya perpindahan individu rentan akibat faktor genetik menjadi terinfeksi tanpa perawatan dengan laju perpindahan sebesar $\varepsilon\varphi$. Populasi $I(t)$ akan mengalami penurunan diakibatkan adanya kematian dan adanya perpindahan individu menjadi terkontrol.

Pada kelas terinfeksi dengan perawatan $I_T(t)$, maka jumlah populasi akan meningkan karena adanya perpindahan individu rentan menjadi individu terinfeksi dengan perawatan dengan laju perpindahan sebesar $1-\alpha\gamma$ dan adanya perpindahan individu rentan akibat faktor genetik dengan laju perpindahan sebesar $1-\varepsilon\varphi$. Populasi $I_T(t)$ akan mengalami penurunan diakibatkan adanya individu yang mendapatkan perawatan dengan terapi serta pemberian obat dan adanya individu yang meninggal.

Pada kelas *Recovery* $R(t)$, maka jumlah populasi akan meningkat diakibatkan adanya perpindahan populasi terinfeksi tanpa perawatan menjadi individu terkontrol karena adanya pemberian insulin. Populasi $R(t)$ akan mengalami penurunan disebabkan oleh adanya kematian.

Pada kelas *Susceptible with Genetic Factor* $S_P(t)$, maka jumlah populasi akan mengalami peningkatan disebabkan adanya riwayat keluarga terpapar penyakit Diabetes Mellitus dan mengalami penurunan karena adanya perpindahan dari individu rentan akibat faktor genetik menjadi individu terinfeksi dengan perawatan ataupun tanpa perawatan. Selain itu, penurunan populasi $S_P(t)$ juga dapat disebabkan oleh adanya kematian.

Berdasarkan ilustrasi tersebut dapat digambarkan diagram transfer model $SEII_TRS_P$ sebagai berikut:



Gambar 4. 1 Model SEII$_T$RS$_P$

Berdasarkan Gambar 4.1 diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \lambda\theta - \mu S - \beta SE, \tag{4.1}$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SE - \mu E - E, \tag{4.2}$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha\gamma E + \varepsilon\varphi S_P - \omega I - (\mu+\delta_1)I, \tag{4.3}$$

$$\frac{dI_T}{dt} = (1-\alpha\gamma)E + S_P(1-\varepsilon\varphi) - (\mu+\delta_2)I_T, \tag{4.4}$$

$$\frac{dR}{dt} = \omega I - \mu R, \tag{4.5}$$

$$\frac{dS_P}{dt} = \lambda(1-\theta) - S_P(1+\mu). \tag{4.6}$$

4.2 Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium dari Persamaan (4.1) sampai dengan (4.6) diperoleh apabila $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dI_T}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0, \frac{dS_P}{dt} = 0$, titik ekuilibrium terbagi menjadi dua yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit.

4.2.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Populasi bebas penyakit artinya di dalam populasi tidak terdapat populasi laten dan populasi yang terinfeksi maka, $E = 0$, $I = 0$, dan $I_T = 0$. Sehingga diperoleh $E, I,$ dan I_T pada titik ekuilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{E}, \hat{I},$ dan $\widehat{I_T}$, yaitu $\hat{E} = 0$, $\hat{I} = 0$, dan $\widehat{I_T} = 0$.

Dari Persamaan (4.1) diperoleh

$$\lambda\theta - \mu\hat{S} - \beta\hat{S}\hat{E} = 0$$

Karena $\hat{E} = 0$, maka

$$\lambda\theta - \mu\hat{S} - \beta\hat{S}(0) = 0$$

$$\lambda\theta - \mu\hat{S} = 0$$

$$-\mu\hat{S} = -\lambda\theta$$

$$\hat{S} = \frac{\lambda\theta}{\mu} \tag{4.7}$$

Dari Persamaan (4.5) diperoleh

$$\omega\hat{I} - \mu\hat{R} = 0$$

$$\mu\hat{R} = \omega\hat{I}$$

Karena $\hat{I} = 0$, maka

$$\mu\hat{R} = 0$$

$$\hat{R} = 0 \tag{4.8}$$

Dari Persamaan (4.6) diperoleh

$$\lambda(1-\theta) - \widehat{S_P}(1+\mu) = 0$$

$$\lambda(1-\theta) = \widehat{S_P}(1+\mu)$$

$$\widehat{S_P} = \frac{\lambda(1-\theta)}{(1+\mu)} \tag{4.9}$$

Jadi, titik ekuilibrium bebas penyakit adalah sebagai berikut: $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \widehat{I_T}, \hat{R}, \widehat{S_P}) = \left(\frac{\lambda\theta}{\mu}, 0, 0, 0, 0, \frac{\lambda(1-\theta)}{(1+\mu)}\right)$.

4.2.2 Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Endemik penyakit artinya di dalam populasi selalu terdapat individu yang terserang penyakit, $E > 0, I > 0$, dan $I_T > 0$. Sehingga diperoleh E, I, dan I_T pada titik ekuilibrium endemik penyakit yang dinotasikan dengan E^*, I^*, dan ${I_T}^*$ yaitu $E^* > 0, I^* > 0$, dan ${I_T}^* > 0$.

Dari Persamaan (4.1) diperoleh

$$\lambda\theta - \mu S^* - \beta S^* E^* = 0$$

$$\lambda\theta - S^*(\mu + \beta E^*) = 0$$

$$\lambda\theta = S^*(\mu + \beta E^*)$$

$$S^* = \frac{\lambda\theta}{\mu + \beta E^*} \tag{4.10}$$

Substitusikan Persamaan (4.10) ke persamaan (4.2) sehingga diperoleh

$$\beta S^* E^* - \mu E^* - E^* = 0$$

$$\beta\left(\frac{\lambda\theta}{\mu + \beta E^*}\right)E^* - \mu E^* - E^* = 0$$

$$\beta\lambda\theta E^* - \mu E^*(\mu + \beta E^*) - E^*(\mu + \beta E^*) = 0$$

$$E^*(\beta\lambda\theta - \mu^2 - \mu) - {E^*}^2(\mu\beta + \beta) = 0$$

Dapat disederhanakan menjadi,

$$E^* = \frac{\beta\lambda\theta - \mu^2 - \mu}{\beta(\mu + 1)}$$

$$E^* = \frac{\beta\lambda\theta - \mu(\mu + 1)}{\beta(\mu + 1)} \tag{4.11}$$

Dari Persamaan (4.3) diperoleh

$$\alpha\gamma E^* + \varepsilon\varphi {S_P}^* - \omega I^* - (\mu + \delta_1)I^* = 0$$

$$\alpha\gamma E^* + \varepsilon\varphi {S_P}^* - (\omega + \mu + \delta_1)I^* = 0$$

$$\alpha\gamma E^* + \varepsilon\varphi {S_P}^* = (\omega + \mu + \delta_1)I^*$$

$$I^* = \frac{\alpha\gamma E^* + \varepsilon\varphi {S_P}^*}{(\omega + \mu + \delta_1)} \tag{4.12}$$

Selanjutnya dari Persamaan (4.4) diperoleh

$$(1 - \alpha\gamma)E^* + {S_P}^*(1 - \varepsilon\varphi) - (\mu + \delta_2){I_T}^* = 0$$

$$(1 - \alpha\gamma)E^* + {S_P}^*(1 - \varepsilon\varphi) = (\mu + \delta_2){I_T}^*$$

$${I_T}^* = \frac{(1 - \alpha\gamma)E^* + {S_P}^*(1 - \varepsilon\varphi)}{(\mu + \delta_2)} \tag{4.13}$$

Dari Persamaan (4.5) diperoleh

$$\omega I^* - \mu R^* = 0$$

$$\omega I^* = \mu R^*$$

$$R^* = \frac{\omega I^*}{\mu} \tag{4.14}$$

Dari Persamaan (4.6) diperoleh

$$\lambda(1-\theta) - S_P{}^*(1+\mu) = 0$$

$$\lambda(1-\theta) = S_P{}^*(1+\mu)$$

$$S_P{}^* = \frac{\lambda(1-\theta)}{(1+\mu)} \tag{4.15}$$

Jadi, titik ekuilibrium endemik penyakit $(S^*, E^*, I^*, I_T{}^*, R^*, S_P{}^*) = \left(\frac{\lambda\theta}{\mu+\beta E^*}, \frac{\beta\lambda\theta-\mu(\mu+1)}{\beta(\mu+1)}, \frac{\alpha\gamma E^*+\varepsilon\varphi S_P{}^*}{(\omega+\mu+\delta_1)}, \frac{(1-\alpha\gamma)E^*+S_P{}^*(1-\varepsilon\varphi)}{(\mu+\delta_2)}, \frac{\omega I^*}{\mu}, \frac{\lambda(1-\theta)}{(1+\mu)}\right)$ dengan $E^* = \frac{\beta\lambda\theta-\mu(\mu+1)}{\beta(\mu+1)}, S_P{}^* = \frac{\lambda(1-\theta)}{(1+\mu)}$ dan $I^* = \frac{\alpha\gamma E^*+\varepsilon\varphi S_P{}^*}{(\omega+\mu+\delta_1)}$.

4.3 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

Setelah didapat titik ekuilibrium dari Persamaan (4.1) sampai dengan Persamaan (4.6), maka akan dicari hasil pelinieran menggunakan matriks Jacobian. Untuk mendapatkan hasil dari matriks Jacobian dilakukan penyelesaian sebagai berikut:

$$f_1(S,E,I,I_T,R,S_P) = \lambda\theta - \mu S - \beta SE$$

$$f_2(S,E,I,I_T,R,S_P) = \beta SE - \mu E - E$$

$$f_3(S,E,I,I_T,R,S_P) = \alpha\gamma E + \varepsilon\varphi S_P - \omega I - (\mu+\delta_1)I$$

$$f_4(S,E,I,I_T,R,S_P) = (1-\alpha\gamma)E + S_P(1-\varepsilon\varphi) - (\mu+\delta_2)I_T$$

$$f_5(S,E,I,I_T,R,S_P) = \omega I - \mu R$$

$$f_6(S,E,I,I_T,R,S_P) = \lambda(1-\theta) - \varepsilon - \mu S_P$$

Selanjutnya, masing masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabel fungsi tersebut sebagai berikut:

1. Untuk fungsi f_1 diturunkan terhadap variabel S, E, I, I_T, R, S_P sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_1}{\partial S} = -\mu - \beta E, \frac{\partial f_1}{\partial E} = -\beta S, \frac{\partial f_1}{\partial I} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial I_T} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial R} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial S_P} = 0.$$

2. Untuk fungsi f_2 diturunkan terhadap variabel S, E, I, I_T, R, S_P sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_2}{\partial S} = \beta E, \frac{\partial f_2}{\partial E} = \beta S - 1 - \mu, \frac{\partial f_2}{\partial I} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial I_T} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial R} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial S_P} = 0.$$

3. Untuk fungsi f_3 diturunkan terhadap variabel S, E, I, I_T, R, S_P sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_3}{\partial S} = 0, \frac{\partial f_3}{\partial E} = \alpha\gamma, \frac{\partial f_3}{\partial I} = -\mu - \delta_1 - \omega, \frac{\partial f_3}{\partial I_T} = 0, \frac{\partial f_3}{\partial R} = 0, \frac{\partial f_3}{\partial S_P} = \varepsilon\varphi.$$

4. Untuk fungsi f_4 diturunkan terhadap variabel S, E, I, I_T, R, S_P sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_4}{\partial S} = 0, \frac{\partial f_4}{\partial E} = 1 - \alpha\gamma, \frac{\partial f_4}{\partial I} = 0, \frac{\partial f_4}{\partial I_T} = -\mu - \delta_2, \frac{\partial f_4}{\partial I_T} = -\mu - \delta_2, \frac{\partial f_4}{\partial R} = 0, \frac{\partial f_4}{\partial S_P} = (1 - \varepsilon\varphi).$$

5. Untuk fungsi f_5 diturunkan terhadap variabel S, E, I, I_T, R, S_P sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_5}{\partial S} = 0, \frac{\partial f_5}{\partial E} = 0, \frac{\partial f_5}{\partial I} = \omega, \frac{\partial f_5}{\partial I_T} = 0, \frac{\partial f_5}{\partial R} = -\mu, \frac{\partial f_5}{\partial S_P} = 0.$$

6. Untuk fungsi f_6 diturunkan terhadap variabel S, E, I, I_T, R, S_P sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_6}{\partial S} = 0, \frac{\partial f_6}{\partial E} = 0, \frac{\partial f_6}{\partial I} = 0, \frac{\partial f_6}{\partial I_T} = 0, \frac{\partial f_6}{\partial R} = 0, \frac{\partial f_6}{\partial S_P} = -\mu.$$

Setelah diperoleh turunan parsial di atas maka diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial I_T} & \frac{\partial f_1}{\partial R} & \frac{\partial f_1}{\partial S_P} \\
\frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial I_T} & \frac{\partial f_2}{\partial R} & \frac{\partial f_2}{\partial S_P} \\
\frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial I_T} & \frac{\partial f_3}{\partial R} & \frac{\partial f_3}{\partial S_P} \\
\frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial I_T} & \frac{\partial f_4}{\partial R} & \frac{\partial f_4}{\partial S_P} \\
\frac{\partial f_5}{\partial S} & \frac{\partial f_5}{\partial E} & \frac{\partial f_5}{\partial I} & \frac{\partial f_5}{\partial I_T} & \frac{\partial f_5}{\partial R} & \frac{\partial f_5}{\partial S_P} \\
\frac{\partial f_6}{\partial S} & \frac{\partial f_6}{\partial E} & \frac{\partial f_6}{\partial I} & \frac{\partial f_6}{\partial I_T} & \frac{\partial f_6}{\partial R} & \frac{\partial f_6}{\partial S_P}
\end{pmatrix}$$

$$J=\begin{pmatrix} -\mu-\beta E & -\beta S & 0 & 0 & 0 & 0\\ \beta E & \beta S-1-\mu & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha\gamma & -\mu-\delta_1-\omega & 0 & 0 & \varepsilon\varphi\\ 0 & 1-\alpha\gamma & 0 & -\mu-\delta_2 & 0 & (1-\varepsilon\varphi)\\ 0 & 0 & \omega & 0 & -\mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Matriks J adalah matriks Jacobian dari Sistem (4.16)

4.3.1 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Teorema 4.1 Jika $\beta\left(\frac{\lambda\theta}{\mu}\right)-\mu<1$, maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik.

Bukti:

Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dapat dicari dengan cara mensubstitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit $(\hat{S},\hat{E},\hat{I},\widehat{I_T},\hat{R},\widehat{S_P})=\left(\frac{\lambda\theta}{\mu},0,0,0,0,\frac{\lambda(1-\theta)}{(1+\mu)}\right)$ ke matriks Jacobian (4.16), sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$J_1=\begin{pmatrix} -\mu & -\beta\left(\frac{\lambda\theta}{\mu}\right) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta\left(\frac{\lambda\theta}{\mu}\right)-1-\mu & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha\gamma & -\mu-\delta_1-\omega & 0 & 0 & \varepsilon\varphi\\ 0 & 1-\alpha\gamma & 0 & -\mu-\delta_2 & 0 & (1-\varepsilon\varphi)\\ 0 & 0 & \omega & 0 & -\mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Kemudian untuk mencari nilai eigen dari matriks Jacobian dengan cara $det(J_1-\lambda I)=0$

$$det\begin{pmatrix} -\mu & -\beta\left(\frac{\lambda\theta}{\mu}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta\left(\frac{\lambda\theta}{\mu}\right)-1-\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\gamma & -\mu-\delta_1-\omega & 0 & 0 & \varepsilon\varphi \\ 0 & 1-\alpha\gamma & 0 & -\mu-\delta_2 & 0 & (1-\varepsilon\varphi) \\ 0 & 0 & \omega & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Untuk memudahkan dalam mencari determinan matriks, misalkan:

$A = -\mu, B = -\beta\left(\frac{\lambda\theta}{\mu}\right), C = -B - 1 + A, D = \alpha\gamma, E = A - \delta_1 - J, F = \varepsilon\varphi,$

$G = 1 - D, H = A - \delta_2, I = 1 - F, J = \omega.$

Sehingga diperolehlah matriks sebagai berikut:

$$det\begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & E & 0 & 0 & F \\ 0 & G & 0 & H & 0 & I \\ 0 & 0 & J & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$det\begin{pmatrix} A-\lambda & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B-1+A-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & A-\delta_1-J-\lambda & 0 & 0 & F \\ 0 & G & 0 & A-\delta_2-\lambda & 0 & I \\ 0 & 0 & J & 0 & A-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Diperolehlah nilai eigen sebagai berikut:

$\lambda_1 = A$

$\lambda_2 = -B - 1 + A$

$\lambda_3 = A - \delta_1 - J$

$\lambda_4 = A - \delta_2$

$\lambda_5 = A$

$\lambda_6 = A$

Substitusikan nilai dari A, B, J

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = \beta\left(\frac{\lambda\theta}{\mu}\right) - 1 - \mu$$

$$\lambda_3 = -\mu - \delta_1 - \omega$$

$$\lambda_4 = -\mu - \delta_2$$

$$\lambda_5 = -\mu$$

$$\lambda_6 = -\mu$$

Dari nilai eigen di atas diperoleh bahwa $\lambda_1 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0, \lambda_5 < 0,$ $\lambda_6 < 0$. Untuk $\lambda_2 = \beta\left(\frac{\lambda\theta}{\mu}\right) - 1 - \mu < 0$ jika dan hanya jika $\beta\left(\frac{\lambda\theta}{\mu}\right) - \mu < 1$. Terbukti bahwa jika $\beta\left(\frac{\lambda\theta}{\mu}\right) - \mu < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik.■

4.3.2 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Teorema 4.2 Jika $8\mu + 8\beta E^*\mu < 8\mu^2 + 8\beta S^*\mu + 4\beta E^*$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik.

Bukti:

Kestabilan titik ekuilibrium endemik penyakit dapat diperoleh dengan mensubstitusikan titik ekuilibrium endemik penyakit $(S^*, E^*, I^*, {I_T}^*, R^*, {S_P}^*)$ ke matriks Jacobian. Sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$J_2 = \begin{pmatrix} -\mu - \beta E^* & -\beta S^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta E^* & \beta S^* - 1 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\gamma & -\mu - \delta_1 - \omega & 0 & 0 & \varepsilon\varphi \\ 0 & 1 - \alpha\gamma & 0 & -\mu - \delta_2 & 0 & 1 - \varepsilon\varphi \\ 0 & 0 & \omega & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Kemudian untuk mencari nilai eigen dari matriks Jacobian dengan cara $det(J_2 - \lambda I) = 0$

$$det\begin{pmatrix} -\mu-\beta E^* & -\beta S^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta E^* & \beta S^*-1-\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\gamma & -\mu-\delta_1-\omega & 0 & 0 & \varepsilon\varphi \\ 0 & 1-\alpha\gamma & 0 & -\mu-\delta_2 & 0 & 1-\varepsilon\varphi \\ 0 & 0 & \omega & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Untuk memudahkan dalam mencari determinan matriks, misalkan:

$A = L - C, B = -\beta S^*, C = \beta E^*, D = -B - 1 + L, E = \alpha\gamma, F = L - \delta_1 - K,$

$G = \varepsilon\varphi, H = 1 - E, I = L-\delta_2, J = 1 - G, K = \omega, L = -\mu$

Sehingga diperolehlah matriks sebagai berikut:

$$det\begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & F & 0 & 0 & G \\ 0 & H & 0 & I & 0 & J \\ 0 & 0 & K & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$det\begin{pmatrix} L-C-\lambda & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & -B-1+L-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & L-\delta_1-K-\lambda & 0 & 0 & G \\ 0 & 1-E & 0 & L-\delta_2-\lambda & 0 & 1-G \\ 0 & 0 & K & 0 & L-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Diperolehlah nilai eigen sebagai berikut:

$\lambda_1 = L$

$\lambda_2 = L$

$\lambda_3 = L-\delta_2$

$\lambda_4 = L - \delta_1 - K$

$\lambda_5 = \frac{-(B+C-2L+1)-\sqrt{(B+C-2L+1)^2-4(L^2-BL-CL-L+C)}}{2}$

$\lambda_6 = \frac{-(B+C-2L+1)+\sqrt{(B+C-2L+1)^2-4(L^2-BL-CL-L+C)}}{2}$

Substitusikan nilai dari B, C, L, K

$\lambda_1 = -\mu$

$\lambda_2 = -\mu$

$$\lambda_3 = -\mu - \delta_2$$

$$\lambda_4 = -\mu - \delta_1 - \omega$$

$$\lambda_5 = \frac{-(-\beta S^* + \beta E^* + 2\mu + 1) - \sqrt{((-\beta S^* + \beta E^* + 2\mu + 1))^2 - 4((2\mu)^2 + 2\beta S^*\mu - 2\beta E^*\mu - 2\mu + \beta E^*)}}{2}$$

$$\lambda_6 = \frac{-(-\beta S^* + \beta E^* + 2\mu + 1) + \sqrt{((-\beta S^* + \beta E^* + 2\mu + 1))^2 - 4((2\mu)^2 + 2\beta S^*\mu - 2\beta E^*\mu - 2\mu + \beta E^*)}}{2}$$

Dari nilai eigen di atas diperoleh bahwa $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$. Untuk persamaan dari λ_5 dan λ_6 dapat dimisalkan menjadi $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b}}{2}$, karena nilai di dalam akar akan selalu lebih kecil dari a jika $8\mu + 8\beta E^*\mu < 8\mu^2 + 8\beta S^*\mu + 4\beta E^*$ maka $\lambda_5 < 0$ dan $\lambda_6 < 0$. Terbukti bahwa jika $8\mu + 8\beta E^*\mu < 8\mu^2 + 8\beta S^*\mu + 4\beta$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik. ■

4.4 Simulasi

Simulasi dilakukan dengan menentukan nilai masing-masing parameter. Berikut data yang diperoleh dari Puskesmas Gulai Bancah Kota Bukittinggi Tahun 2023.

Tabel 4. 1 Data Penyakit DM Tahun 2023

Jumlah individu *susceptible* $S(t)$	Jumlah individu *exposed* $E(t)$	Jumlah individu sakit tanpa perawatan $I(t)$	Jumlah individu sakit dengan perawatan $I_T(t)$	Jumlah individu terkontrol $R(t)$	Jumlah individu rentan akibat faktor genetik $S_P(t)$
6.602	53	23	32	50	55

Sumber: Puskesmas Gulai Bancah Kota Bukittinggi Tahun 2023

Pada tahun 2023 berdasarkan data Badan Pusat Statistik Kota Bukittinggi angka harapan hidup Kota Bukittinggi 75,13 tahun. Jadi nilai parameter laju kematian Kota Bukittinggi yaitu:

$$\mu = \frac{1}{75{,}13\ tahun} = 0{,}01331$$

Jumlah kelahiran di Kelurahan Kubu Gulai Bancah yaitu sebanyak 1.074 orang dan populasi penduduk sebanyak 6.815 orang. Laju rekrutmen populasi dan laju rekrutmen populasi akibat faktor genetik di Kelurahan Kubu Gulai Bancah yaitu:

$$\lambda = \frac{jumlah\ kelahiran}{jumlah\ penduduk} \times 1.000 = \frac{1074}{6815} \times 1.000 = 157{,}59354 \approx 158$$

$$\theta = \frac{laju\ rekrutmen\ populasi}{jumlah\ penduduk} \times 1.000 = \frac{158}{6815} \times 1.000 = 23{,}18415 \approx 23$$

Diasumsikan lama perpindahan individu rentan terhadap individu sakit tanpa perawatan yaitu 8 tahun. Laju individu sakit tanpa perawatan dan laju individu sakit denga perawatan yaitu:

$$\alpha\gamma = \frac{1}{8\ tahun} = 0{,}12500$$

$$1 - \alpha\gamma = 1 - 0{,}12500 = 0{,}87500$$

Selanjutnya, diasumsikan juga lama perpindahan individu rentan akibat faktor genetik terhadap individu sakit tanpa perawatan dan dengan perawatan selama 18 tahun. Laju individu sakit tanpa perawatan dan dengan perawatan yaitu:

$$\varepsilon\varphi = \frac{1}{18 tahun} = 0{,}05556$$

$$1 - \varepsilon\varphi = 1 - 0{,}05556 = 0{,}94444$$

Diasumsikan juga lama perpindahan individu sakit menjdi individu yang meninggal akibat DM tanpa perawatan selama 60 tahun dan dengan perawatan selama 62 tahun, diperoleh laju kematiannya yaitu:

$$\delta_1 = \frac{1}{60 tahun} = 0{,}01670$$

$$\delta_2 = \frac{1}{62 tahun} = 0{,}01610$$

Diasumsikan laju perpindahan individu *susceptible* terhadap individu *exposed* yaitu $\beta = 0{,}00025$. Dan selanjutnya juga diasmusikan lama perpindahan individu sakit tanpa perawatan terhadap individu terkontrol selama 2 tahun, laju individu terkontrol adalah:

$$\omega = \frac{1}{2\ tahun} = 0{,}50000$$

Tabel 4. 2 Nilai Parameter penyakit DM

Parameter	**Nilai**
μ	0,01331
λ	158
θ	23
β	0,00025
$\alpha\gamma$	0,12500
$1-\alpha\gamma$	0,87500
$\varepsilon\varphi$	0,05556
$1-\varepsilon\varphi$	0,94444
δ_1	0,01670
δ_2	0,01610
ω	0,50000

Dengan menggunakan nilai dari Tabel 4.2, maka model pada Persamaan (4.1) sampai dengan (4.6) akan menjadi:

$$\frac{dS(t)}{dt} = 3634 - 0{,}01331S - 0{,}00025SE$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0{,}00025SE - 0{,}01331E - E$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = 0{,}12500E + 0{,}05556S_P - 0{,}53001I$$

$$\frac{dI_T(t)}{dt} = 0{,}87500E + 0{,}94444 - 0{,}02941I_T$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = 0{,}50000I - 0{,}01331R$$

$$\frac{dS_P(t)}{dt} = 3476 - 1{,}01331S_P$$

Dengan nilai awal,

$$N(t) = 6.815$$

$$S(0) = 6.602$$

$$E(0) = 53$$

$$I(0) = 23$$

$$I_T(0) = 32$$

$$R(0) = 50$$

$$S_P(0) = 55$$

Berdasarkan nilai parameter maka titik ekuilibirum bebas penyakit $(\hat{S},\hat{E},\hat{I},\widehat{I_T},\hat{R},\widehat{S_P})$ yaitu:

$\hat{S} = 273.028$

$\hat{E} = 0$

$\hat{I} = 0$

$\widehat{I_T} = 0$

$\hat{R} = 0$

$\widehat{S_P} = 3.430$

dan titik ekuilibrium endemik penyakit $(S^*, E^*, I^*, {I_T}^*, R^*, {S_P}^*)$ yaitu:

$S^* = 3.994$

$E^* = 3.442$

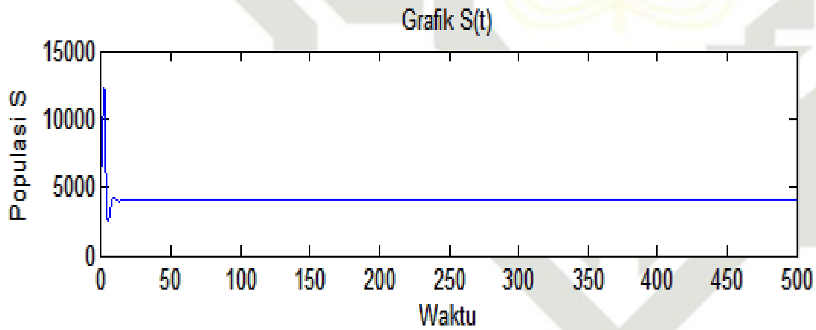
$I^* = 1.171$

${I_T}^* = 212.553$

$R^* = 43.989$

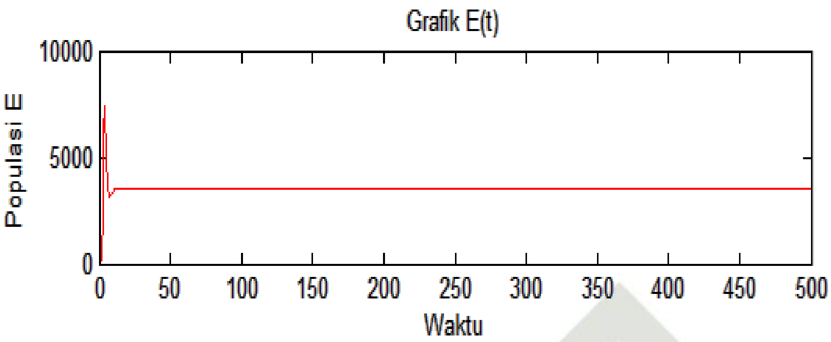
${S_P}^* = 3.430$

Perubahan jumlah populasi dapat dilihat pada gambar berikut:



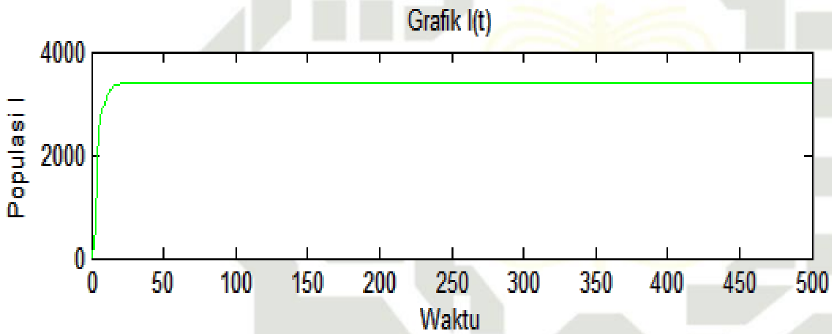
Gambar 4. 2 Grafik subpopulasi $S(t)$

Populasi pada grafik $S(t)$ yang awalnya tinggi menurun drastis dan stabil pada tingkat yang lebih rendah. Ini menunjukkan bahwa banyak individu dari populasi rentan terinfeksi pada awalnya, kemudian stabil pada tingkat yang lebih rendah setelah infeksi menyebar. Dalam kondisi bebas penyakit, populasi $S(t)$ tidak ada penularan penyakit yang signifikan.



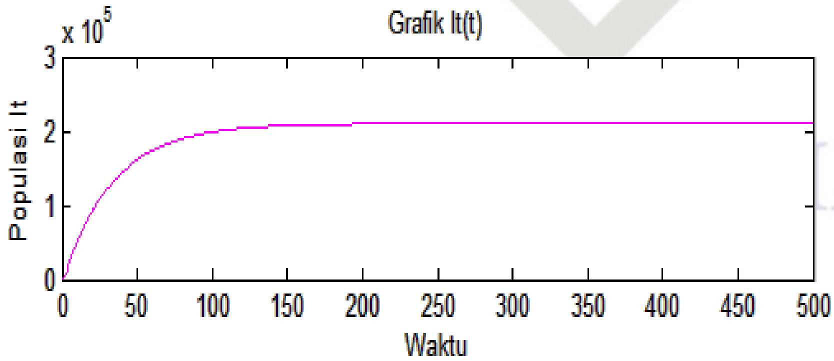
Gambar 4. 3 Grafik subpopulasi $E(t)$

Populasi $E(t)$ yang stabil menunjukkan bahwa penyakit ada secara terus menerus dalam populasi. Ini menunjukkan bahwa banyak individu terpapar penyakit pada awalnya, tetapi kemudian menurun dan stabil. Endemik penyakit terjadi ketika penyakit tetap ada dalam populasi pada tingkat konstan.



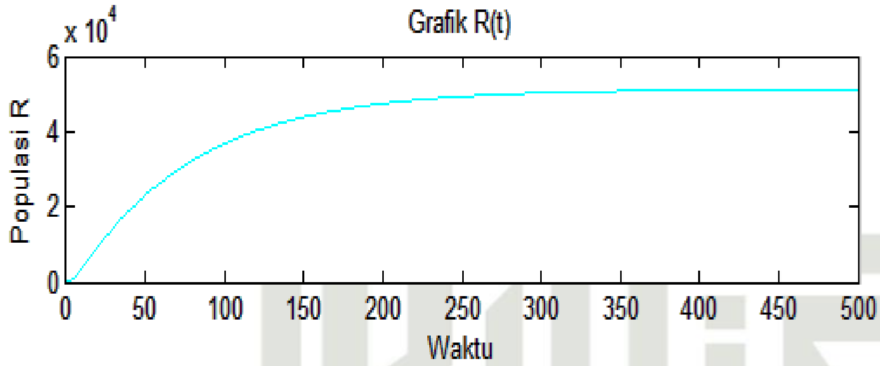
Gambar 4. 4 Grafik subpopulasi $I(t)$

Populasi $I(t)$ merupakan populasi terinfeksi yang awalnya meningkat sehingga mencapai keadaan stabil. Ini menunjukkan bahwa penyebaran penyakit akan terus menerus meningkat dan akan stabil pada waktu tertentu



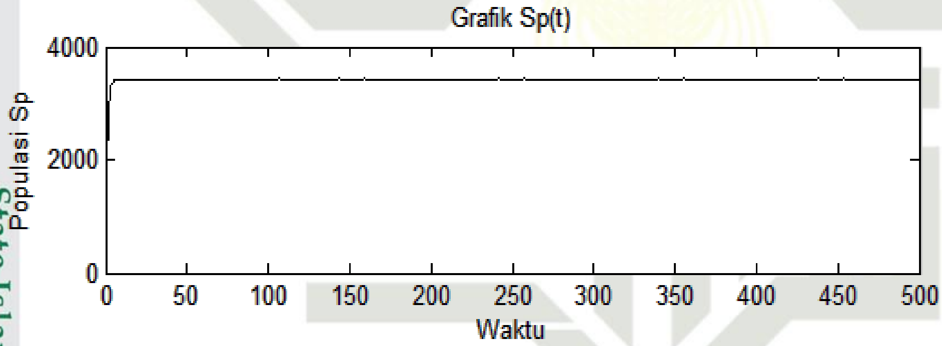
Gambar 4. 5 Grafik subpopulasi $I_T(t)$

Populasi $I_T(t)$ merupakan populasi terinfeksi dengan perawatan akan terus meningkat menunjukkan adanya penularan penyakit yang berkelanjutan dan jumlah individu yang mendapatkan perawatan juga akan semakin meningkat. Ini menunjukkan bahwa populasi dari $I_T(t)$ akan mendekati bebas penyakit.



Gambar 4. 6 Grafik subpopulasi $R(t)$

Populasi $R(t)$ merupakan populasi terkontrol dari penyakit yang terus meningkat secara bertahap dan terus menerus. Ini menunjukkan bahwa semakain banyak indivdu yang terkontrol dari penyakit seiring berjalannya waktu.



Gambar 4. 7 Grafik subpopulasi $S_P(t)$

Populasi $S_P(t)$ merupakan populasi yang rentan akibat faktor genetik. Ini menunjukkan bahwa populasi rentan akibat faktor genetik tetap tingi dan stabil, yang berarti meskipun ada penyakit yang menyebar, faktor genetik membuat sejumlah besar populasi tetap rentan sepanjang waktu.

Selanjutnya, mencari nilai eigen kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit.

Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit oleh matriks $J_1 = (\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \widehat{I_T}, \hat{R}, \widehat{S_P})$

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta\left(\frac{\lambda\theta}{\mu}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta\left(\frac{\lambda\theta}{\mu}\right) - 1 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\gamma & -\mu - \delta_1 - \omega & 0 & 0 & \varepsilon\varphi \\ 0 & 1 - \alpha\gamma & 0 & -\mu - \delta_2 & 0 & (1 - \varepsilon\varphi) \\ 0 & 0 & \omega & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Jika $\left(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \widehat{I_T}, \hat{R}, \widehat{S_P}\right) = (273.028, 0, 0, 0, 0, 3.430)$

$$J_1 = \begin{pmatrix} -0{,}01331 - \lambda & -68{,}257 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 67{,}24369 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}125 & -0{,}53001 - \lambda & 0 & 0 & 0{,}05556 \\ 0 & 0{,}875 & 0 & -0{,}2941 - \lambda & 0 & 0{,}94444 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & -0{,}01331 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}01331 - \lambda \end{pmatrix}$$

Maka diperoleh,

$$\lambda_1 = -0{,}0133$$

$$\lambda_2 = -0{,}0133$$

$$\lambda_3 = -0{,}5300$$

$$\lambda_4 = -0{,}0294$$

$$\lambda_5 = 67{,}2437$$

$$\lambda_6 = -0{,}0133$$

Berdasarkan Teorema 2.1 diperoleh bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil dikarenakan terdapat nilai positif pada nilai eigen.

Kemudian kestabilan titik ekuilibrium endemik penyakit $J_2 = (S^*, E^*, I^*, {I_T}^*, R^*, {S_P}^*)$

$$J_2 = \begin{pmatrix} -\mu - \beta E^* & -\beta S^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta E^* & \beta S^* - 1 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\gamma & -\mu - \delta_1 - \omega & 0 & 0 & \varepsilon\varphi \\ 0 & 1 - \alpha\gamma & 0 & -\mu - \delta_2 & 0 & 1 - \varepsilon\varphi \\ 0 & 0 & \omega & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Jika $(S^*, E^*, I^*, {I_T}^*, R^*, {S_P}^*) = (3.944, 3.442, 1.171, 212.553, 43.989, 3430)$

$$J_2 = \begin{pmatrix} -0{,}87381 - \lambda & -0{,}9985 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8605 & -0{,}01481 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}125 & -0{,}53001 - \lambda & 0 & 0 & 0{,}05556 \\ 0 & 0{,}875 & 0 & -0{,}2941 - \lambda & 0 & 0{,}94444 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & -0{,}01331 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}01331 - \lambda \end{pmatrix}$$

Maka diperoleh,

$$\lambda_1 = -0{,}0294$$
$$\lambda_2 = -0{,}0133$$
$$\lambda_3 = -0{,}5300$$
$$\lambda_4 = -0{,}4443 + 0.8214i$$
$$\lambda_5 = -0{,}4443 - 0.8214i$$
$$\lambda_6 = -0{,}0133$$

Berdasarkan Teorema 2.1 diperoleh bahwa titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik dikarenakan semua nilai eigen bernilai negatif.