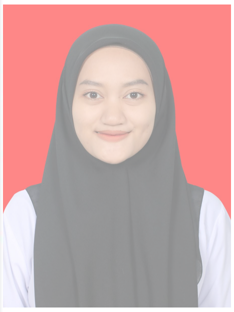
DETERMINAN MATRIKS *CENTROSYMMETRIC* BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT ORDO 3×3 DAN 4×4

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

NOVI HIDAYAH
12050426198



UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2024

LEMBAR PERSETUJUAN

DETERMINAN MATRIKS *CENTROSYMMETRIC*
BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT
ORDO 3×3 DAN 4×4

TUGAS AKHIR

oleh:

NOVI HIDAYAH
12050426198

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 11 Juni 2024

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Rahmawati, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIP. 19890202 202321 2 057

LEMBAR PENGESAHAN

DETERMINAN MATRIKS *CENTROSYMMETRIC* BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT ORDO 3×3 DAN 4×4

TUGAS AKHIR

oleh:

NOVI HIDAYAH
12050426198

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 11 Juni 2024

Pekanbaru, 11 Juni 2024
Mengesahkan

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Wartono, M.Sc.**
Sekretaris	**: Rahmawati, M.Sc.**
Anggota I	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota II	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 11 Juni 2024
Yang membuat pernyataan,

10000 METERAI TEMPEL 301B8ALX271561753

NOVI HIDAYAH
12050426198

LEMBAR PERSEMBAHAN

Bissmillahirrahmanirrahiim…

Allhamdulillahirabbil alamin segala puji dan rasa syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat, karunia, kesehatan dan kelancaran kepada saya sehingga dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.

TUGAS AKHIR INI KU PERSEMBAHKAN KEPADA ORANG-ORANG TERSAYANG

Kedua Orangtua ku Tercinta

Terimakasih kepada kedua orangtua ku tercinta, Bapak (Jarno) dan Mamak (Wijiati) yang selalu memberikan dukungan moril maupun materi, motivasi, do'a yang tidak pernah putus, nasehat, pengorbanan dan kasih sayang yang tak terhingga kepada saya sehingga saya dapat menyelesaikan Tugas Akhir saya. Semoga mamak dan bapak selalu diberikan kesehatan dan kemurahan rezeki. Aamiin yaa robbal alamiin.

Adikku Tersayang

Terimakasih kepada adik saya, (Okti Nurvadila) yang senantiasa memberikan dukungan, semangat, motivasi dan do'anya untuk saya.

Dosen Pembimbing dan Penguji Tugas Akhir

Terimakasih kepada (Ibu Rahmawati, M.Sc) selaku dosen pembimbing tercinta saya yang selalu memberikan dukungan, motivasi, selalu meluangkan waktu untuk saya dan sangat sabar dalam membimbing saya untuk menyelesaikan Tugas Akhir saya. Dosen Penguji saya yang saya sayangi (Ibu Fitri Aryani, M.Sc dan Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si) terimakasih banyak atas bimbingan dari ibu dosen sehingga saya bisa menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Dosen UIN Suska Riau

Terimakasih kepada bapak dan ibu dosen UIN Suska Riau yang telah memberikan pelajaran yang tiada ternilai harganya, agar saya menjadi lebih baik. Terimakasih banyak bapak dan ibu dosen, jasa kalian akan selalu terpatri di dalam hati.

Sahabat dan Teman-teman

Terimakasih kepada sahabat dan teman-teman yang namanya tidak bisa saya sebutkan satu persatu yang selalu memberikan dukungan dan bantuan atas selesainya Tugas Akhir ini.

DETERMINAN MATRIKS *CENTROSYMMETRIC* BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT ORDO 3×3 DAN 4×4

NOVI HIDAYAH
12050426198

Tanggal Sidang : 11 Juni 2024
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh bentuk umum determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat n ordo 3×3 dan 4×4 yang dinotasikan dengan ${A_3}^n$ dan ${A_4}^n$. Langkah pertama dalam penelitian ini yaitu melakukan perpangkatan matriks ${A_3}^2$ hingga ${A_3}^{10}$ dan ${A_4}^2$ hingga ${A_4}^{10}$. Kemudian menduga bentuk umum ${A_3}^n$ dan ${A_4}^n$ dari perpangkatan tersebut dan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika. Selanjutnya menghitung $|{A_3}^n|$ dan $|{A_4}^n|$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama. Disamping itu ditentukan ${A_3}^{-n}$ dan ${A_4}^{-n}$. Hasil dari penelitian ini diperoleh $|{A_3}^n| = (a^2b)^n, |{A_3}^{-n}| = (a^2b)^{-n}$ dan $|{A_4}^n| = (ab)^{2n}, |{A_4}^{-n}| = (ab)^{-2n}$.

Kata Kunci : Determinan matriks *centrosymmetric* berpangkat bilangan bulat, Induksi matematika, Matriks *Centrosymmetric*, perpangkatan matriks.

DETERMINANS OF CENTROSYMMETRIC MATRIX SPECIAL FORM IN INTEGER RATES ORDER 3×3 AND 4×4

NOVI HIDAYAH
NIM : 12050426198

Date of Final Exam : June, 11th 2024
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

This research aims to obtain the general form of the determinant of a special form of centrosymmetric matrix with integer rank n of order 3×3 *and* 4×4*, denoted by* ${A_3}^n$ *and* ${A_4}^n$*. The first step in this research is to rank the matrices* ${A_3}^2$ *to* ${A_3}^{10}$ *and* ${A_4}^2$ *to* ${A_4}^{10}$*. Then guess the general form* ${A_3}^n$ *and* ${A_4}^n$ *frome these exponent and prove it using mathematical induction. Next calculate* $|{A_3}^n|$ *and* $|{A_4}^n|$ *by using cofactor expansion along the first column. Besides that,* ${A_3}^{-n}$ *and* ${A_4}^{-n}$ *are determined. The results of this research obtained* $|{A_3}^n| = (a^2b)^n, |{A_3}^{-n}| = (a^2b)^{-n}$ *and* $|{A_4}^n| = (ab)^{2n}, |{A_4}^{-n}| = (ab)^{-2n}$*.*

Keywords *: Determinants of centrosymmetric matrices with integer powers, Mathematical induction, Centrosymmetric Matrices, powers of matrices.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Allhamdulillahirabbil alaamiin, segala puji saya ucapkan kepada Allah Subhanahu wa ta ala yang memberikan rahmat dan hidayahnya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan Tugas Akhir. Sholawat beserta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan alam yakni nabi Muhammad Shalallaahu Alaihi Wassalaam. Penulisan Tugas Akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi syarat dalam menyelesaikan Studi Strata (S1) Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Dalam penulisan Tugas Akhir ini penulis mengucapkan banyak terimakasih yang tak terhingga kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Ibu Rahmawati, M.Sc. selaku Pembimbing Tugas Akhir yang selalu meluangkan waktu, tenaga, pikiran dan selalu sabar dalam membimbing, memberikan semangat, nasehat dan selalu memotivasi penulis untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
6. Bapak Zukrianto, M.Si. selaku Kordinator Tugas Akhir yang telah banyak memberikan bantuan dalam rangka menyelesaikan Tugas Akhir ini.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan banyak ilmu kepada penulis.
8. Kedua orang tua penulis, Bapak Jarno dan Ibu Wijiati dan adik penulis Okti

Nurvadila yang selalu memberikan do’a, semangat, nasehat, motivasi, dukungan serta kasih sayang yang tidak terhingga.

9. Sahabat ku Yunia Ningsih dan Chania Tri Andini yang selalu memberikan dukungan, semangat dan motivasi untuk segera menyelesaikan Tugas Akhir ini.
10. Teman-teman penulis Dina Saputri, Fannysa Ardila BR Damanik, Qori’ah Amri, Rosydiana Rahmatullah, Risa Indah Sari, Rizky Aulia dan lain-lain yang banyak membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini,
11. Untuk diri penulis sendiri karena telah kuat menghadapi suka duka dalam penulisan Tugas Akhir ini.
12. Semua pihak yang telah membantu dalam mengerjakan penulisan Tugas Akhir yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan dan kesalahan. Sehingga diharapkan kritik dan saran dari pembaca demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca, *aamiiin ya robbal alaamiin.*

Wassalamu’alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 11 Juni 2024

NOVI HIDAYAH
12050426198

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari matriks dapat digunakan diberbagai bidang, diantaranya yakni di bidang ekonomi [1], pemrograman [2], dan di bidang perangkat lunak [3]. Dalam bidang ilmu ekonomi, matriks memudahkan analisis permasalahan ekonomi beserta *input* dan *output*nya, dengan terlebih dahulu mengidentifikasi variabel-variabelnya. Dalam bidang pemrograman matriks dapat digunakan untuk memprogram sistem pemerintahan, perusahaan, manajemen informasi, dan statistik. Dalam bidang perangkat lunak, matriks sebagai media pembelajaran pada *Microsoft Office Excel*, terutama untuk menghitung berbagai operasi matriks dengan efektif dan cepat.

Matriks mempunyai berbagai jenis, salah satunya adalah matriks *centrosymmetric*. Penerapan matriks ini sering muncul dalam praktik seperti pendeteksian dan estimasi, teori pada antena, struktur pada getaran, jaringan pada kelistrikan, dan fisika kuantum [4]. Matriks *centrosymmetric* telah dibahas oleh [5], dalam jurnal tersebut matriks *centrosymmetric* ialah matriks berbentuk persegi yang simetri dengan pusatnya. Berdasarkan [6] bentuk umum matriks *centrosymmetric* yaitu:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}, a \in R$$

Beberapa penelitian matriks diantaranya menentukan *trace*, *invers* dan determinan. Penelitian terdahulu mengenai determinan yaitu tahun 2017 tentang determinan matriks *centrosymmetric* dengan struktur blok khusus matriks *Hessenberg* rendah [7]. Pada tahun 2018, [8] membahas determinan matriks

Toeplitz berbentuk khusus dengan menggunakan ekspansi kofaktor. Matriks yang digunakan sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1/a & 1/a & 1/a & 1/a & \cdots & 1/a \\ a & 0 & 1/a & 1/a & 1/a & \cdots & 1/a \\ a & a & 0 & 1/a & 1/a & \cdots & 1/a \\ a & a & a & 0 & 1/a & \cdots & 1/a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1/a \\ a & a & a & a & a & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \text{dengan } a \neq 0;\ a \in R$$

Dalam penelitian tersebut diperoleh hasil yakni bentuk umum dari determinan matriks *toeplitz* sebagai berikut :

$$|A_n| = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \equiv 6 \ (mod\ 2) \text{ atau } n = 6 \ (mod\ 5) \\ 1 & \text{jika } n \equiv 6 \ (mod\ 0) \text{ atau } n = 6 \ (mod\ 1) \\ -1 & \text{jika } n \equiv 6 \ (mod\ 3) \text{ atau } n = 6 \ (mod\ 4) \end{cases}.$$

Penelitian tahun 2019 mengenai determinan matriks FLScircr menggunakan metode Salihu [9], dimana matriks yang digunakan sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a & \cdots & a & a \\ ra & a & a & a & \cdots & a & a \\ ra & ra+a & a & a & \cdots & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & ra+a & a \end{bmatrix} \quad a \neq 0;\ a, r \in R$$

Diperoleh hasil yaitu $|A_n| = (-1)^{n-3} r^{n-1} a^n, n \geq 3$.

Tahun yang sama, [10] juga telah melakukan penelitian mengenai determinan matriks FLScircr bentuk khusus menggunakan metode Kondensasi Chio, matriksnya sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a \\ ra & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix} \text{dengan } a \neq 0 \in R.$$

Dengan hasil sebagai berikut :

$$|A_n| = \begin{cases} ra^n & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ (2-r)a^n & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}.$$

Tahun 2020 penelitian [11] membahas determinan matriks segitiga atas ordo 3×3 bentuk khusus ialah $A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \forall a \in R$, dengan hasil penelitiannya yaitu $|A^n| = a^{3n}$.

Penelitian mengenai determinan matriks *centrosymmetric* yaitu penelitian yang dilakukan oleh [12] pada tahun 2020 dimana untuk variabel matriksnya menggunakan entri 0 dan a dengan menggunakan metode kofaktor. Matriks pada penelitian tersebut yakni sebagai berikut :

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix}, a \neq 0;\ a \in R \qquad (1.1)$$

Hasil yang diperoleh dalam penelitian tersebut yaitu $|{A_3}^n| = a^{3n}$.

Penelitian [13] tahun 2021 membahas determinan matriks *centrosymmetric* dengan ordo 4×4 yaitu : $A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{bmatrix}, a \in R$. Hasil yang diperoleh dalam penelitian tersebut yaitu

$$|{A_4}^n| = \begin{cases} -a^{4n}, \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ a^{4n}, \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Tahun yang sama, penelitian [14] mengenai determinan dari matriks Hankel ordo 3×3 yaitu : $A_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dengan $a \in R$. Dalam penelitiannya diperoleh hasil $|A^n| = (-1)^n a^{3n}, n \geq 1$.

Dalam menentukan determinan berkaitan dengan ordo matriks, semakin besar ordo matriks, semakin sulit untuk menemukan determinan, terlebih untuk menentukan determinan matriks berpangkat. Maka dari itu untuk mendapatkan determinan suatu matriks berpangkat, diperlukan sebuah rumus yang sesuai. Berdasarkan penelitian-penelitian sebelumnya yang membahas determinan matriks, telah terdapat penghitungan determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus dengan entri a dan 0 pada penelitian [12] dan [13]. Namun penelitian tersebut berbeda dengan penelitian tugas akhir ini yaitu dengan mengganti entri matriks $a_{22} = a$ pada Persamaan (1.1) yaitu $a_{22} = b, b \neq a \neq 0$, dan menambahkankan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo 4×4 maka penulis tertarik melakukan penelitian mengenai "Determinan Matriks *Centrosymmetric* Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Ordo 3×3 dan 4×4" dengan bentuk matriks khususnya sebagai berikut :

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix} a, b \neq 0,\ a, b \in R. \tag{1.2}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{bmatrix} a, b \neq 0, a, b \in R. \tag{1.3}$$

1.2 Rumusan Masalah

Merujuk pada latar belakang di atas, rumusan masalah pada penelitian ini yaitu bagaimana bentuk umum dari determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat ordo 3×3 dan 4×4 pada Persamaan (1.2) dan (1.3).

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penelitian ini antara lain :

1. Matriks pada Persamaan (1.2) dan (1.3) dengan $a \neq b$.
2. Metode yang digunakan dalam mencari determinan adalah metode ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama.
3. Dalam penelitian ini akan ditentukan determinan berpangkat bilangan bulat positif dan negatif.

1.4 Tujuan Masalah

Tujuan penelitian ini yaitu untuk menemukan bentuk umum determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat ordo 3×3 dan 4×4 pada Persamaan (1.2) dan (1.3).

1.5 Manfaat Penelitian

Terdapat beberapa manfaat dalam penelitian ini, yaitu sebagai berikut:

1. Dapat menerapkan ilmu dan pengetahuan yang didapatkan di bangku kuliah.
2. Dapat dijadikan sumber ilmu pengetahuan khususnya dalam menyelesaikan determinan suatu matriks.
3. Untuk memperdalam pemahaman mengenai determinan matriks.

1.6 Sistematika Penelitian

Adapun pengaturan penulisan Tugas Akhir ini yaitu determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat ordo 3 x 3 dan 4×4 ialah sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Pada bagian bab 1 berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan dalam penelitian determinan matriks *centrosymmetric* pada tugas akhir ini.

BAB II LANDASAN TEORI

Pada bagian bab II yaitu berisi tentang beberapa teori yang berhubungan dengan perpangkatan pada matriks, bentuk umum matriks, invers matriks, determinan matriks berpangkat bilangan bulat positif dan negatif.

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bagian bab III ini berisi tahapan-tahapan yang dilakukan oleh peneliti dalam mendapatkan determinan matriks *centrosymmetric* berpangkat bilangan bulat positif dan negatif bentuk khusus ordo 3×3 dan 4×4.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi tentang tahapan-tahapan dilakukan oleh penulis untuk mendapatkan hasil seperti yang disampaikan pada rumusan masalah.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari hasil penelitian yang dilakukan oleh penulis.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab II ini akan dijelaskan mengenai beberapa teori yang mendukung untuk digunakan dalam menentukan determinan dari matriks *Centrosymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat ordo 3×3 dan 4×4.

2.1 Matriks *Centrosymmetric*

Definisi 2.1 [5] Matriks *centrosymmetric* ialah suatu matriks berbentuk persegi, yang simetri terhadap pusatnya. Dengan kata lain, unsur-unsur matriks *centrosymmetric* adalah simetris terhadap pusat matriks. Sebuah $n \times n$ mariks A adalah *centrosymmetric* jika dan hanya jika memenuhi persamaan berikut [6] :

$$a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1} \text{ untuk } i,j \in 1 \ldots n. \tag{2.1}$$

Maka bentuk umum matriks *centrosymmetric* yaitu :

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \text{dengan } a \in R.$$

Contoh 2.1 Diberikan dua matriks yaitu matriks B dan matriks C.

$$B = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 2.1, kedua matriks tersebut ialah matriks *centrosymmetric* ordo 3×3 dan 4×4 yang memenuhi Persamaan (2.1), yaitu

$$b_{11} = b_{3-1+1,3-1+1} = b_{33=}a$$

$$b_{12} = b_{3-1+1,3-2+1} = b_{32=}a$$

$$b_{13} = b_{3-1+1,3-3+1} = b_{31=}0$$

$b_{21} = b_{3-2+1,3-1+1} = b_{23=}0$

$\boldsymbol{b_{22} = b_{3-2+1,3-2+1} = b_{22=}b}$

Dan untuk matriks $\boldsymbol{C}$ juga memenuhi Persamaan (2.1), diperoleh

$c_{11} = c_{4-1+1,4-1+1} = c_{44} = a$ $\qquad c_{21} = c_{4-2+1,4-1+1} = c_{34} = 0$

$c_{12} = c_{4-1+1,4-2+1} = c_{43} = a$ $\qquad c_{22} = c_{4-2+1,4-2+1} = c_{33} = b$

$c_{13} = c_{4-1+1,4-3+1} = c_{42} = 0$ $\qquad c_{23} = c_{4-2+1,4-3+1} = c_{32} = 0$

$c_{14} = c_{4-1+1,4-4+1} = c_{41} = 0$ $\qquad c_{24} = c_{4-2+1,4-4+1} = c_{31} = 0$

Definisi 2.2 [15] Matriks persegi J_n disebut matriks contra-identitas jika berbentuk

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ⋰ & 1 & 0 \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ 0 & 1 & ⋰ & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lema 2.1. [15]

i. Jika $S = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ maka S merupakan matriks *centrosymmetric*.

ii. Jika $S = \begin{bmatrix} a & c & b \\ d & e & d \\ b & c & a \end{bmatrix}$ maka S merupakan matriks *centrosymmetric*.

Definisi 2.3 [6]

Untuk kasus $n = 2m$, matriks *centrosymmetric* dapat dituliskan sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} B & J_m C J_m \\ C & J_m B J_m \end{bmatrix}$$

dengan masing-masing matriks blok B dan C merupakan matriks $m \times m$

Untuk kasus $n = 2m + 1$, matriks *centrosymmetric* dapat dipartisi menjadi bentuk berikut

$$A = \begin{bmatrix} B & J_m b & J_m C J_m \\ a^T & \alpha & a^T J_m \\ C & b & J_m B J_m \end{bmatrix}$$

dengan $B, C \in R^{m\times m}, a, b \in R^{m\times 1}$, dan α sebuah skalar.

Contoh 2.2 Tunjukkan suatu matriks $A_3 = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix}$ adalah matriks *centrosymmetric*. Dengan memperhatikan Definisi 2.3, karena $n = 3$ maka $m = 1$, sehingga matriks bloknya adalah $B = [a]$, $C = [0]$, $b = [a]$, $\alpha = b$, $a^T = [0]$ dan

$J_m b = [1][a] = [a]$

$J_m C J_m = [1][0][1] = [0]$

$a^T J_m = [0][1] = [0]$

$J_m B J_m = [1][a][1] = [a]$

Sehingga matriks A_3 dapat dinyatakan sebagai $A_3 = \begin{bmatrix} B & J_m b & J_m C J_m \\ a^T & \alpha & a^T J_m \\ C & b & J_m B J_m \end{bmatrix}$.

Karena matriks tersebut memenuhi Definisi 2.3, maka matriks tersebut adalah matriks *centrosymmetric*.

Contoh 2.3 Tunjukkan suatu matriks $A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ merupakan matriks *centrosymmetric*. Dengan memperhatikan Definisi 2.3, karena $n = 5$ maka $m = 2$, sehingga matriks bloknya adalah $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $a^T = [0 \quad 0]$, $\alpha = 6$ dan

$J_m b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J_m C J_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$a^T J_m = [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$

$$J_mBJ_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks A_5 dapat dinyatakan sebagai $A_5 = \begin{bmatrix} B & J_mb & J_mCJ_m \\ a^T & \alpha & a^TJ_m \\ C & b & J_mBJ_m \end{bmatrix}$.

Karena matriks tersebut memenuhi Definisi 2.3, maka matriks tersebut adalah matriks *centrosymmetric*.

Contoh 2.4 Tunjukkan suatu matriks $A_4 = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{bmatrix}$ adalah matriks *centrosymmetric*. Dengan memperhatikan Definisi 2.3, karena $n = 4$ maka $m = 2$, sehingga matriks bloknya adalah $B = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan

$$J_mCJ_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_mBJ_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ a & a \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks A_4 dapat dinyatakan sebagai $A_4 = \begin{bmatrix} B & J_mCJ_m \\ C & J_mBJ_m \end{bmatrix}$.

Karena matriks tersebut memenuhi Definisi 2.3, maka matriks tersebut adalah matriks *centrosymmetric*.

2.2 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.4 [16] Jika A ialah suatu matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat bilangan bulat positif dari A yaitu

$$A^0 = I, A^n = \underbrace{AA \ldots . A}_{n\,faktor} \text{ dimana } n > 0$$

Selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat bilangan bulat negatif dari A yaitu

$$A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots . A^{-1}}_{n\,faktor} \text{ dimana } n < 0$$

Contoh 2.5 Diberikan sebuah matriks C, yaitu ordo 3×3 sebagai berikut :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dari matriks tersebut akan ditentukan perpangkatan matriks C^4 sebagai berikut :

$$C^4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 22 & 10 \\ 34 & 39 & 18 \\ 16 & 16 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 & 22 & 10 \\ 34 & 39 & 18 \\ 16 & 16 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C^4 = \begin{bmatrix} 1269 & 1436 & 676 \\ 2260 & 2557 & 1204 \\ 992 & 1120 & 529 \end{bmatrix}.$$

2.3 Notasi Sigma

Secara umum bentuk notasi sigma didefinisikan sebagai berikut [17] :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Contoh 2.6

Nyatakan $\sum_{k=1}^{6}(3k+1)^2$ dalam bentuk lengkap

$$\sum_{k=1}^{6}(3k+1)^2 = (3(1)+1)^2 + (3(2)+1)^2 + (3(3)+1)^2 + (3(4)+1)^2 + (3(5)+1)^2 + (3(6)+1)^2$$

$$= 951$$

2.4 Sifat-sifat Notasi Sigma

Untuk setiap bilangan bulat a, b dan n berlaku [17]:

1. $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$
2. $\sum_{k=a}^{b} cf(k) = c\sum_{k=a}^{b} f(k)$
3. $\sum_{k=a}^{b}(f(k) + g(k)) = \sum_{k=a}^{b} f(k) + \sum_{k=a}^{b} g(k)$

4. $\sum_{k=1}^{m-1} f(k) + \sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$
5. $\sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=m+p}^{n+p} f(k-p)$

2.5 Determinan dan Invers Matriks

Definisi 2.5 [16] Determinan dari matriks A, $n \times n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasilkali-hasilkali yang diperoleh; di mana untuk setiap $1 < i < n$ dan $1 < j < n$,

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

dan

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i)

Berdasarkan [18], sifat-sifat determinan sebagai berikut :

1. Misalkan A dan B adalah matriks-matriks nxn, dan k adalah skalar sebarang. Karena faktor bersama dari baris maupun dari suatu matriks dapat dikeluarkan melewati tanda determinan, dan karena tiap baris dari n baris pada kA memiliki faktor bersama k, maka diperoleh
$$|kA| = k^n|A|$$
2. Misalkan A, B dan C adalah matriks-matriks $n \times n$ yang berbeda hanya pada satu baris, misalnya baris ke-r, dan asumsikan bahwa baris ke-r dari A dan B. Maka
$$|C| = |A| + |B|$$
Hasil yang sama berlaku untuk kolom.
3. Matriks persegi A dapat dibalik jika dan hanya jika $|A| \neq 0$
4. Jika A dan B adalah matriks persegi yang berukuran sama, maka $|AB| = |A||B|$
5. Jika A dapat dibalik, maka $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Contoh 2.7 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, maka determinan dari matriks tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 3\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 3(12) - 1(-4) + 2(12) \\
&= 36 + 4 + 24 \\
|A| &= 64
\end{aligned}
$$

Definisi 2.6 [16] Jika A yaitu suatu matriks bujursangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Perhatikan bahwa kofaktor dan minor dari suatu elemen a_{ij} hanya berbeda dalam tandanya, di mana $C_{ij} = \pm M_{ij}$. Satu cara cepat untuk menentukan apakah tanda $+$ atau $-$ yang digunakan yaitu dengan menggunakan fakta bahwa tanda yang berkaitan dengan C_{ij} dan M_{ij} berada dalam baris ke-i dan kolom ke-j dari susunan "papan catur" berikut

$$
\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}
$$

Sebagai contoh, $C_{11} = M_{11}, C_{21} = -M_{21}, C_{12} = -M_{12}, C_{22} = M_{22}$, dan seterusnya.

Definisi 2.7 [16] Jika A merupakan matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} merupakan kofaktor dari a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari matriks A. Transpos suatu matriks tersebut disebut *adjoin* dari A dan dinyatakan sebagai adj(A).

Contoh 2.8 Diberikan suatu matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, maka kofaktor-kofaktor dari A adalah

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 1(12) = 12$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-6) = 6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 1(-16) = -16$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-4) = 4$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(2) = 2$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(-16) = 16$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 1(12) = 12$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(10) = -10$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 1(16) = 16$$

Jadi matriks kofaktornya adalah

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

$$Adj\ A = C^T.$$

Sehingga *adjoin* matriks A ialah

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.8 [16] Jika A merupakan suatu matriks yang dapat dibalik, maka berlaku

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A). \tag{2.2}$$

Contoh 2.9 Pada Contoh 2.7 didapatkan determinan dari matriks A, dan pada Contoh 2.8 juga telah didapatkan $Adj(A)$. Pada matriks tersebut akan ditentukan A^{-1} dengan Definisi 2.8 berikut ini.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

$$= \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

2.6 Determinan Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Penelitian [12] tahun 2020 membahas determinan matriks *centrosymmetric*. Tujuan penelitiannya adalah untuk menentukan bentuk umum dari determinan matriks *centrosymmetric* berpangkat bilangan bulat positif bentuk khusus ordo 3×3 berikut ini.

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix}, a \neq 0;\ a \in R$$

Berikut langkah-langkahnya :

1. Diberikan suatu matriks *centrosymmetric* A_3 pada Persamaan (1.1).
2. Menghitung perpangkatan matriks *centrosymmetric* $A_3{}^2$ hingga $A_3{}^8$.

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix} \qquad A_3{}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a^2 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 2a^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$A_3{}^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^3 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 3a^3 & a^3 \end{bmatrix} \qquad A_3{}^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^4 & 0 \\ 0 & a^4 & 0 \\ 0 & 4a^4 & a^4 \end{bmatrix}$$

$$A_3{}^5 = \begin{bmatrix} a^5 & 5a^5 & 0 \\ 0 & a^5 & 0 \\ 0 & 5a^5 & a^5 \end{bmatrix} \qquad A_3{}^6 = \begin{bmatrix} a^6 & 6a^6 & 0 \\ 0 & a^6 & 0 \\ 0 & 6a^6 & a^6 \end{bmatrix}$$

$$A_3{}^7 = \begin{bmatrix} a^7 & 7a^7 & 0 \\ 0 & a^7 & 0 \\ 0 & 7a^7 & a^7 \end{bmatrix} \qquad A_3{}^8 = \begin{bmatrix} a^8 & 8a^8 & 0 \\ 0 & a^8 & 0 \\ 0 & 8a^8 & a^8 \end{bmatrix}$$

3. Menduga bentuk umum matriks *centrosymmetric* $A_3{}^n$.

   Berdasarkan nilai perpangkatan pada matriks *centrosymmetric* tersebut, maka terdapat dugaan bentuk umum dari matriks *centrosymmetric*nya yaitu:

$$A_3{}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & na^n & a^n \end{bmatrix}$$

4. Melakukan pembuktian bentuk umum $A_3{}^n$ dengan induksi matematika pada Contoh 2.10.
5. Menentukan determinan matriks *centrosymmetric* $A_3{}^n$ dengan menggunakan metode kofaktor sepanjang baris dan kolom.

$$|A_3| = a^3 \qquad |A_3{}^2| = a^6 \qquad |A_3{}^3| = a^9 \qquad |A_3{}^4| = a^{12}$$

$$|A_3{}^5| = a^{15} \qquad |A_3{}^6| = a^{18} \qquad |A_3{}^7| = a^{21} \qquad |A_3{}^8| = a^{24}.$$

6. Menduga bentuk umum determinan matriks *centrosymmetric* $A_3{}^n$ kemudian melakukan pembuktian secara langsung.

   Dengan nilai determinan tersebut maka diperoleh untuk determinan matriks *centrosymmetric* $A_3{}^n$ yaitu $|A_3{}^n| = a^{3n}$.
7. Mengaplikasikan matriks *centrosymmetric* $A_3{}^n$ ke dalam contoh soal.

2.7 Induksi Matematika

Definisi 2.9 [19] Misalkan $p(n)$ ialah suatu proposisi perihal bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ tersebut benar untuk semua bilangan bulat positif dengan langkah :

1. $p(1)$ benar, dan
2. Asumsikan bahwa $p(k)$ benar, untuk suatu bilangan asli k dan diperlihatkan $p(k+1)$ benar.

Langkah 1 disebut basis induksi, sementara itu langkah 2 disebut langkah induksi. Dalam langkah induksi terdapat dugaan yaitu $p(n)$ benar. Asumsi tersebut ialah hipotesis induksi. Jika kedua langkah di atas terpenuhi kebenarannya maka dapat disimpulkan bahwa langkah induksi berisi dugaan yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan bulat n.

Pada basis induksi, akan ditunjukkan jika $n = 1$, yaitu bilangan bulat positif terkecil, maka pernyataan tersebut benar. Kemudian juga ditunjukkan bahwa implikasi $p(k) \rightarrow p(k+1)$ benar untuk semua bilangan bulat taknegatif. Untuk menunjukkan bahwa implikasi tersebut benar untuk semua bilangan bulat taknegatif, perlu diperlihatkan bahwa $p(k+1)$ tidak salah jika $p(k)$ benar. Hal ini dibuktikan dengan menunjukkan bahwa berdasarkan dugaan $p(k)$ benar, sehingga $p(k+1)$ juga harus terbukti benar [19].

Contoh 2.10 Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix}$ untuk setiap $a \in R$. Tunjukkan bahwa ${A_3}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & na^n & a^n \end{bmatrix}$.

Penyelesaian : pembuktian dilakukan dengan induksi matematika.

Misalkan $p(n) : {A_3}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & na^n & a^n \end{bmatrix}$

Adapun langkah-langkahnya yaitu :

1) Basis induksi

$p(1):\ {A_3}^1 = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix}$, dengan melihat Persamaan (1.2), $p(1)$ benar.

2) Langkah induksi

Asumsikan $p(k):\ {A_3}^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^k & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & ka^k & a^k \end{bmatrix}$ benar, akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar.

$$p(k+1): {A_3}^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & 0 \\ 0 & a^{k+1} & 0 \\ 0 & (k+1)a^{k+1} & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} {A_3}^{k+1} &= {A_3}^k \cdot A_3 \\ &= \begin{bmatrix} a^k & ka^k & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & ka^k & a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^{k+1} & ka^{k+1} + a^{k+1} & 0 \\ 0 & a^{k+1} & 0 \\ 0 & ka^{k+1} + a^{k+1} & a^{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & 0 \\ 0 & a^{k+1} & 0 \\ 0 & (k+1)a^{k+1} & a^{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, $p(k+1)$ benar.

Karena basis induksi dan langkah induksi terpenuhi maka terbukti bahwa ${A_3}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & na^n & a^n \end{bmatrix}$. ■

BAB III
METODE PENELITIAN

Adapun metode penelitian yang digunakan peneliti pada tugas akhir ini yaitu menggunakan metode studi literatur (pustaka) dengan mengumpulkan informasi dari beberapa jurnal dan buku yang berkaitan dengan penelitian ini. Adapun langkah-langkah yang digunakan untuk penyelesaian tugas akhir ini yaitu sebagai berikut :

a) Menentukan Determinan Matriks *Centrosymmetric* Bentuk Khusus Ordo 3×3.
   1. Diberikan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus pada Persamaan (1.2).
   2. Menghitung perpangkatan matriks $(A_3)^2$ hingga $(A_3)^{10}$.
   3. Menduga bentuk umum perpangkatan matriks ${A_3}^n$.
   4. Melakukan pembuktian bentuk umum ${A_3}^n$ dengan menggunakan induksi matematika.
   5. Mendapatkan $|{A_3}^n|$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama.
   6. Menentukan $Adj\ ({A_3}^n)$ menggunakan kofaktor.
   7. Menentukan ${A_3}^{-n}$ dengan Definisi 2.8 pada Persamaan (2.2).
   8. Membuktikan ${A_3}^n \cdot {A_3}^{-n} = I = {A_3}^{-n} \cdot {A_3}^n$.
   9. Mendapatkan $|{A_3}^{-n}|$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama.
   10. Mengaplikasikan bentuk umum ${A_3}^n$, $|{A_3}^n|$, ${A_3}^{-n}$, $|{A_3}^{-n}|$ ke dalam contoh soal $n = 5$ dan $n = 8$.

b) Menentukan Determinan Matriks *Centrosymmetric* Bentuk Khusus Ordo 4×4.
   1. Diberikan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus pada Persamaan (1.3).
   2. Menghitung perpangkatan matriks $(A_4)^2$ hingga $(A_4)^{10}$.
   3. Menduga bentuk umum perpangkatan matriks ${A_4}^n$.
   4. Melakukan pembuktian bentuk umum ${A_4}^n$dengan menggunakan induksi matematika.
   5. Mendapatkan $|{A_4}^n|$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama.
   6. Menentukan $Adj\ ({A_4}^n)$ menggunakan kofaktor.

7. Menentukan $A_4{}^{-n}$ dengan Definisi 2.8 pada Persamaan (2.2).
8. Membuktikan $A_4{}^{n} \cdot A_4{}^{-n} = I = A_4{}^{-n} \cdot A_4{}^{n}$.
9. Mendapatkan $|A_4{}^{-n}|$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama.
10. Mengaplikasikan bentuk umum $A_4{}^{n}$, $|A_4{}^{n}|$, $A_4{}^{-n}$, $|A_4{}^{-n}|$ ke dalam contoh soal $n = 5, n = 8$ dan $n = 10$.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

1. Jika diberikan matriks *centrosymmetric* ordo 3×3 yaitu $A_3 = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix}$ dengan $a, b \neq 0,\ a, b \in R$, maka diperoleh

$$A_3{}^n = \begin{bmatrix} a^n & \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-r} b^r & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-r} b^r & a^n \end{bmatrix}, A_3{}^{-n} = \begin{bmatrix} a^{-n} & -\sum_{r=0}^{n-1} a^{-r} b^{r-n} & 0 \\ 0 & b^{-n} & 0 \\ 0 & -\sum_{r=0}^{n-1} a^{-r} b^{r-n} & a^{-n} \end{bmatrix}$$

dan $|A_3{}^n| = (a^2 b)^n, |A_3{}^{-n}| = (a^2 b)^{-n}$.

2. Jika diberikan matriks *centrosymmetric* ordo 4×4 yaitu

$A_4 = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{bmatrix}$ dengan $a, b \neq 0,\ a, b \in R$ maka diperoleh

$$A_4{}^n = \begin{bmatrix} a^n & \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-r} b^r & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-r} b^r & a^n \end{bmatrix}, A_4{}^{-n} = \begin{bmatrix} a^{-n} & (-1)\sum_{r=0}^{n-1} a^{-r} b^{r-n} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)\sum_{r=0}^{n-1} a^{-r} b^{r-n} & a^{-n} \end{bmatrix}$$

dan $|A_4{}^n| = (ab)^{2n}, |A_4{}^{-n}| = (ab)^{-2n}$.

5.2 Saran

Pada penelitian tugas akhir ini penulis membahas mengenai determinan matriks *centrosymmteric* bentuk khusus ordo 3×3 dan 4×4 berpangkat bilangan bulat menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama. Untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat membahas mengenai determinan matriks *centrosymmetric* dengan ordo yang lebih besar.

DAFTAR PUSTAKA

[1] C. Permata, D. Kustiawati, H. Fahinah, H. Agustina, and W. N. Indah, "Analisis Implementasi Matriks pada Aplikasi Input-Output di Bidang Matematika Ekonomi," *Jurnal Pendidikan dan Konseling*, vol. 4, 2022.

[2] M. Juanda, "Penerapan Matriks dalam Kriptografi," 2015. [Online]. Available: http://wpengine.netdna-cdn.com/

[3] K. Umam, "Pemanfaatan Software Berbasis Matrik Dalam Perhitungan Konstruksi Statis Tak Tentu Pada Mekanika Teknik Lanjut," *Jurnal Dinamika*, vol. 1, 2016, [Online]. Available: www.decodedscience.org

[4] N. Khasanah, B. Surarso, and Farikhin, "Necessary and sufficient on the computation of determinant of a kind of special matrix," in *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics Inc., May 2020. doi: 10.1063/5.0008498.

[5] S. Koyuncu and C. Özel, "Lie Algebra of Centrosymmetric Matrices and Applications," *Preprint*, 2023. [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/370160425

[6] Z. Y. Liu, "Some Properties of centrosymmetric Matrices," *Appl Math Comput*, vol. 141, no. 2–3, pp. 297–306, Sep. 2003, doi: 10.1016/S0096-3003(02)00254-0.

[7] N. Khasanah, Farikhin, and B. Surarso, "The Algorithm of Determinant Centrosymmetric Matrix Based on Lower Hessenberg Form," in *Journal of Physics: Conference Series*, Institute of Physics Publishing, Apr. 2017. doi: 10.1088/1742-6596/824/1/012028.

[8] F. Aryani and C. C. Marzuki, "Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 4, no. 2, 2018.

[9] A. N. Rahma, K. Swandayani, and C. C. Marzuki, "Determinan Matriks FLScircr Bentuk Khusus n×n,n≥3 Menggunakan Metode Salihu," *Jurnal Fourier*, vol. 8, no. 1, pp. 27–34, Apr. 2019, doi: 10.14421/fourier.2019.81.27-34.

[10] A. N. Rahma, E. Safitri, and R. Rahmawati, "Determinan Matriks FLScircr Bentuk Khusus n x n, $n \geq 3$ Menggunakan Metode Kondensasi Chio," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 5, no. 1, 2019.

[11] A. N. Rahma, R. Rahmawati, and R. H. Vitho, "Determinan Matriks Segitiga Atas Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Kofaktor," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 2, 2020.

[12] A. N. Rahma, rahmawati Rahmawati, and S. M. Jauza, "Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Dengan Kofaktor," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 2, 2020.

[13] A. N. Rahma, E. Erizona, and R. Rahmawati, "Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo 4 x 4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, vol. 4, no. 1, pp. 7–16, Jul. 2021, doi: 10.14710/jfma.v4i1.8921.

[14] A. N. Rahma and Z. Aqilah, "Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 7, no. 1, p. 96, Mar. 2021, doi: 10.24014/jsms.v7i1.12193.

[15] B. P. Tomasouw, "Karakteristik Matriks Centro-Simetris," *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan* , vol. 10, pp. 69–76, 2016.

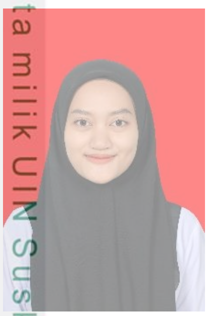
[16] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer : Versi Aplikasi, Edisi Kedelapan, Jilid 1*. Jakarta: Erlangga, 2004.

[17] P. Iryanti, *Notasi Sigma, Barisan, dan Deret*. Yogyakarta: Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika, 2009.

[18] H. Anton and Chris Rorres, *Elementary Linear Algebra Applications Version*. America: United States of America, 2013.

[19] R. Munir, *Matematika Diskrit : Revisi Keenam*. Bandung: Informatika Bandung, 2016.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama lengkap Novi Hidayah dilahirkan di Desa Langkat, Kecamatan Siak Kecil, Kabupaten Bengkalis, pada 14 November 2001. Penulis lahir dari pasangan bapak Jarno dan ibu Wijiati. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Mengawali pendidikan secara formal di SD Negeri 11 Siak Kecil (2008-2014) dan melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 4 Siak Kecil (2014-2017). Selanjutnya penulis melanjutkan Pendidikan di SMA Negeri 2 Siak Kecil (2017-2020) dan melanjutkan Pendidikan di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau Fakultas Sains dan Teknologi Prodi Matematika pada tahun 2020. Untuk menyelesaikan Program Studi Matematika penulis melakukan penelitian dengan judul "Determinan Matriks *Centrosymmetric* Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Ordo 3×3 dan 4×4" sebagai syarat dalam memperoleh gelar Strata (S1).