TRACE MATRIKS *ANTISYMMETRIC* BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

DINA SAPUTRI
12050422129

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2024

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS *ANTISYMMETRIC* BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

oleh:

DINA SAPUTRI
12050422129

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 07 Juni 2024

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIP. 19770913 200604 2 002

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS _ANTISYMMETRIC_ BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

oleh:

DINA SAPUTRI
12050422129

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 07 Juni 2024

Pekanbaru, 07 Juni 2024
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

KEMENTERIAN AGAMA UIN SUSKA RIAU FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UIN SULTAN SYARIF KASIM RIAU

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Nilwan Andiraja, M.Sc.**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota I	**: Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**
Anggota II	**: Rahmawati, M.Sc.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 07 Juni 2024
Yang membuat pernyataan,

DINA SAPUTRI
12050422129

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alaamiin, puji dan syukur kepada Allah Subhana wata'ala atas banyak nikmat dan rahmat yang telah diberikan sehingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir saya ini dengan lancar, dan shalawat beriringkan salam selalu tercurah kepada baginda Rasulullah Nabi Muhammad Shalallahu'alaihi wasallam.

Saya persembahkan tugas akhir ini untuk orang-orang yang saya cintai,

Terkhusus untuk kedua orang tua saya bapak (Sukino) dan Mamak (Sabariyah) dan adik laki saya satu-satunya(Muhammad Yusuf)

Bapak dan Mamak adalah salah satu penguat saya sampai saat ini sehingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Mereka adalah satu-satunya pelindung, penyemangat dalam hidup saya. Mereka tidak pernah menyerah berjuang untuk pendidkkan saya, mereka ingin saya jauh lebih baik pendidikannya dibandingkan mereka. Sedari kecil didikan bapak sudah mengajarkan kedisiplinan pada saya dan kesabaran mamak yang membuat saya bisa memahami kenapa bapak mendidik saya sampai sekeras itu. Setelah dewasa saya merasakan dampak dari itu semuanya. Terimakasih untuk pahlawan hidupku kalian berdua adalah harta yang paling berharga dan tidak dapat tergantikan oleh apapun.

Teruntuk adikku, terimakasih selama kakak tidak ada dirumah sudah menjadi anak yang baik untuk bapak dan mamak. Semangat belajarmu membuat kakak lebih semangat dalam menyelesaikan tugas akhir ini, supaya kakak bisa cepat menggantikan peran bapak dan mamak dalam membiayai pendidikan sekolah mu dik. Tetap semangat belajar kakak akan selalu mengusahakan yang terbaik untukmu adikku.

Untuk yang selalu memberi saya nasihat dan semangat dari jauh Kakek, Uwak,Ibu dan Om.

Terimakasih atas nasihat dan dukungannya untuk saya, sehingga dapat lebih semangat dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Untuk Dosen Pembimbing saya Ibu Fitri Aryani, M.Sc

Terimakasih banyak saya ucapkan untuk ibu, karena selalu sabar dalam membimbimbing saya dari awal hingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Ibu tidak perma bosan setiap saya bertanya dan ibu selalu memberikan arahan kepada saya dengan sabar, tanpa bimbingan dari ibu mungkin saya tidak dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Sekali lagi terimakasih banyak bu.

Untuk Sahabat-sahabat saya tercinta

Terimakasih kalian masih tetap ada disaat kita sama-sama punya beban masing-masing masih mau membantu dan memberi masukan selama penuliusan tugas akhir ini dan selalu jadi support system bahwa semua ini akan dilewati dengan baik dan hasil yang tidak akan mengecewakan. Selalu berkata tidak boleh menyerah tinggal sedikit lagi kita akan selesai dan perjunagan kita masih panjang untuk membahagiakan keluarga.

TRACE MATRIKS *ANTISYMMETRIC* BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT

DINA SAPUTRI
12050422129

Tanggal Sidang : 07 Juni 2024
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat. Langkah awal yang dilakukan untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* berpangkat bilangan bulat, yaitu mencari perpangkatan matriks yang dimulai dari pangkat dua sampai pangkat sepuluh. Dengan melihat pola dari matriks berpangkatnya, maka dapat diduga bentuk umum matriks *antisymmetric* berpangkat bilangan bulat positif. Selanjutnya bentuk umum tersebut dibuktikan dengan aturan induksi matematika. Menentukan perpangkatan matriks *antisymmetric* untuk pangkat bilangan bulat negatif akan diperoleh dari menentukan invers matriks. Invers matriks akan dipangkatkan dari pangkat negatif dua sampai pangkat negatif sepuluh. Dengan melihat pola dari matriks berpangkatnya, maka dapat diduga bentuk umum matriks *antisymmetric* berpangkat bilangan bulat negatif. Selanjutnya bentuk umum tersebut dibuktikan dengan aturan invers. Sehingga hasil yang didapatkan ialah bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* dengan menggunakan definisi *trace* matriks dan juga disajikan pemrograman MATLAB bentuk umum perpangkatan dan *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat. Aplikasi diberikan dalam bentuk contoh soal.

Kata Kunci : Determinan matriks, induksi matematika, invers matriks, matriks *antisymmetric* perpangkatan matriks, *trace* matriks.

TRACE OF INTEGER POWERS OF ANTISYMMETRIC SPECIAL MATRIX

DINA SAPUTRI
12050422129

Date of Final Exam : *June* 07^{th}, *2024*
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

This research aims to obtain the general form of trace matrix antisymmetric special form with integer rank. The initial step taken to obtain the general form of the antisymmetric trace matrix with integer rank is to find the rank of the matrix starting from the rank of two to the rank of ten. By looking at the pattern of the rank matrix, the general form of the positive integer antisymmetric matrix can be predicted. Furthermore, the general form is proven by the rules of mathematical induction. Determining the rank of the antisymmetric matrix for negative integer powers will be obtained from determining the matrix inverse. The matrix inverse will be raised from a negative power of two to a negative power of ten. By looking at the pattern of the matrix rank, the general form of the antisymmetric matrix with the rank of negative integer can be predicted. Furthermore, the general form is proven by the inverse rule. So that the results obtained are the general form of antisymmetric trace matrix by using the definition of trace matrix and also presented MATLAB programming general form of departure and trace matrix antisymmetric special form with integer rank. Applications are given in the form of example problems.

Keywords *:Matrix determinant, mathematical induction, matrix inverse, antisymmetric matrix, matrix exponent, matrix trace.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Alhamdulillahirabbil'alamin saya ucapkan puji dan syukur kepada Allah Subhanahu wa ta'ala. Zat pencipta dan maha kuasa atas segala hidayah dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul "***Trace*** **Matriks** ***Antisymmetric*** **Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat".** Shalawat serta salam senantiasa kita hadiahkan kepada junjungan alam Nabi Besar Muhammad Shallallahu' alaihi Wa Sallam, semoga senantiasa dengan bersholawat kita mendapatkan syafa'atnya dan selalu dalam lindungan Allah Subhanahu wa ta'ala. Aamiin allahuma aamiin.

Dalam penyusunan Tugas Akhir ini, penulis banyak sekali mendapat bimbingan, arahan, masukan, nasehat, dan lain sebagainya dari dari berbagai pihak. Oleh sebab itu dengan setulus hati penulis mengucapkan terima kasih yang tidak terhingga kepada Kedua orang tuaku tersayang, Bapak Sukino dan Ibu Sabariyah yang senantiasa selalu mendoakan saya dan pemberian materi yang tidak bisa dihitung berapa banyaknya, untuk adik saya Muhammad Yusuf yang telah memotivasi kepada penulis agar dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini cepat selesai, dan juga ucapan terimakasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau

5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku dosen pembimbing TA yang telah meluangkan waktunya untuk berkonsultasi dalam penyelesaian Penelitian Tugas Akhir.
6. Ibu Dr.Yuslenita Muda, M.Sc. dan Ibu Rahmawati, M.Sc. selaku dosen penguji yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk menguji dan memberikan saran dalam Penelitian Tugas Akhir.
7. Bapak Zukrianto, M.Si. selaku Koordinator Tugas Akhir Program Studi Matematika.
8. Bapak dan Ibu Dosen dilingkungan Fakultas Sains dan Teknologi khususnya pada Program Studi Matematika.
9. Sahabatku Fitri Halimah Lubis, Qori’ah Amri, Rosydiana Rahmatullah, Edel, Sovi dan Tamrin yang telah memberikan support kepada penulis.
10. Teman seperjuanganku Risa, Riri, Chania, Novi dan Fanny yang telah memberikan masukan dan bantuan kepada penulis selama masa perkuliahan.
11. Seluruh teman-teman Angkatan 2020, dan kakak-kakak senior yang telah memberikan ilmu dan motivasi kepada penulis.

Penulis menyadari dalam Penelitian Tugas Akhir ini masih banyak terdapat kekurangan dan kesalahan, untuk itu penulis mengharapkan adanya masukan berupa kritik ataupun saran dari berbagai pihak untuk kesempurnaan Penelitian Tugas Akhir ini, dan kepada semua pihak yang telah memberikan dorongan serta bantuan penulis hanya dapat mengucapkan terimakasih, semoga bantuan bimbingan dan dukungan yang diberikan mendapatkan balasan dari Allah SWT.

Wassalamu’alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 07 Juni 2024

DINA SAPUTRI
12050422129

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matriks merupakan salah satu materi dasar dalam matematika yang terdapat pada ilmu aljabar. Terdapat beberapa operasi pada matriks, diantaranya ialah operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, perpangkatan, determinan, invers, dan *trace* matriks. *Trace* matriks merupakan penjumlahan entri-entri pada diagonal utama dari matriks bujur sangkar [1]. Berdasarkan penjelasan tersebut mencari *trace* matriks sangat sederhana, tetapi untuk mencari *trace* matriks berpangkat tidak sesederhana mencari *trace* matriks yang tidak berpangkat. Langkah awal yang dilakukan ialah melakukan perpangkatan matriks dengan perkalian matriks dengan matriks, selanjutnya diperoleh *trace* matriks dengan menggunakan definisi *trace* matriks.

Matriks memiliki macam-macam jenis salah satunya ialah matriks *antisymmetric*. Matriks *antisymmetric* dapat disebut sebagai matriks simetris miring atau matriks yang transposenya adalah negatif dari matriks *antisymmetric*, dengan semua elemen diagonal utamanya bernilai nol, dan ditulis dengan notasi $A^T = -A$ [2]. Matriks *antisymmetric* yang digunakan pada penelitian ini adalah matriks *antisymmetric* berordo 6 x 6 bentuk khusus sebagai berikut:

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix} \forall\, a \in R, \text{dengan } a \neq 0. \qquad (1.1)$$

Beberapa peneliti sebelumnya yang membahas tentang *trace* matriks berpangkat diantaranya ialah penelitian yang dilakukan oleh [3] pada tahun 2021 mengenai *trace* matriks toeplitz 2-tridiagonal 3 x 3 berpangkat bilangam bulat positif dengan bentuk khusus matriksnya adalah sebagai berikut:

$$A_= \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \forall\, a, b.c \in \mathbb{R},$$

dan diperoleh hasil akhir dari penelitian ini ialah bentuk umum dari *trace* matriks toeplitz 2- tridiagonal 3 x 3 berpangkat bilangan bulat positif sebagai berikut:

$$tr(A^n) = \begin{cases} a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i, & n \text{ ganjil}, n > 0, n \in \mathbb{Z} \\ a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i, & n \text{ genap}, n \geq 0, n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Peneliti [4] pada tahun 2021 membahas mengenai *trace* matriks khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat, bentuk matriks yang digunakan ialah matriks yang elemennya berisi a, b, c dengan $\forall\, a, b, c \in R$. Hasil akhir yang didapatkan ialah bentuk umum *trace* matriksnya yaitu: $tr\,(A_3)^n = (a+b+c)^n$ dengan $n \in Z^+$.

Selanjutnya pada tahun yang sama juga masih membahas *trace* matriks berpangkat yang dilakukan oleh [5] penelitiannya mengenai *trace* matriks simetris berbentuk khusus 4 x 4 berpangkat bilangan bulat. Adapun bentuk matriks yang digunakan dalam penelitiannya adalah matriks yang elemennya berisi b dan elemen diagonal utamanya bernilai 0 dengan $b \in R, b \neq 0$. Diproleh hasil akhir yaitu :

$$tr(A_{4^n}) = (3^n - (-3)^{n+1})b^n, \text{ untuk bilangan bulat positif,}$$

$$tr(A_{4^{-n}}) = (\,(-1)^n 3^{n+1} + 1)\, 3^{-n} b^{-n}, \text{ untuk bilangan bulat negatif.}$$

Penelitian yang dilakukan oleh [6] mengenai *trace* matriks $n \times n$ berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat, dengan matriks yang digunkan berukuran $n \times n$ dengan semua elemen matriksnya adalah a, $a \in \mathbb{R}$. Hasil yang diperoleh ialah bentuk umum *trace* matriks $tr(\,A_n^m) = (na)^m$.

Penelitian [7] pada tahun 2022 juga membahas *trace* matriks berpangkat. Hasil yang diperoleh adalah *trace* matriks kompleks bentuk khusus $n \times n, n \geq 3$ berpangkat bilangan bulat positif. Bentuk khusus matriks yang digunakan yaitu:

$$A_n = \begin{bmatrix} a+bi & 0 & \cdots & 0 & a+bi \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ a+bi & 0 & \cdots & 0 & a+bi \end{bmatrix}, \forall\, a, b \in R, i = \text{imajiner},$$

dan hasil akhirnya didapatkan bentuk umum *trace* matriksnya yaitu:

$$tr(A_n)^m = (2a + 2bi)^m \,.$$

Tahun 2023 oleh [8] masih membahas mengenai *trace* matriks berpangkat. Penelitiannya membahas tentang *trace* matriks hankel berordo ganjil berpangkat bilangan bulat positif. Adapun bentuk khusus matriks yang digunakan pada penelitiannya sebagai berikut:

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \end{bmatrix},$$

degan bentuk umum *trace* matriks hankel yang di dapatkan, yaitu:.

$$tr(A_{n+1})^m = \left[\left(\frac{n}{2}+1\right)a\right]^m + \left[\left(\frac{n}{2}\right)a\right]^m.$$

Peneliti [9] pada tahun yang sama membahas tentang *trace* matriks berpangkat. Penelitiannya mengenai *trace* matriks *antisymmetric* berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif dengan bentuk khusus matriks yang di gunakan yaitu:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \forall\, a \in R, \text{dengan } a \neq 0,$$

dan diperoleh hasil akhirnya yaitu bentuk umum *trace* matriksnya sebagai berikut:

$$tr(A_3)^n = \begin{cases} 0, & \text{untuk } n \text{ bilangan bulat ganjil} \\ -(-2^{\frac{n+2}{2}})a^n, & \text{untuk } n \text{ bilangan bulat genap} \end{cases}.$$

Peneliti [10] membahas *trace* matriks *antysimmetric* tetapi dengan ordo yang lebih besar. Bentuk matriks yang digunakan sama dengan peneliti *trace* matriks *antisymmetric* sebelumnya yaitu oleh [9], namun ordo matriks pada peneliti ini ialah berordo $5x5$. Sehingga didapatkan hasil akhirnya ialah terdapat dua bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* sebagai berikut.

$$tr(A_5^n) = \begin{cases} 0 & ;\text{unuk } n \text{ ganjil} \\ 2\left((-1)^{\frac{n}{2}} a^n (2)^{n-1}\right) + 2\left((-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{n-1}\right)\right) + \left((-1)^{\frac{n}{2}} a^n 2^{\frac{n}{2}}\right) & ;\text{untuk } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Berdasarkan penjelasan yang didapat dari penelitian-penelitian terdahulu, terlihat bahwa penelitian mengenai *trace* matriks *antisymmetric* berpangkat bilangan bulat telah ada yang melakukan penelitian berordo 3×3 dan 5×5. Pada penelitian kali ini dilakukan penelitian mengenai *trace* matriks *antisymmetric* berpangkat bilangan bulat dengan ordo 6×6 dan pemrograman untuk mendapatkan bentuk umum perpangkatan matriks dan bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat. Sehingga peneliti tertarik melanjutkan penelitian pada matriks tersebut dengan judul penelitian yaitu ***"Trace* Matriks *Antisymmetric* Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan diatas maka rumusan masalah yang diangkat oleh peneliti pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk umum dari perpangkatan matriks *antisymmetric* berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat?
2. Bagaimana bentuk umum dari *trace* matriks *antisymmetric* berpangkat bilangan bulat?
3. Bagaimana pemrograman dari bentuk umum perpangkatan matriks dan bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat?

1.3 Batasan Masalah

Untuk memperoleh hasil dari penelitian, sangat penting diberikan batasan masalah pada penelitian, batasan masalah pada penelitian ini ialah sebagai berikut:

1. Matriks yang digunakan adalah matriks *antisymmetric* berordo 6x6 berbentuk khusus seperti pada Persamaan (1.1).
2. Pembuktian untuk perpangkatan matriks dengan menggunakan induksi matematika.
3. Pemrograman dari bentuk umum perpangkatan matriks dan bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat dengan menggunakan MATLAB.

1.4 Tujuan Masalah

Tujuan pada penelitian *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan bentuk umum dari perpangkatan matriks *antisymmetric* berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat.
2. Mendapatkan bentuk umum dari *trace* matriks *antisymmetric* berpangkat bilangan bulat.

3. Mendapatkan pemrograman dari bentuk umum perpangkatan matriks dan bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini memiliki beberapa manfaat sebagai berikut:

1. Menerapkan ilmu yang telah didapat selama menuntut ilmu di program studi matematika .
2. Memperoleh pengetahuan yang lebih mendalam mengenai materi matriks.
3. Memudahkan peneliti selanjutnya karena penelitian ini dapat dijadikan referensi.

1.6 Sistematika Penelitian

Adapun sistematika pada penulisan tugas akhir *trace* matriks *antisymmetric* berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat ialah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab I ialah berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan yang terakhir ialah sistematika penulisan pada penelitian *trace* matriks *antisymmetric*.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab II ialah berisi tentang beberapa teori yang mendukung dalam penyelesaian *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif pada matriks *antisymmetric*, perpangkatan matriks, determinan matriks, invers matriks, *trace* matriks berpangkat bilangan bulat, induksi matematika dan MATLAB.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab III ini akan dijelaskan mengenai tahapan atau langkah – langkah yang akan dilakukan oleh peneliti dalam mencari penyelesaian penelitian yang dilakukan yaitu mengenai *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab IV ini berisi penjelasan dalam mendapatkan bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat.

BAB V PENUTUP

Bab V ini berisi kesimpulan dan saran yang diperoleh dari apa yang dibahas pada bab IV.

BAB II
LANDASAN TEORI

Bagian bab II ini berisi pemaparan tentang teori yang di gunakan peneliti dalam penyelesaian permasalahan seperti perkalian matriks, perpangkatan matriks, determinan matriks, invers matriks, *trace* matriks, induksi matematika dan matlab.

2.1 Matriks *Antisymmetric*

Berikut ini dijelaskan definisi dari matriks *antisymmetric*.

Definisi 2.1 [11] Matriks *antisymmetric* ialah matriks bujur sangkar yang transpose nya adalah negatifnya atau dapat ditulis dengan $a_{ij} = -a_{ij}$ untuk entri matriks i dan j. Matriks dapat dikatakan *antisymmetric* jika $A^T = -A$. Elemen diagonal utamanya ialah bernilai 0.

Contoh 2.1 Berikut akan diberikan contoh matriks *antisymmetric* berordo 6 x 6 sebagai berikut: $A_6 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix}$ $\forall\, a \in R,$ dengan $a \neq 0.$

Tunjukkan apakah matriks berikut merupakan matriks *antisymmetric*!

Penyelesaian:

$$A_6^T = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & -a & 0 & -a \\ a & 0 & -a & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & -a & 0 & -a \\ a & 0 & a & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & a & 0 & -a \\ a & 0 & a & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -A.$$

2.2 Perpangkatan Matriks

Perpangkatan matriks terdiri dari dua yaitu perpangkatan matriks untuk bilangan bulat positif dan perpangkatan matriks untuk bilangan bulat negatif, adapun penjelasannya adalah sebagai berikut:

Definisi 2.2 [1] Jika A ialah matriks bujur sangkar, maka pangkat bilangan positif dari A adalah sebagai berikut:

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n\,faktor}\ (n > 0). \tag{2.1}$$

Kemudian jika A dibalik, maka dapat didefenisikan pangkat bilangan bulat negatif sebagai berikut:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \qquad A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}_{n\,faktor}. \tag{2.2}$$

Contoh 2.2 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & 8 & 2 & 9 \\ -5 & -1 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & -8 & -5 & 0 & 8 & 2 \\ -3 & -2 & -3 & -8 & 0 & 3 \\ -6 & -9 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Tentukan hasil dari A^2 dan A^3!.

Penyelesaian:

$A^2 = A.A$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & 8 & 2 & 9 \\ -5 & -1 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & -8 & -5 & 0 & 8 & 2 \\ -3 & -2 & -3 & -8 & 0 & 3 \\ -6 & -9 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & 8 & 2 & 9 \\ -5 & -1 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & -8 & -5 & 0 & 8 & 2 \\ -3 & -2 & -3 & -8 & 0 & 3 \\ -6 & -9 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -75 & -73 & -18 & 5 & 9 & 34 \\ -73 & -154 & -65 & -31 & 34 & 11 \\ -18 & -65 & -61 & -39 & 20 & -20 \\ 5 & -31 & -39 & -158 & -40 & -59 \\ 9 & 34 & 20 & -40 & -95 & -55 \\ 34 & 11 & -20 & -59 & -55 & -131 \end{bmatrix}.$$

$A^3 = A^2.A$

$$= \begin{bmatrix} -75 & -73 & -18 & 5 & 9 & 34 \\ -73 & -154 & -65 & -31 & 34 & 11 \\ -18 & -65 & -61 & -39 & 20 & -20 \\ 5 & -31 & -39 & -158 & -40 & -59 \\ 9 & 34 & 20 & -40 & -95 & -55 \\ 34 & 11 & -20 & -59 & -55 & -131 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & 8 & 2 & 9 \\ -5 & -1 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & -8 & -5 & 0 & 8 & 2 \\ -3 & -2 & -3 & -8 & 0 & 3 \\ -6 & -9 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -496 & -534 & -889 & -487 & -1088 \\ 496 & 0 & -477 & -1924 & -1003 & -1849 \\ 534 & 477 & 0 & -963 & -619 & -772 \\ 889 & 1924 & 963 & 0 & -1251 & -724 \\ 487 & 1003 & 619 & 1251 & 0 & 15 \\ 1088 & 1849 & 772 & 724 & -15 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.3 Determinan Matriks dan Invers Matriks

Trace matriks berpangkat bilangan bulat negatif akan didapatkan melalui beberapa tahap, salah satu tahapannya ialah mencari determinan matriks dan apabila matriks tersebut memiliki nilai determinan atau hasil determinannya tidak 0 maka matriks tersebut meiliki invers. Untuk lebih lanjut akan dibahas penjelasan mengenai dererminan matriks dan invers matriks akan sebagai berikut:

Definisi 2.3 Determinan Matriks [12] jika A merupakan matriks bujur sangkar, maka fungsi determinannya dapat dinotasikan dengan *det* dan bisa juga didefenisikan dengan det (A) sebagai semua hasil kali elementer pada matriks A.

Teorema 2.1 dan teorema 2.2 menyatakan cara menentukan determinan matriks.

Teorema 2.1 [12] Determinan dari matriks A berordo $n \times n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri – entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor – kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali – hasil kali yang diperoleh untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$.

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \quad (2.3)$$

(ekpansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

dan

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \quad (2.4)$$

(ekpansi kofaktor sepanjang kolom ke-i).

Teorema 2.2 Matriks Segitiga [12] Jika A merupakan matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka $\det(A)$ merupakan hasil kali dari entri – entri pada diagonal utama matriks tersebut yaitu :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{2.5}$$

Teorema 2.3 Sifat – Sifat Fungsi Determinan [12] Misalkan A merupakan matriks bujur sangkar dengan ordo $n\ x\ n$ dengan k merupakan sebarang skalar, maka berlaku:

1. $\det(A) = \det(A^T)$.
2. $\det(kA) = k^n \det(A)$.
3. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Contoh 2.3 Diberikan matriks $A_6 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix} \forall\, a \in$ R, dengan $a \neq 0$. Hitunglah det (A_6) dengan menggunakan ekpansi kofaktor sepanjang kolom pertama!

Penyelesaian:

$$\det(A_6) = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & -a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+1}(-a)\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & -a & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{4+1}(-a)\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & -a & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{6+1}(-a)\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & -a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 \end{vmatrix} + a^2\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 \end{vmatrix} + a^2\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a & 0 \end{vmatrix} +$$

$$a^2\begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 \end{vmatrix} + -a^2\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 \end{vmatrix} + a^2\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 \end{vmatrix} +$$

$$a^2\begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \end{vmatrix} + -a^2\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \end{vmatrix} -a^2\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 \end{vmatrix}.$$

$$= a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ -a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ -a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} +$$

$$-a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ -a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} +$$

$$a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ -a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} + -a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} + -a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{vmatrix} +$$

$$a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} + -a^3\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} +$$

$$a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} + -a^3\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{vmatrix}.$$

$$= a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + -a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} +$$

$$a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + -a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} + -a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} +$$

$$a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} + -a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} + -a^4\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} +$$

$$-a^4\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} + -a^4\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} +$$

$$-a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + -a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} +$$

$$a^4\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + -a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} + a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} + -a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} +$$

$$a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} + -a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} + -a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} + -a^4\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(a^4(a^2)\right) + \left(a^4(a^2)\right) + \left(a^4(a^2)\right) + \left(-a^4(-a^2)\right) + \left(a^4(a^2)\right) + \left(a^4(a^2)\right) + \\
&\left(a^4(a^2)\right) + \left(-a^4(-a^2)\right) + \left(-a^4(a^2)\right) + \left(a^4(a^2)\right) + \left(a^4(-a^2)\right)\left(-a^4(-a^2)\right) + \\
&\left(a^4(a^2)\right) + \left(a^4(a^2)\right) + \left(-a^4(a^2)\right) + \left(-a^4(a^2)\right) + \left(a^4(a^2)\right) + \left(a^4(a^2)\right) + \\
&\left(-a^4(a^2)\right) + \left(a^4(-a^2)\right) + \left(-a^4(a^2)\right) + \left(a^4(a^2)\right) + \left(a^4(a^2)\right) + \left(a^4(-a^2)\right) + \\
&\left(a^4(a^2)\right) + \left(-a^4(-a^2)\right) + \left(a^4(a^2)\right) + \left(a^4(a^2)\right) + \left(a^4(a^2)\right) + \left(-a^4(-a^2)\right) + \\
&\left(a^4(a^2)\right) + \left(-a^4(-a^2)\right) + \left(a^4(-a^2)\right) + \left(-a^4(-a^2)\right) + \left(-a^4(-a^2)\right) + \\
&\left(-a^4(-a^2)\right). \\
&= (a^6) + (a^6) + (a^6) + (a^6) + (a^6) + (a^6) + (a^6) + (a^6) + (a^6) - (a^6) + (a^6) - (a^6) + \\
&(a^6) + (a^6) + (a^6) - (a^6) - (a^6) + (a^6) + (a^6) - (a^6) - (a^6) - (a^6) + (a^6) + \\
&(a^6) - (a^6) + (a^6) + (a^6) + (a^6) + (a^6) + (a^6) + (a^6) + (a^6) + (a^6) + (a^6) - (a^6) + \\
&(a^6) + (a^6) + (a^6) = 16a^6. \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Defenisi 2.4 Invers Matriks [11] Jika A merupakan matriks bujur sangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sehingga $AB = BA = l$, maka A dapat disebut sebagai matriks yang dapat dibalik (*non singular)* dan matriks B dapat disebut sebagai *inverse* dari A. Jika matriks B tidak ada, maka matriks A dapat disebut sebagai matriks *(singular)*.

Matriks bujur sangkar dikatakan *singular* jika matriks tersebut tidak memiliki invers atau $\det(A) = 0$. Jika matriks bujur sangkar memiliki invers maka matriks tersebut memiliki invers atau $\det(A) \neq 0$, maka matriks tersebut disebut dengan matriks *nonsingular*.

Teorema 2.4 [12] Jika A ialah matriks yang dapat dibalik, maka berlaku

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ (A)}\ adj(A). \qquad (2.7)$$

2.4 *Trace* Matriks

Trace matriks hanya dapat dikerjakan jika matriks tersebut merupakan matriks bujur sangkar, adapun penjelasan mengenai *trace* matriks dan sifat-sifatnya adalah sebagai berikut:

Definisi 2.5 *Trace Matriks* [13] Jika A merupakan matriks bujur sangkar, sehingga *trace* A dapat dinotasikan dengan $tr(A)$, dapat diartikan sebagai banyaknya jumlah entri – entri pada diagonal utama A. *Trace* dari matriks A tidak ada jika matriks A bukan merupakan matriks bujur sangkar.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Secara unm *trace* matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nm} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{2.9}$$

Contoh 2.4 Jika diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 8 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 1 & 8 & 2 & 9 \\ 7 & 2 & 5 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 9 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 3 & 3 \\ 6 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Tentukan $tr(A)$!

Penyelesaian:

$tr(A) = 2 + 8 + 5 + 9 + 3 + 4 = 31.$

Teorema 2.5 Sifat – Sifat *Trace* Matriks [14] Jika matriks A dan B merupakan matriks bujur sangkar n dan k ialah suatu skalar, maka dapat berlaku sifat – sifat dari *trace* matriks sebagai berikut:

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
2. $tr(A^T) = tr(A)$
3. $tr(kA) = k\, tr(A)$
4. $tr(AB) = tr(BA)$

Pembuktian Teorema:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Sehingga didapatkan,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}. \tag{2.10}$$

dan

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$.

Sehingga didapatkan,

$$tr(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33} + \cdots + b_{nn} . \tag{2.11}$$

1. Akan dibuktikan bahwa $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$. Berdasarkan matriks diatas yaitu matriks A dan matriks B sehingga didapatkan hasil sebagai berikut:

$$(A+B) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sehingga $(A+B)$ yaitu :

$$tr(A+B) = (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + (a_{33}+b_{33}) + \cdots + (a_{nn}+b_{nn}).$$

$$= (a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + b_{33} + \cdots + b_{nn}).$$

Dengan menggunakan Persamaan (2.8) dan (2.9) maka didapatkan hasil:

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B) \quad . \tag{2.12}$$

Sehingga terbukti untuk $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

2. Akan dibuktikan bahwa $tr(A^T) = tr(A)$. Sehingga diperoleh *Transpose* dari matriks A ialah sebagai berikut:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh $tr(A^T)$ ialah sebagai berikut:

$$tr(A^T) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn} = tr(A). \tag{2.13}$$

Maka terbukti bahwa $tr(A^T) = tr(A)$.

3. Akan dibuktikan bahwa $tr(kA) = k\, tr(A)$. Ambil permisalan sebarang k skalar, sehingga diperoleh hasil dari k dikali dengan matriks A ialah sebagai berikut:

$$kA = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sehingga didapatkan hasil dari *trace* matriks kA sebagai berikut:

$$\begin{aligned} tr(kA) &= ka_{11} + ka_{22} + ka_{33} + \cdots + ka_{nn} \\ &= k(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}). \\ &= k\, tr(A). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Sehinnga terbukti bahwa $tr(kA) = k\, tr(A)$.

4. Akan dibuktikan bahwa $tr(AB) = tr(BA)$, dari matriks A dan matriks B sehingga diperoleh hasil sebagai berikut.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + \cdots + a_{1n}b_{n3} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + \cdots + a_{2n}b_{n3} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + \cdots + a_{3n}b_{n1} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + \cdots + a_{3n}b_{n2} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + \cdots + a_{3n}b_{n3} & \cdots & a_{31}b_{1n} + a_{32}b_{2n} + \cdots + a_{3n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{n2} & a_{n1}b_{13} + a_{n2}b_{23} + \cdots + a_{nn}b_{n3} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh:

$$tr(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) + (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + \cdots + a_{3n}b_{n3}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}).$$

Selanjutnya untuk matriks (BA) diperoleh hasil sebagai berikut:

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \cdots + b_{1n}a_{n2} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + \cdots + b_{1n}a_{n3} & \cdots & b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1n}a_{nn} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2n}a_{n1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + \cdots + b_{2n}a_{n3} & \cdots & b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \cdots + b_{2n}a_{nn} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + \cdots + b_{3n}a_{n1} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + \cdots + b_{3n}a_{n2} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + \cdots + b_{3n}a_{n3} & \cdots & b_{31}a_{1n} + b_{32}a_{2n} + \cdots + b_{3n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11} + b_{n2}a_{21} + \cdots + b_{nn}a_{n1} & b_{n1}a_{12} + b_{n2}a_{22} + \cdots + b_{nn}a_{n2} & b_{n1}a_{13} + b_{n2}a_{23} + \cdots + b_{nn}a_{n3} & \cdots & b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh $trace\ (BA)$ ialah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} tr(BA) = {} & (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) + (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + \cdots + b_{3n}a_{n3}) + \\ & \cdots + (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots b_{nn} + a_{nn}). \end{aligned}$$

Maka diperoleh:

$$\begin{aligned} tr(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) + (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + \cdots + a_{3n}b_{n3}) + \\ &\quad \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}). \\ &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) + (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + \cdots + b_{3n}a_{n3}) + \\ &\quad \cdots + (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots b_{nn} + a_{nn}). \\ &= tr(BA). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Jadi terbukti bahwa $tr(AB) = tr(BA)$.

2.5 *Trace* Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif telah banyak dibahas, salah satunya ialah penelitian yang dilakukan oleh [10] dengan hasil penelitiannya ialah diperoleh bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat.

Berikut langkah-langkah yang dilakukan oleh [10] ialah sebagai berikut :

1. Diberikan matriks *antisymmetric* bentuk khusus A_5.
2. Mendapatkan perpangkatan matriks *antisymmetric* A_5^2 sampai A_5^{10}.
3. Menduga bentuk umum perpangkatan matriks *antisymmetric* A_5 dengan n bilangan positif.
4. Selanjutnya hasil dugaan dinyatakan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema 2.6 Diberikan matriks *antisymmetric* yang memiliki bentuk khusus 5 x 5 ialah sebagai berikut.

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix} \forall\, a \in R, dengan\ a \neq 0. \tag{2.16}$$

Maka diperoleh bentuk umum dari perpangkatan matriks sebagai berikut:

$$A_5^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{n-1} \\ 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{n-1} \\ 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 \end{bmatrix}, n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n-2}{2}}a^n(2)^{n-1} \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2^{\frac{n-2}{2}}+2^{n-1}) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2^{n-1}-2^{\frac{n-2}{2}}) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2)^{\frac{n}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2^{n-1}-2^{\frac{n-2}{2}}) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2^{\frac{n-2}{2}}+2^{n-1}) & 0 \\ (-1)^{\frac{n-2}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2)^{n-1} \end{bmatrix}, n \text{ genap} \end{cases}.$$

Teorema 2.7 Diberikan Matriks $A_5^n = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix}$.

Maka diperoleh bentuk umum *trace* matriksnya adalah sebagai berikut:

$$tr(A_5^n) = \begin{cases} 0 & ;\text{unuk } n \text{ ganjil} \\ 2\left((-1)^{\frac{n}{2}} a^n (2)^{n-1}\right) + 2\left((-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{n-1}\right)\right) + \left((-1)^{\frac{n}{2}} a^n 2^{\frac{n}{2}}\right) & ;\text{untuk } n \text{ genap.} \end{cases}$$

2.6 Induksi Matematika

Definisi 2.8 [15] Induksi matematika adalah suatu cara yang bisa berguna dalam membuktikan bahwa suatu pernyataan itu benar untuk setiap bilangan asli. Misalkan $p(n)$ ialah proposisi bilangan bulat positif yang hendak dibuktikan benar untuk setiap bilangan bulat positif n.

Langkah – langkah pembuktian induksi matematika adalah sebagai berikut:

1. Tunjukkan bahwa $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(k)$ benar, maka $p(k+1)$ juga benar untuk setiap $k \geq 1$. Sehingga $p(k)$ benar untuk semua bilangan positif k.

Contoh 2.5 Diberikan pembuktian dari Teorema 2.6 dengan menggunakan induksi matematika berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh [10]. Diketahui matriks *antisymmetric* A_5 pada Persamaan (2.16), sehingga diperoleh bentuk perpangkatan matriks *antisymmetric* $5\ x\ 5$ ialah sebagai berikut:

$$p(n)\colon\ A_5^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{n-1} \\ 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{n-1} \\ 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 \end{bmatrix}, n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n-2}{2}}a^n(2)^{n-1} \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n\left(2^{\frac{n-2}{2}}+2^{n-1}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2^{n-1}-2^{\frac{n-2}{2}}) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2)^{\frac{n}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2^{n-1}-2^{\frac{n-2}{2}}) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n\left(2^{\frac{n-2}{2}}+2^{n-1}\right) & 0 \\ (-1)^{\frac{n-2}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2)^{n-1} \end{bmatrix}, n \text{ genap} \end{cases}.$$

$p(n)$ telah terbukti benar yang dijelaskan pada [10] di Teorema 4.1 pada halaman 26-42.

2.7 MATLAB

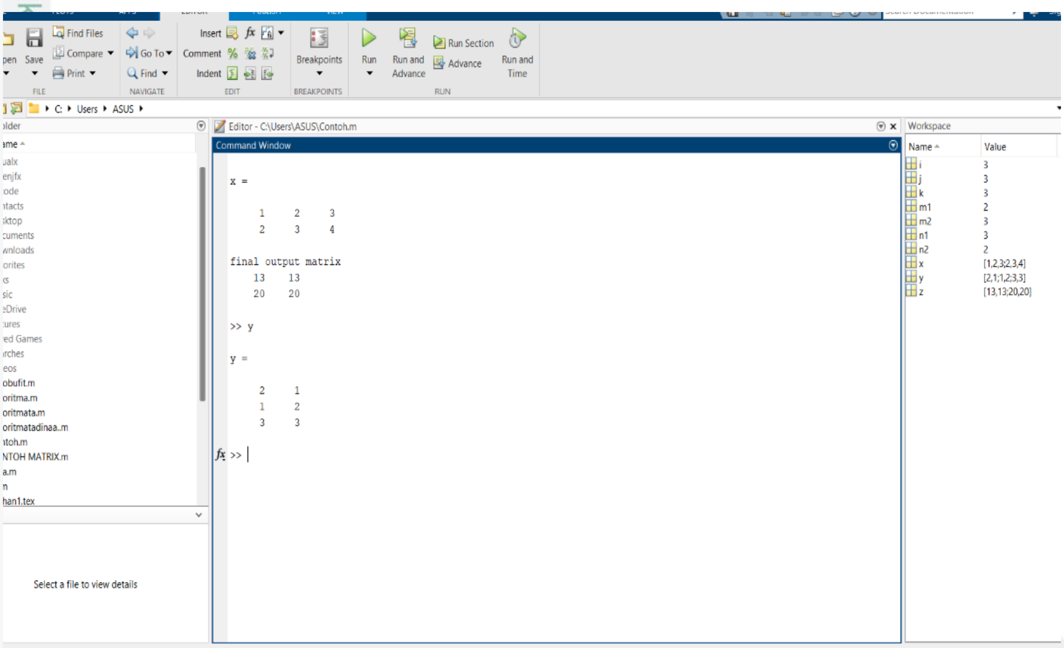
Definisi 2.9 [16] MATLAB merupakan bahasa pemrograman tingkat tinggi yang dikembangkan oleh Mathworks dikhususkan dalam komputasi numerik, visualisasi, dan pemrograman. Dengan memanfaatkan MATLAB, pengguna dapat melakukan analisis data, mengembagkan algoritma, dan juga dapat membuat model maupun aplikasi. Matlab juga dapat mempermudah dalam penyelesaian suatu masalah, salah satunya ialah matlab dapat digunakan untuk mempermudah dalam penyelesaian persoalan suatu matriks, misalnya dalam hal penjumlahan, pengurangan, perkalian, determinan, invers, *trace* dan masih banyak lagi.

Contoh 2.7 Diberikan pemrograman perkalian matriks dengan mengunakan MATLAB sebagai berikut:

```
clc
clear all
close all
x=[1 2 3; 2 3 4]
y=[2 1;1 2;3 3]
[m1 n1]=size (x);
[m2 n2]=size (y);%find number of rows and columns
in the matrix
z=zeros(m1,n2);
for i=1:m1 %i will run upto number of rows in
first matrix
    for j=1:n2 %run upto number of columns in the
second matrix
        for k=1:n1 %run upto either n1 or m2 as
both are equal
            z(i,j)=z(i,j)+x(i,k)*y(k,i);
            k=k+1;
        end
        j=j+1;
    end
    i=i+1;
end
disp('final output matrix');

disp(z);
```

Hasilnya yaitu:



BAB III
METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan penulis dalam tugas akhir ini adalah menggunakan metode studi literatur (pustaka) dengan merujuk jurnal-jurnal penelitian dan buku-buku yang berhubungan dengan penelitian. Adapun langkah- langkah yang dilakukan dalam penyelesaian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Diberikan matriks *antisymmetric* bentuk khusus yang terdapat pada Persamaan (1.1).
2. Menentukan bentuk umum perpangkatan matriks *antisymmetric* dari A_6^2 sampai A_6^{10} .
3. Menduga bentuk umum matriks *antisymmetric* bentuk khusus A_6^n dengan n ialah bilangan bulat positif.
4. Membuktikan bentuk umum matriks *antisymmetric* A_6^n untuk n bilangan bulat positif dengan cara induksi matematika.
5. Mendapatkan pemrograman MATLAB bentuk perpangkatan matriks *antisymmetric* A_6^n untuk n bilangan bulat positif.
6. Telah diketahui $\det(A_6) \neq 0$ pada Persamaan (2.6). Maka selanjutnya akan ditentukan invers matriks A_6.
7. Menentukan bentuk perpangkatan matriks *antisymmetric* dari A_6^{-2} sampai A_6^{-10}.
8. Menduga bentuk umum matriks *antisymmetric* A_6^{-n} berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif.
9. Membuktikan bahwa matriks *antisymmetric* A_6^{-n} dengan cara menggunakan aturan invers $(A_6^n)\,(A_6^{-n}) = (A_6^{-n})\,(A_6^n) = I,$
10. Mendapatkan pemrograman MATLAB bentuk perpangkatan matriks *antisymmetric* A_6^{-n} untuk n bilangan bulat negatif.
11. Mendapatkan bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus $(tr\,(A_6^n))$ untuk n bilangan bulat, dengan cara memakai definisi dari *trace* matriks.
12. Pemrograman MATLAB untuk bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* A_6^n untuk n bilangan bulat bulat.
13. Mengaplikasikan bentuk umum A_6^n dalam bentuk contoh soal dan algoritma, untuk $n = 3, 5, 6,$,8,9,10.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan yang didapatkan pada bab IV, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

Matriks *antisymmetric* bentuk khusus diberikan sebagai berikut:

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & a \\ -a & 0 & -a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix} \forall\, a \in R, \text{dengan } a \neq 0.$$

Maka bentuk umum perpangkatan matriks *antisymmetric* untuk bilangan bulat positif yaitu:

$$A_6^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n \left(\frac{1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^{n+1}}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n \left(\frac{1+2^n}{3}\right) \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n \left(\frac{1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n \left(\frac{1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^{n+1}}{3}\right) & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n \left(\frac{1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n \left(\frac{1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^{n+1}}{3}\right) \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^{n+1}}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n \left(\frac{1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n \left(\frac{1+2^n}{3}\right) & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^{n+1}}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n \left(\frac{1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n \left(\frac{1+2^n}{3}\right) \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n \left(\frac{1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^{n+1}}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}} a^n \left(\frac{1+2^n}{3}\right) & 0 \end{bmatrix}. & n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{1+2^{n+1}}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n-2}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^n}{3}\right) & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{1+2^{n+1}}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n-2}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^n}{3}\right) \\ (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{1+2^{n+1}}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^n}{3}\right) & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{1+2^{n+1}}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^n}{3}\right) \\ (-1)^{\frac{n-2}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{1+2^{n+1}}{3}\right) & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n-2}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{-1+2^n}{3}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}} a^n \left(\frac{1+2^{n+1}}{3}\right) \end{bmatrix}. & n \text{ genap} \end{cases},$$

dan bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* untuk bilangan bulat positif yaitu:

$$tr(A_6^n) = \begin{cases} 0 & ;\text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(-1)^{\frac{n}{2}}a^n + 2^{n+2}(-1)^{\frac{n}{2}}a^n & ;\text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}.$$

Selanjutnya bentuk umum perpangkatan matriks *antisymmetric* untuk bilangan bulat negatif yaitu:

$$A_6^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{1+2^n}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2^{n-1}-1}{3}\right)}{2^{n-1}a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{1+2^n}{3}\right)}{2^n a^n} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1+2^n}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{1+2^n}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2^{n-1}-1}{3}\right)}{2^{n-1}a^n} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1+2^n}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{1+2^n}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2^{n-1}-1}{3}\right)}{2^{n-1}a^n} \\ \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{2^{n-1}-1}{3}\right)}{2^{n-1}a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1+2^n}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{1+2^n}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{2^{n-1}-1}{3}\right)}{2^{n-1}a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1+2^n}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{1+2^n}{3}\right)}{2^n a^n} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1+2^n}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{2^{n-1}}{3}\right)}{2^{n-1}a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1+2^n}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 \end{bmatrix}, n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+2^{n-1}}{3}\right)}{2^{n-1}a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{2^n-1}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{2^n-1}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+2^{n-1}}{3}\right)}{2^{n-1}a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{2^n-1}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{2^n-1}{3}\right)}{2^n a^n} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{2^n-1}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+2^{n-1}}{3}\right)}{2^{n-1}a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{2^n-1}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{2^n-1}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+2^{n-1}}{3}\right)}{2^{n-1}a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{2^n-1}{3}\right)}{2^n a^n} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{2^n-1}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{2^n-1}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+2^{n-1}}{3}\right)}{2^{n-1}a^n} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{2^n-1}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{2^n-1}{3}\right)}{2^n a^n} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+2^{n-1}}{3}\right)}{2^{n-1}a^n} \end{bmatrix}, n \text{ genap.} \end{cases}.$$

dan bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* untuk bilangan bulat negatif yaitu:

$$tr(A_6^{-n}) = \begin{cases} 0 & ;\text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(1+2^{n-1})}{2^{n-2}a^n} & ;\text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}.$$

Terakhir terdapat juga pemrograman MATLAB bentuk umum perpangkatan dan *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat dan aplikasi dalam bentuk contoh soal.

5.2 Saran

Penelitian ini sudah membahas tentang *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus ordo *6x6* berpangkat bilangan bulat. Bagi pembaca atau peneliti selanjutnya yang tertarik dengan materi ini maka dapat menggunakan bentuk matriks berbeda atau matriks *antisymmetric yang* ordonya lebih besar.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Larson Ron dan Falvo C. David, *Elementary Linear Algebra*. New York: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2009.

[2] R. J. De, L. A. Cruz, and A. T. Paras, "*Sums Of Orthogonal, Symmetric, And Skew-Symmetric Matrices*," 2022.

[3] I. R. Olii, R. Resmawan, and L. Yahya, "*Trace* Matriks Toeplitz 2-Tridiagonal 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 15, no. 3, pp. 441–452, Sep. 2021, doi: 10.30598/barekengvol15iss3pp441-452.

[4] F. Aryani and R. Taslim, "*Trace* Matriks 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 7, no. 1, p. 1, Jan. 2021, doi: 10.24014/jsms.v7i1.12434.

[5] F. Aryani, Y. Muda, and Zukrianto, "*Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus 4 x 4 Berpangkat Bilangan Bulat," *UIN Sultan Syarif Kasim Riau ISSN*, pp. 2579–5406, Nov. 2021.

[6] C. C. Marzuki, F. Aryani, and Rahmawati, "*Trace* Matriks n×n Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 7, no. 1, p. 28, Mar. 2021, doi: 10.24014/jsms.v7i1.11561.

[7] D. Sartika, "*Trace* Matriks Kompleks Bentuk $n \times n, n \geq 3$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif," UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru, 2022.

[8] D. E. Sari, "*Trace* Matriks Hankel Bentuk Khusus Berordo Ganjil Berpangkat Bilangan Bulat Positif," UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru, 2023.

[9] R. Marpaung, "*Trace* Matriks Antisimetris 3x3 Berpangkat Bilangan Positif," UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru, 2023.

[10] Alvina, "*Trace* Matriks *Antisymmetric* Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan BulaT," UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru, 2023.

[11] M. dan M. Syarifuddin, *Aljabar Linear*. 2016.

[12] Anton Howard dan Chris Rorres, *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi*. 2004.

[13] Anton Horward and Rorres Chris, *Elementary Linear Algebra Applications Version*, 11th ed. United States America, 2013.

[14] Gentle James E., *Matrix Algebra*. New York: United States of America , 2007.

[15] R. Munir, *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung, 2010.

[16] Septia Rani, *Modul Pelatihan Pemrograman MATLAB*. Yogyakarta: HIMPASIKOM UGM, 2013.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis lahir di Dusun Bandar Rejo pada tanggal 17 juli 2002. Penulis ialah anak pertama dari Bapak Sukino dan Ibu Sabariyah, penulis memiliki 1 orang saudara laki-laki. Jenjang pendidikan yang pertama ditempuh penulis ialah SDN 112163 Tebing Lingghara pada tahun 2008 sampai dengan tahun 2014. Selanjutnya penulis melanjutkan pendidikan di Mts Negeri Kampung Baru, penulis menyelesaikan pendidikan di Mts ini selama 3 tahun dan selesai pada tahun 2017. Untuk pendidikan Sekolah Menengah Atas penulis melanjutkan nya di MAN 1 Labuhanbatu yang dimulai dari tahun 2017 sampai tahun 2020. Di tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinngi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau tepatnya di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan yang diambil ialah Jurusan matematika.

Bulan Januari 2023 penulis melaksanakn Kerja Praktek di KPP Pratama Rantauprapat dan membuat laporan kerja praktek dengan judul **"Analisis Kepemilikan NPWP dan Jumlah Pelaporan SPT Terhadap Penerimaan Pajak Penghasilan Pada Kantor KPP Pratama Rantauprapat"** yang dibimbing oleh Ibu Irma Suryani, M.Sc. dan melakukan seminar pada tanggal 13 Juni 2023. Selanjutnya penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Binamang, Kecamatan XIII Koto Kampar, Kabupaten Kampar pada bulan Juli sampai Agustus 2023.

Di tahun 2023 tepatnya di semester VII penulis mengambil mata kuliah Tugas Akhir dengan judul yang diambil **"*Trace* Matriks *Antisymmetric* Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat"**. Dengan dosen pembimbing yaitu Ibu Fitri Aryani, M.Sc. Selanjutnya penulis melaksanakan Seminar Proposal pada tanggal 14 Desember 2023, dengan dosen pengujinya Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc. dan Ibu Rahmawati, M.Sc.