TRACE MATRIKS *CENTROSYMMETRIC* BENTUK KHUSUS ORDO $n \times n$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

ROSYDIANA RAHMATULLAH
12050423624

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2024

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS *CENTROSYMMETRIC* BENTUK KHUSUS ORDO $n \times n$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

oleh:

ROSYDIANA RAHMATULLAH
12050423624

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir di Pekanbaru, pada tanggal 11 Juni 2024

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIP. 19770913 200604 2 002

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS *CENTROSYMMETRIC* BENTUK KHUSUS ORDO $n \times n$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

oleh:

ROSYDIANA RAHMATULLAH
12050423624

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 11 Juni 2024

Pekanbaru, 11 Juni 2024
Mengesahkan,

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

KEMENTERIAN AGAMA UIN SULTAN SYARIF KASIM FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

DEWAN PENGUJI

Ketua	: **Wartono, M.Sc.**	
Sekretaris	: **Fitri Aryani, M.Sc.**	
Anggota I	: **Corry Corazon Marzuki, M.Si.**	
Anggota II	: **Rahmawati, M.Sc.**	

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 11 Juni 2024
Yang membuat pernyataan,

10000 METERAI TEMPEL 8D712ALX276[illegible]953

ROSYDIANA RAHMATULLAH
12050423624

LEMBAR PERSEMBAHAN

MOTTO:

Always Be Kind, Be Positive, Be Genuine In This Cruel World.

Your Heart Is Gold And That Rare.

Tiada lembar skripsi yang paling indah dalam lembar skripsi ini kecuali lembar persembahan, Bismillahirrahmanirrahim skripsi ini saya persembahkan:

Teruntuk cinta pertama dan panutanku, Ayahanda Hendrial

Ayah adalah pribadi yang banyak diam ketika di rumah, namun dibalik diamnya tersimpan kekuatan dan dedikasi yang luar biasa. Jika itu menyangkut impian putri kecilnya segala jerih payah dan kasih sayang akan ayah perjuangkan. Hingga saat ini, pengorbanan dan ketulusan ayah telah mampu mengantarkan putri kecilnya menjadi sarjana. Terimakasih telah mengantarkanku menggapai mimpiku, ayah.

Teruntuk pintu surgaku, Ibunda Ermawati

Penghargaan sebesar-sebesarnya kuhadiahkan untukmu bu, terima kasih karena tidak pernah menyerah atas aku, terima kasih sudah memperjuangkanku, mendukungku dan untaian doa-doa yang tiada hentinya dirimu panjatkan untukku. terima kasih telah menjadi garda terdepan untuk pendidikan terbaikku hingga mampu menjadi sarjana. Terima kasih sudah menjadi tempatku pulang, bu.

Teruntuk abang-abangku dan adikku tersayang

Terimakasih untuk abang (Arif Rahman), abang (Rusydi Ahmad) yang telah mengorbankan pendidikannya hingga mampu memperjuangkan pendidikan adikmu ini dan teruntuk adik kecilku tersayang (Rizka Shebri Ananda) terima kasih karena telah menjadi moodboster dan pendengar terbaik kakakmu ini sampai akhirnya menyelesaikan skripsi ini.

TRACE MATRIKS *CENTROSYMMETRIC* BENTUK KHUSUS ORDO $n \times n$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

ROSYDIANA RAHMATULLAH
12050423624

Tanggal Sidang : 11 Juni 2024
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Matriks *centrosymmetric* ke-n merupakan matriks yang mempunyai unsur simetri pada pertengahan matriksnya. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks *centrosymmetric* berbentuk khusus ordo ke-n berpangkat bilangan bulat positif. Untuk mendapatkan bentuk umum *trace* tersebut, terlebih dahulu dilakukan perpangkatan matriks yang dimulai dari ordo empat sampai ordo tujuh dengan perpangkatan dua sampai sepuluh. Setelah itu, akan diduga bentuk umum perpangkatan matriks *centrosymmetric* berbentuk khusus ordo ke-n berpangkat bilangan bulat positif yang kemudian akan dibuktikan menggunakan aturan induksi matematika. Selanjutnya, akan didapatkan bentuk umum *trace* matriks *centrosymmetric* berbentuk khusus ordo ke-n berpangkat bilangan bulat positif menggunakan definisi *trace* matriks. Lebih lanjut diberikan pemrograman MATLAB dari bentuk umum perpangkatan dan *trace* matriks *centrosymmetric* berbentuk khusus ordo ke-n berpangkat bilangan bulat positif. Terakhir diberikan contoh soal untuk kedua bentuk umum tersebut.

Kata Kunci : Induksi matematika, matriks *centrosymmetric*, perpangkatan matriks, *trace* matriks, pemrograman MATLAB.

TRACE MATRIKS CENTROSYMMETRIC SPECIAL FORM OF ORDER $n \times n$ STEPPED POSITIVE BULDNUMENTS

ROSYDIANA RAHMATULLAH
12050423624

Date of Final Exam : 11^{th} June 2024
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

The nth centrosymmetric matrix is a matrix that has a symmetry element in the middle of the matrix. The purpose of this study is to obtain the general form of the trace of the nth order special-shaped centrosymmetric matrix with positive integer rank. In order to obtain the general form of the trace, firstly, the matrix is divided starting from order four to order seven with a division of two to ten. After that, the general form of the nth-order centrosymmetric matrix with positive integer powers will be estimated, which will then be proven using the rules of mathematical induction. Furthermore, the general form of the trace of the special-shaped centrosymmetric matrix of order n with positive integer rank will be obtained using the definition of trace matrix. Furthermore, the MATLAB programming of the general form of the positive integer nth order special form centrosymmetric matrix trace is given. Finally, example problems for both generalized forms are given.

***Keywords** : Mathematical induction, centrosymmetric matrix, matrix expansions, trace matrix, MATLAB programming.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Alhamdulillahirobbil'alamin. Dengan penuh rasa syukur saya mengucapkan terima kasih kepada Allah *Subhanallahta'ala* atas limpahan berkat dan petunjuk-Nya sehingga penyusunan skripsi dengan judul **"*Trace* Matriks *Centrosymmetric* Bentuk khusus Ordo $n \times n$ Berpangkat Bilangan Positif"** dapat terselesaikan dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada kekasih kita yakninya Baginda Nabi Muhammad *shallallahu 'alaihi wasallam* dengan mengucapkan lafaz *Allahumma sholli ala Muhammad wa ala ali Muhammad*.

Selama proses penulisan tugas akhir ini, penulis telah banyak sekali memperoleh arahan, masukan serta saran dari berbagai sumber, baik langsung ataupun tidak langsung. Oleh karena itu, dengan penuh rasa terima kasih penulis ingin mempersembahkan penghargaan yang mendalam kepada orang tua saya tercinta, Ayahanda Hendrial dan Ibunda Ermawati yang senantiasa mendoakan dan memberikan limpahan kasih sayang yang tiada henti kepada penulis serta ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku pembimbing TA yang bersedia mendampingi dan memberikan arahan, bimbingan dengan sabar selama penulis menyelesaikan penelitian Tugas Akhir ini.

6. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si. selaku penguji 1 dan Ibu Rahmawati, M.Sc. selaku penguji 2 yang telah mengalokasikan waktu untuk menguji dan memberikan masukan dalam perbaikan penulisan Tugas Akhir ini.
7. Bapak Zukrianto, M.Si. selaku Koordinator Tugas Akhir yang telah membantu dalam memperlancar jalannya penyelesaian Tugas Akhir ini.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
9. Teman-temanku tersayang yang selalu memotivasi dan terus mendukung saya yaitu Sovi , Edel, Risa, Riri, Chania, Novi, Riska, Reta, Iffa.
10. Teman seperjuangan Tugas Akhir satu bimbingan yaitu Dina Saputri dan Qori'ah Amri yang siap sedia memberikan bantuan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
11. Rekan-rekan seperjuangan Fakultas Sains dan Teknologi khususnya Program Studi Matematika Angkatan 2020.
12. Kepada diri saya sendiri, terima kasih sudah mau bertahan sejauh ini, terimakasih sudah mau memperjuangkan masa depanmu sejauh ini dan tidak memutuskan meyerah sesulit apapun proses penyususan Tugas Akhir ini. Berbahagialah selalu dimanapun berada, diana.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan Tugas Akhir ini terdapat kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan dalam penulisan ataupun pemaparan materi. Oleh karena itu, masukan dan saran dari berbagai pihak masih sangat diharapkan untuk meningkatkan kesempurnaan Tugas Akhir ini.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Pekanbaru, 11 Juni 2024

ROSYDIANA RAHMATULLAH
12050423624

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Misalkan $A = [a_{ij}]$ merupakan matriks bujur sangkar, maka *trace* matriks A ialah jumlah dari entri-entri diagonal utama pada matriks A yang dinotasikan dengan $tr(A)$ [1]. Menentukan *trace* pada suatu matriks sebenarnya sangatlah sederhana, namun hal ini akan menjadi sulit jika dilakukan pada matriks berpangkat. Pada perhitungan *trace* matriks berpangkat kita perlu memangkatkan matriks sebanyak n kali. Hal ini akan membutuhkan waktu yang cukup lama sehingga diperlukan sebuah formula yang dapat mempermudah perhitungan *trace* matriks berpangkat tanpa harus melalui proses pemangkatan dan perkalian matriks.

Pembahasan mengenai *trace* matriks berpangkat banyak dikaji dalam bidang matematika contohnya persamaan differensial, analisis jaringan, sistem dinamik, statistik dan teori matriks [2]. Beberapa diantaranya dibahas oleh [3] tentang *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif ordo 2×2 dimana entri diagonal utamanya 0 dan diluar diagonal utama nilainya adalah $a, b \in \mathbb{R}$. Hasil pada penelitian ini didapatkan 2 bentuk umum *trace* matriks berpangkat, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ \dfrac{2}{(-1)^{\frac{n}{2}} \det(A))^{\frac{n}{2}}} & \text{, untuk } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Penelitian yang sama tentang *trace* matriks berpangkat juga dilakukan oleh [4] pada tahun 2020 menggunakan matriks berordo 3×3 dengan bentuk matriksnya $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}$. Hasil akhir yang diperoleh yaitu $tr(A)^n = 1 + (a+b)^n$ dengan n bilangan bulat positif. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh [5] membahas *trace* matriks berpangkat berordo $n \times n$ dengan hasil akhir penelitiannya adalah $tr(A_n^m) = (na)^m$.

Penelitian berikutnya dilakukan pada jenis matriks berbeda yaitu matriks simetris. Bentuk khusus yang digunakan yakni berordo 4×4 dengan entri diagonal utamanya adalah 0 dan diluar diagonal utama nilainya adalah b, untuk $b \in \mathbb{R}$ [6]. Hasil akhir dari penelitian ini terdiri atas 2 bentuk umum yaitu:

$$tr(A_4^n) = (3^n - (-3)^{n+1})b^n \quad \text{, untuk } n \text{ ganjil}$$

$$tr(A_4^{-n}) = \left((-1)^n 3^{n+1} + 1\right)3^{-n} b^{-n} \quad \text{, untuk } n \text{ genap.}$$

Selanjutnya, peneliti [7] juga melakukan penelitian menggunakan matriks yang sama dengan menggunakan ordo matriks yang diperbesar yaitu ordo 5×5 dan hasil akhir yang didapatkan juga terdiri atas 2 bentuk umum yaitu $tr(A)^n$ dan $tr(A)^{-n}$ dengan n bilangan bulat.

Tahun 2022 penelitian *trace* matriks simetris terus dikembangkan oleh [8] menggunakan matriks berordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat negatif dengan perolehan hasil penelitian sebagai berikut:

$$A_n^{-m} = [g_{i,j}] \text{ dengan } g_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m (n-1)^{m+1} + 1}{n(n-1)^m b^m}, i = j \\[2ex] \dfrac{(-1)^{m+1} (n-1)^m + 1}{n(n-1)^m b^m}, i \neq j \end{cases}$$

dan hasil akhir yang diperoleh adalah $tr(A_n)^{-m} = \dfrac{(-1)^m (n-1)^{m+1} + 1}{(n-1)^m b^m}$.

Penelitian lebih lanjut yang membahas tentang *trace* matriks berpangkat juga dilakukan oleh [9] menggunakan matriks toeplitz tridiagonal berordo $n \times n$ pangkat dua dan tiga dengan perolehan hasil akhir yaitu

$$tr(A_m^2) = 2ca(n-1) + n$$

$$tr(A_m^3) = 6ca(n-1) + n.$$

Pembahasan *trace* matriks berpangkat juga dilakukan pada matriks *antisymmetric* 3×3 pangkat positif [10] dengan bentuk matriksnya $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \forall a \neq 0$. Adapun hasil yang didapatkan pada penelitian ini adalah $tr(A_3)^n = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ -(-2)^{\frac{n+2}{2}} a^n & \text{, untuk } n \text{ genap.} \end{cases}$

Pembahasan yang mengkaji tentang *trace* matriks berpangkat terus berkembang hingga tahun 2023, salah satunya yang dilakukan [11] yaitu menentukan rumus umum *trace* matriks hankel $n \times n$ ordo ganjil dengan bentuk matriksnya adalah:

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in R, a \neq 0.$$

Hasil akhir yang diperoleh untuk bentuk umum *trace* matriksnya yaitu:

$$tr\ (A_{n+1})^{m} = \left[\left(\frac{n}{2}+1\right)a\right]^{m} + \left[\left(\frac{n}{2}\right)a\right]^{m}.$$

Berdasarkan uraian dari hasil penelitian-penelitian terdahulu yang telah dipaparkan oleh penulis, maka penulis memutuskan untuk melanjutkan penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat yang diberi judul **"*Trace* Matriks *Centrosymmetric* Bentuk Khusus Ordo $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif"** dengan bentuk khusus matriksnya adalah:

$$A_n = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in \mathbb{R},\ n \geq 4. \quad (1.1)$$

1.2 Rumusan Masalah

Perumusan permasalahan yang menjadi fokus pada penelitian ini ialah "Bagaimana menentukan bentuk umum dari *trace* matriks *centrosymmetric* ordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif sesuai dengan Persamaan (1.1)?"

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini penulis membatasi topik penelitian menggunakan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo $n \times n$ dengan $4 \leq n \leq 7$ dan hanya untuk perpangkatan bilangan bulat positif .

1.4 Tujuan Masalah

Penelitian ini bertujuan untuk menemukan bentuk umum perpangkatan matriks *centrosymmetric* ordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif dan *trace* matriksnya sesuai Persamaan (1.1) .

1.5 Manfaat Penelitian

Beberapa manfaat yang didapatkan pada Tugas Akhir ini sebagai berikut:

1. Memperdalam pemahaman dalam mengembangkan ilmu pengetahuan yang telah dipelajari terutama tentang matriks *centrosymmetric.*
2. Referensi dalam menciptakan ide-ide baru terkait matriks *centrosymmetric.*
3. Sarana informasi bagi para pembaca dan masyarakat luas.

1.6 Sistematika Penelitian

Adapun sistematika penelitian pada Tugas Akhir *trace* matriks *centrosymmetric* berpangkat bilangan bulat positif terdiri atas:

BAB I PENDAHULUAN

Bab I menguraikan gambaran umum dari penelitian tugas akhir yang terdiri atas penelitian terdahulu terkait *trace* matriks, perumusan masalah, kemudian batasan masalah yang digunakan, tujuan dilakukan penelitian, manfaat dari penelitian serta menjelaskan bagaimana sistematika yang dilakukan untuk membuat laporan penelitian ini.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab II memaparkan dasar teoritis yang dipakai dalam menyelesaikan penelitian, seperti perkalian antar matriks, perpangkatan matriks, definisi *trace* matriks, pembuktian dengan aturan induksi matematika serta penggunaan algoritma matlab sebagai acuan dalam menyelesaikan penelitian ini.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab III memuat tahapan penelitian yang akan peneliti lakukan untuk memperoleh rumus umum *trace* matriks *centrosymmetric* berpangkat bilangan bulat positif.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab IV berisi penjelasan bagaimana memperoleh bentuk umum perpangkatan matriks *centrosymmetric* berpangkat bilangan bulat positif dan *trace* matriksnya seperti yang dipaparkan di rumusan masalah.

BAB V PENUTUP

Bab V membahas mengenai kesimpulan yang didapatkan dari hasil pembahasan serta saran peneliti untuk para pembaca maupun peneliti selanjutnya.

BAB II
LANDASAN TEORI

Bab II memaparkan dasar-dasar teoritis yang akan digunakan dalam menyelesaikan topik permasalahan yang akan dibahas di bab berikutnya.

2.1 Matriks *Centrosymmetric*

Definisi 2.1 [12] Matriks *centosymmetric* merupakan salah satu matriks yang mempunyai struktur simetri pada pertengahan matriks.

Diberikan $A=(a_{ij})_{nxn} \in R^{nxn}$ adalah matriks *centrosymmetric* jika

$a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}$, $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$ atau dapat ditulis dengan:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in R. \qquad (2.1)$$

Definisi 2.2 [13] Diberikan $A \in M_n(\mathbb{R})$. Rotasi dari matriks A dilambangkan dengan A^R yang didefinisikan sebagai:

$$. A^R = J_n A J_n. \qquad (2.2)$$

Dimana matriks A adalah matriks berorde $n \times n$ dan J_n adalah matriks *contra identitas* atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan definisi diketahui bahwa suatu matriks dikatakan matriks *centrosymmetric* jika hasil kali matriks *contra identitas* dengan matriks A, dikalikan dengan matriks *contra Identitas* menghasilkan matriks A itu sendiri.

Definisi 2.3 [13] Diberikan matriks S yang berorde $n \times n$. Matriks S dinamakan matriks *centrosymmetric* jika memenuhi $S^R = S$.

Lema 2.1[13].

i. Jika $S = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ maka S merupakan matriks *centrosymmetric*.

ii. Jika $S = \begin{bmatrix} a & c & b \\ d & e & d \\ b & c & a \end{bmatrix}$ maka S merupakan matriks *centrosymmetric*.

Matriks *centrosymmetric* yang memiliki ordo $n \geq 4$ dibagi 2 yaitu untuk n genap dan n ganjil. Untuk n genap yaitu $n = 2m$ maka misalkan S berbentuk matriks blok sebagai berikut:

$$S = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix},$$

dengan $A, B, C,$ dan D merupakan matriks blok berorde m. Maka matriks S harus memenuhi $S^R = S$ sehingga

$$J_n S J_n = S$$

$$\begin{bmatrix} 0_m & J_m \\ J_m & 0_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_m & J_m \\ J_m & 0_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_m D J_m & J_m B J_m \\ J_m C J_m & J_m A J_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan bentuk terakhir maka diperoleh yaitu $C = J_m B J_m$ dan $D = J_m A J_m$ Hasil ini diperlihatkan pada Lema berikut.

Lema 2.2 [13] Jika S merupakan matriks *centrosymmetric* berorde n genap yaitu $n = 2m$ maka S dapat dituliskan dalam bentuk matriks blok sebagai berikut $S = \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix}$, dengan A dan B merupakan matriks persegi berorde m.

Selanjutnya, untuk matriks persegi berorde n ganjil yaitu $2m + 1$ maka misalkan S berbentuk blok sebagai berikut:

$$S = \begin{bmatrix} A & p & C \\ q^\tau & \alpha & r^\tau \\ B & s & D \end{bmatrix},$$

dengan A, B, C, D ialah matriks persegi berorde m, vektor $p, q, r, s \in R^m$ dan $\alpha \in R$. Matriks S harus memenuhi $S^R = S$ sehingga

$$J_n S J_n = S$$

$$\begin{bmatrix} O_m & 0 & J_m \\ 0^\tau & 1 & 0^\tau \\ J_m & 0 & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & p & C \\ q^\tau & \alpha & r^\tau \\ B & s & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_m & 0 & J_m \\ 0^\tau & 1 & 0^\tau \\ J_m & 0 & O_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & p & C \\ q^\tau & \alpha & r^\tau \\ B & s & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_m D J_m & J_m s & J_m B J_m \\ r^\tau J_m & \alpha & q^\tau J_m \\ J_m C J_m & J_m p & J_m A J_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & p & C \\ q^\tau & \alpha & r^\tau \\ B & s & D \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan bentuk terakhir diperoleh persamaan:

a) $J_m D J_m = A$ dan $D = J_m A J_m$.
b) $J_m s = p$ dan $J_m p = s$.
c) $r^\tau J_m = q^\tau$ dan $r^\tau = q^\tau J_m$.
d) $J_m C J_m = B$ dan $C = J_m B J_m$.

Sehingga dari hasil ini dapat dibentuk lema sebagai berikut.

Lema 2.3 [13] Jika S adalah matriks *centrosymmetric* berorde n ganjil yaitu $n = 2m + 1$ maka S dapat ditulis dalam bentuk blok sebagai berikut:

$$S = \begin{bmatrix} A & p & J_m B J_m \\ q^\tau & \alpha & r^\tau \\ B & J_m p & J_m B J_m \end{bmatrix},$$

dengan A, B merupakan matriks persegi berorde m, vektor $p, q \in R^m$ dan $\alpha \in R$.

Contoh 2.1 Tunjukkan bahwa matriks
$$A_n = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$
adalah matriks *centrosymmetric*.

Penyelesaian:

Berdasarkan Definisi 2.1 akan ditunjukkan bahwa A_n merupakan matriks *centrosymmetric* berordo $n \times n$ yang memenuhi Persamaan (2.1) sebagai berikut:

$a_{11} = a_{n-1+1,n-1+1} = a_{nn}$ $a_{12} = a_{n-1+1,n-2+1} = a_{n,n-1}$ $a_{13} = a_{n-1+1,n-3+1} = a_{n,n-2}$ $a_{14} = a_{n-1+1,n-4+1} = a_{n,n-3}$ $a_{15} = a_{n-1+1,n-5+1} = a_{n,n-4}$ $\vdots$ $a_{1,n-4} = a_{n-1+1,n-(n-4)+1} = a_{n,5}$ $a_{1,n-3} = a_{n-1+1,n-(n-3)+1} = a_{n,4}$ $a_{1,n-2} = a_{n-1+1,n-(n-2)+1} = a_{n,3}$ $a_{1,n-1} = a_{n-1+1,n-(n-1)+1} = a_{n,2}$ $a_{1,n} = a_{n-1+1,n-n+1} = a_{n,1}$	$a_{21} = a_{n-2+1,n-1+1} = a_{n-1,n}$ $a_{22} = a_{n-2+1,n-2+1} = a_{n-1,n-1}$ $a_{23} = a_{n-2+1,n-3+1} = a_{n-1,n-2}$ $a_{24} = a_{n-2+1,n-4+1} = a_{n-1,n-3}$ $a_{25} = a_{n-2+1,n-5+1} = a_{n-1,n-4}$ $\vdots$ $a_{2,n-4} = a_{n-2+1,n-(n-4)+1} = a_{n-1,5}$ $a_{2,n-3} = a_{n-2+1,n-(n-3)+1} = a_{n-1,4}$ $a_{2,n-2} = a_{n-2+1,n-(n-2)+1} = a_{n-1,3}$ $a_{2,n-1} = a_{n-2+1,n-(n-1)+1} = a_{n-1,2}$ $a_{2,n} = a_{n-2+1,n-n+1} = a_{n-1,1}$
$a_{31} = a_{n-3+1,n-1+1} = a_{n-2,n}$ $a_{32} = a_{n-3+1,n-2+1} = a_{n-2,n-1}$ $a_{33} = a_{n-3+1,n-3+1} = a_{n-2,n-2}$ $a_{34} = a_{n-3+1,n-4+1} = a_{n-2,n-3}$ $a_{35} = a_{n-3+1,n-5+1} = a_{n-2,n-4}$ $\vdots$ $a_{3,n-4} = a_{n-3+1,n-(n-4)+1} = a_{n-2,5}$ $a_{3,n-3} = a_{n-3+1,n-(n-3)+1} = a_{n-2,4}$ $a_{3,n-2} = a_{n-3+1,n-(n-2)+1} = a_{n-2,3}$ $a_{3,n-1} = a_{n-3+1,n-(n-1)+1} = a_{n-2,2}$ $a_{3,n} = a_{n-3+1,n-n+1} = a_{n-2,1}$	$a_{41} = a_{n-4+1,n-1+1} = a_{n-3,n}$ $a_{42} = a_{n-4+1,n-2+1} = a_{n-3,n-1}$ $a_{43} = a_{n-4+1,n-3+1} = a_{n-3,n-2}$ $a_{44} = a_{n-4+1,n-4+1} = a_{n-3,n-3}$ $a_{45} = a_{n-4+1,n-5+1} = a_{n-3,n-4}$ $\vdots$ $a_{4,n-4} = a_{n-4+1,n-(n-4)+1} = a_{n-3,5}$ $a_{4,n-3} = a_{n-4+1,n-(n-3)+1} = a_{n-3,4}$ $a_{4,n-2} = a_{n-4+1,n-(n-2)+1} = a_{n-3,3}$ $a_{4,n-1} = a_{n-4+1,n-(n-1)+1} = a_{n-3,2}$ $a_{4,n} = a_{n-4+1,n-n+1} = a_{n-3,1}$
$a_{51} = a_{n-5+1,n-1+1} = a_{n-4,n}$ $a_{52} = a_{n-5+1,n-2+1} = a_{n-4,n-1}$ $a_{53} = a_{n-5+1,n-3+1} = a_{n-4,n-2}$ $a_{54} = a_{n-5+1,n-4+1} = a_{n-4,n-3}$ $a_{55} = a_{n-5+1,n-5+1} = a_{n-4,n-4}$ $\vdots$	$a_{5,n-4} = a_{n-5+1,n-(n-4)+1} = a_{n-4,5}$ $a_{5,n-3} = a_{n-5+1,n-(n-3)+1} = a_{n-4,4}$ $a_{5,n-2} = a_{n-5+1,n-(n-2)+1} = a_{n-4,3}$ $a_{5,n-1} = a_{n-5+1,n-(n-1)+1} = a_{n-4,2}$ $a_{5,n} = a_{n-5+1,n-n+1} = a_{n-4,1}$

Berdasarkan hasil yang didapatkan maka terbukti bahwa A_n adalah matriks *centrosymmetric*. ∎

2.2 Perkalian Matriks

2.2.1 Perkalian matriks dengan skalar

Definisi 2.4 [14] Hasil kali $A = \left[a_{ij}\right]$ matriks ukuran $m \times n$ dengan skalar k ditulis kA atau Ak berukuran $m \times n$ yang didapatkan dengan mengalikan tiap unsur dalam A dengan k.

$$kA = \left[ka_{ij}\right] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Contoh 2.2 Jika diketahui matriks $Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ dan $k = 2$ maka perkalian matriks dengan skalar yaitu:

$$2Y = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 8 & 10 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & 14 & 8 \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Perkalian matriks dengan matriks

Definisi 2.5 [14] Misal $A = \left[a_{ij}\right]$ berukuran $m \times n$ dan $B = \left[b_{jk}\right]$ berukuran $r \times p$. Hasil perkalian dari AB didefinisikan hanya untuk $r = n$ dan AB adalah matriks $C = [c_{jk}]$ yang berukuran $m \times p$ dengan unsur c_{jk} adalah:

$$c_{jk} = \sum_{m=1}^{n} a_{jm} b_{mk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \ldots + a_{jn}b_{nk}. \tag{2.4}$$

Contoh 2.3 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, maka tentukanlah perkalian matriks AB?

Penyelesaian:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

2.3 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.6 [15] Jika A merupakan matriks bujur sangkar, maka akan didapatkan definisi dari pangkat integer tak negatif A sebagai berikut:

$$A^0 = I, A^m = \underbrace{AA...A}_{m\ faktor} m > 0). \tag{2.5}$$

Kemudian jika A dibalik, maka definisi dari pangkat integer negatif dari A yaitu:

$$A^{-m} = (A^{-1})^m = \underbrace{A^{-1}A^{-1}...A^{-1}}_{m\ faktor}. \tag{2.6}$$

Contoh 2.4 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, tentukan hasil dari A^2?

Penyelesaian:

Diketahui bahwa $A^2 = A \cdot A$.

Sehingga

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -48 & -27 & 78 \\ 167 & 73 & 30 \\ 48 & 84 & -24 \end{bmatrix}.$$

2.4 Induksi Matematika

Definisi 2.7 [16] Misal $p(n)$ adalah suatu pernyataan bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Adapun tahapan untuk membuktikan pernyataan ini adalah:

1. Ditunjukkan $p\ (1)$ benar.
2. Diasumsikan $p\ (n)$ benar, maka $p\ (n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$. Sehingga $p\ (n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Jika tahapan ke-1 dan ke-2 terbukti benar maka dapat diambil kesimpulan bahwa pernyataan $p(\ n\ )$ terbukti benar untuk setiap bilangan bulat positif n. Pada tahapan ke-1 dinamakan basis induksi sedangkan untuk tahapan ke-2 dinamakan langkah induksi.

Contoh 2.5 Diberikan $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$, dengan $a \in R, a \neq 0$. Maka akan diperoleh bentuk umum perpangkatannya sebagai berikut:

$$A_3^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -(-2)^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 \\ (-2)^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 & -(-2)^{\frac{n-1}{2}} a^n \\ 0 & (-2)^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 \end{bmatrix}, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} -(-2)^{\frac{n-2}{2}} a^n & 0 & (-2)^{\frac{n-2}{2}} a^n \\ 0 & (-2)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 \\ (-2)^{\frac{n-2}{2}} a^n & 0 & -(-2)^{\frac{n-2}{2}} a^n \end{bmatrix}, & \text{untuk } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Berikut akan dilakukan pembuktian menggunakan aturan induksi matematika dengan n adalah bilangan ganjil sebagai berikut:

Bukti:

1. Basis induksi yaitu akan dilakukan pembuktian bahwa $p\ (1)$ benar:

$$p(1):(A_3)=\begin{bmatrix} 0 & -(-2)^{\frac{1-1}{2}}a^1 & 0 \\ (-2)^{\frac{1-1}{2}}a^1 & 0 & -(-2)^{\frac{1-1}{2}}a^1 \\ 0 & (-2)^{\frac{1-1}{2}}a^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -(-2)^0 a^1 & 0 \\ (-2)^0 a^1 & 0 & -(-2)^0 a^1 \\ 0 & (-2)^0 a^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan matriks yang diberikan maka $p(\ 1\ )$terbukti benar. ■

2. Asumsikan $p\ (k)$ benar

$$p(k):(A_3)^k=\begin{bmatrix} 0 & -(-2)^{\frac{k-1}{2}}a^k & 0 \\ (-2)^{\frac{k-1}{2}}a^k & 0 & -(-2)^{\frac{k-1}{2}}a^k \\ 0 & (-2)^{\frac{k-1}{2}}a^k & 0 \end{bmatrix} \forall a \in R, a \neq 0.$$

Maka akan ditunjukkan $p(k+2)$ juga terbukti benar yakni:

$$p(k+2):(A_3)^{k+2}=\begin{bmatrix} 0 & -(-2)^{\frac{k+2-1}{2}}a^{k+2} & 0 \\ (-2)^{\frac{k+2-1}{2}}a^{k+2} & 0 & -(-2)^{\frac{k+2-1}{2}}a^{k+2} \\ 0 & (-2)^{\frac{k+2-1}{2}}a^{k+2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -(-2)^{\frac{k+1}{2}}a^{k+2} & 0 \\ (-2)^{\frac{k+1}{2}}a^{k+2} & 0 & -(-2)^{\frac{k+1}{2}}a^{k+2} \\ 0 & (-2)^{\frac{k+1}{2}}a^{k+2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Pembuktian:

$$(A_3)^{k+2} = (A_3)^k (A_3)^2$$

$$(A_3)^{k+2} = \begin{bmatrix} 0 & (-2)^{\frac{k-1}{2}} a^k & 0 \\ (-2)^{\frac{k-1}{2}} a^k & 0 & (-2)^{\frac{k-1}{2}} a^k \\ 0 & (-2)^{\frac{k-1}{2}} a^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & -a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -(-2)(-2)^{\frac{k-1}{2}} a^{k+2} & 0 \\ (-2)(-2)^{\frac{k-1}{2}} a^{k+2} & 0 & -(-2)(-2)^{\frac{k-1}{2}} a^{k+2} \\ 0 & (-2)(-2)^{\frac{k-1}{2}} a^{k+2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -(-2)^{\frac{k-1}{2}+1} a^{k+2} & 0 \\ (-2)^{\frac{k-1}{2}+1} a^{k+2} & 0 & -(-2)^{\frac{k-1}{2}+1} a^{k+2} \\ 0 & (-2)^{\frac{k-1}{2}+1} a^{k+2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -(-2)^{\frac{k+1}{2}} a^{k+2} & 0 \\ (-2)^{\frac{k+1}{2}} a^{k+2} & 0 & -(-2)^{\frac{k+1}{2}} a^{k+2} \\ 0 & (-2)^{\frac{k+1}{2}} a^{k+2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan pembuktian di atas dapat diambil kesimpulan bahwa bentuk umum perpangkatan matriks $(A_3)^n$ dengan n berpangkat ganjil terbukti benar. ■

Selanjutnya untuk n genap dapat dikerjakan dengan pembuktian yang sama seperti di atas.

2.5 *Trace* Matriks

Definisi 2.8 [15] Jika matriks A merupakan matriks bujur sangkar, maka *trace* A dinyatakan dengan " $tr(A)$ ", yang didefinisikan sebagai penjumlahan elemen pada diagonal utama matriks A. Namun jika matriks A bukan matriks bujur sangkar, maka *trace* dari A tidak bisa didefinisikan. Diberikan matriks A sebagai berikut, maka akan diperoleh $tr(A)$:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{2.7}$$

Contoh 2.6 Jika terdapat dua buah matriks $A = \begin{bmatrix} -2 & 40 & -11 \\ 35 & 18 & 13 \\ -3 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ dan

$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & -1 & 9 \\ -3 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$, maka tentukanlah $tr(A)$ dan $tr(B)$!

Penyelesaian:

$tr(A) = -2 + 18 + 10 = 26.$

$tr(B) = 2 + 8 + 5 + 2 = 17.$

Teorema 2.1 [17] Jika diberikan matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ yang merupakan matriks kuadrat n dan k ialah suatu skalar, maka akan berlaku sifat-sifat berikut:

i. $tr(A) = tr(A^T)$,

ii. $tr(cA) = c.tr(A)$,

iii. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$,

iv. $tr(AB) = tr(BA)$.

Bukti:

1. Akan dilakukan pembuktian bahwa $tr(A) = tr(A^T)$. Misal diambil sembarang matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

maka akan diperoleh transpose dari matriks A sebagai berikut:

$$tr(A^T) = trA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22} + ...a_{nn}.$$

Jadi terbukti bahwa $tr(A) = tr(A^T)$. ■

2. Akan dibuktikan bahwa $tr(cA) = c.tr(A)$. Misal diambil sembarang c skalar kemudian dikalikan dengan matriks A sebagai berikut:

$$cA = cA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{bmatrix}.$$

Maka trace matriks cA yaitu:

$$tr(cA) = ca_{11} + ca_{22} + ... + c_{nn} = c(a_{11} + a_{22} + ... + c_{nn}).$$

Jadi terbukti bahwa $tr(cA) = c.tr(A)$. ■

3. Akan dibuktikan $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$, misal akan diambil sembarang

matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$ maka

$$tr(A+B) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

$$= tr \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + ... + (a_{nn} + b_{nn})$$

$$= tr\ (A) + tr\ (B).$$ ■

4. Akan dibuktikan $tr(AB) = tr(BA)$ sehingga akan diperoleh:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \ldots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \ldots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \ldots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \ldots + a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \ldots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Maka *trace* matriks AB yang diperoleh:

$$tr(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{2n}b_{n2}) + \ldots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \ldots + a_{nn}b_{nn}).$$

Untuk matriks BA diperoleh sebagai berikut:

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \ldots + b_{1n}a_{n1} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \ldots + b_{1n}a_{n2} & \cdots & b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \ldots + b_{1n}a_{nn} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \ldots + b_{2n}a_{n1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \ldots + b_{2n}a_{n2} & \cdots & b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \ldots + b_{2n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11} + b_{n2}a_{21} + \ldots + b_{nn}a_{n1} & b_{n1}a_{12} + b_{n2}a_{22} + \ldots + b_{nn}a_{n2} & \cdots & b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \ldots + b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Maka *trace* matriks BA adalah

$$tr(AB) = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \ldots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \ldots + b_{2n}a_{n2}) + \ldots + (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \ldots + b_{nn}a_{nn}).$$

Sehingga terbukti bahwa $tr(AB) = tr(BA)$. ∎

2.6 *Trace* Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Salah satu kajian tentang *trace* matriks berpangkat juga diteliti oleh [18] untuk memperoleh bentuk umum *trace* matriks simetris, adapun uraian langkah-langkahnya yaitu:

a. Diberikan sebuah matriks simetris bentuk khusus ordo 3×3 dengan bentuk matriksnya yaitu: $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}$, dengan $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

b. Melakukan pendugaan bentuk umum matriks $(A_3)^n$

Langkah awal dalam melakukan pendugaan bentuk umum yaitu dengan memangkatkan matriks (A_3) sampai $(A_3)^{10}$ dan kemudian akan dilakukan pendugaan bentuk umum $(A_3)^n$ yang dinyatakan pada teorema berikut :

Teorema 2.2 Diberikan $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}$, dengan $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ maka diperoleh:

$$(A_3)^n = \begin{bmatrix} \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n \end{bmatrix}.$$

c. Membuktikan bentuk umum $(A_3)^n$ menggunakan pembuktian induksi matematika.

Pembuktian:

Tahapan awal, akan dibuktikan bentuk umum dari $(A_3)^n$. Misalkan

$$p(n): A_3^n = \begin{bmatrix} \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n \end{bmatrix}.$$

1. Akan dibuktikan bahwa $p\ (1)$ bernilai benar:

$$p(1):(A_3)=\begin{bmatrix} \frac{2^1-(-1)^{1+1}2}{3}b^1 & \frac{2^1+(-1)^{1+1}}{3}b^1 & \frac{2^1+(-1)^{1+1}}{3}b^1 \\ \frac{2^1+(-1)^{1+1}}{3}b^1 & \frac{2^1-(-1)^{1+1}2}{3}b^1 & \frac{2^1+(-1)^{1+1}}{3}b^1 \\ \frac{2^1+(-1)^{1+1}}{3}b^1 & \frac{2^1+(-1)^{1+1}}{3}b^1 & \frac{2^1-(-1)^{1+1}2}{3}b^1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga terbukti bahwa nilai $p\ (1)$ benar. ■

2. Akan diasumsikan untuk $p\ (k)$ bernilai benar, yakni:

$$p(k):(A_3)^k=\begin{bmatrix} \frac{2^k-(-1)^{k+1}2}{3}b^k & \frac{2^k+(-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k+(-1)^{k+1}}{3}b^k \\ \frac{2^k+(-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k-(-1)^{k+1}2}{3}b^k & \frac{2^k+(-1)^{k+1}}{3}b^k \\ \frac{2^k+(-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k+(-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k-(-1)^{k+1}2}{3}b^k \end{bmatrix}.$$

Kemudian akan ditunjukkan $p(k+1)$ juga bernilai benar, yakni:

$$p(k+1):(A_3)^{k+1}=\begin{bmatrix} \frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1+1}2}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+1+1}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+1+1}}{3}b^{k+1} \\ \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+1+1}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1+1}2}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+1+1}}{3}b^{k+1} \\ \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+1+1}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+1+1}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1+1}2}{3}b^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2^{k+1}-(-1)^{k+2}2}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} \\ \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}-(-1)^{k+2}2}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+21}}{3}b^{k+1} \\ \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}-(-1)^{k+2}2}{3}b^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Bukti:

$$A_3^{k+1}=(A_3)^k(A_3)^1$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2^k-(-1)^{k+1}2}{3}b^k & \frac{2^k+(-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k+(-1)^{k+1}}{3}b^k \\ \frac{2^k+(-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k-(-1)^{k+1}2}{3}b^k & \frac{2^k+(-1)^{k+1}}{3}b^k \\ \frac{2^k+(-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k+(-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k-(-1)^{k+1}2}{3}b^k \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1+1}2}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+1+1}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+1+1}}{3}b^{k+1} \\ \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+1+1}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1+1}2}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+1+1}}{3}b^{k+1} \\ \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+1+1}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+1+1}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1+1}2}{3}b^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2^{k+1}-(-1)^{k+2}2}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} \\ \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}-(-1)^{k+2}2}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+21}}{3}b^{k+1} \\ \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}+(-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1}-(-1)^{k+2}2}{3}b^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan langkah ke- 1 dan 2 dapat disimpulkan bahwa bentuk umum $(A_3)^n$ terbukti benar. ∎

d. Menentukan bentuk umum $tr(A_3)^n$

Berdasarkan Definisi 2.8 akan diperoleh bentuk umum dari $tr(A_3)^n$ dalam teorema berikut:

Teorema 2.3 Diberikan matriks $A_3=\begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}$, dengan $b\in\mathbb{R}, b\neq 0$ maka diperoleh:

$tr(A_3^n)=3\frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n$,untuk n bilangan bulat positif.

Bukti:

Akan dibuktikan bentuk umum dari $tr(A_3)^n$ menggunakan definisi *trace* matriks.

$$tr(A_3^n)=tr\begin{bmatrix} \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2^n - (-1)^{n+1}2}{3} b^n + \frac{2^n - (-1)^{n+1}2}{3} b^n + \frac{2^n - (-1)^{n+1}2}{3} b^n$$

$$= 3\left(\frac{2^n - (-1)^{n+1}2}{3} b^n \right).$$

Sehingga $tr(A_3^n) = 3\dfrac{2^n - (-1)^{n+1}2}{3} b^n$ terbukti benar. ■

e. Mengaplikasian bentuk umum $(A_3)^n$ dan $tr(A_3)^n$

Contoh 2.8 Diberikan $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ dan tentukan nilai dari $(A_3)^5$ dan $tr(A_3)^5$!

Penyelesaian:

$$(A_3)^5 = \begin{bmatrix} \frac{2^5 - (-1)^{5+1}2}{3} 4^5 & \frac{2^5 + (-1)^{5+1}}{3} 4^5 & \frac{2^5 + (-1)^{5+1}}{3} 4^5 \\ \frac{2^5 + (-1)^{5+1}}{3} 4^5 & \frac{2^5 - (-1)^{5+1}2}{3} 4^5 & \frac{2^5 + (-1)^{5+1}}{3} 4^5 \\ \frac{2^5 + (-1)^{5+1}}{3} 4^5 & \frac{2^5 + (-1)^{5+1}}{3} 4^5 & \frac{2^5 - (-1)^{5+1}2}{3} 4^5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{32-2}{3} 1.024 & \frac{32+1}{3} 1.024 & \frac{32+1}{3} 1.024 \\ \frac{32+1}{3} 1.024 & \frac{32-2}{3} 1.024 & \frac{32+1}{3} 1.024 \\ \frac{32+1}{3} 1.024 & \frac{32+1}{3} 1.024 & \frac{32-2}{3} 1.024 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10.240 & 11.264 & 11.264 \\ 11.264 & 10.240 & 11.264 \\ 11.264 & 11.264 & 10.240 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Teorema 2.2 maka:

$$tr\ (A_3^5) = 3\frac{2^5 - (-1)^{5+1}2}{3} 4^5$$

$$= \frac{32-2}{3} 1024$$

$$= 30.720.$$

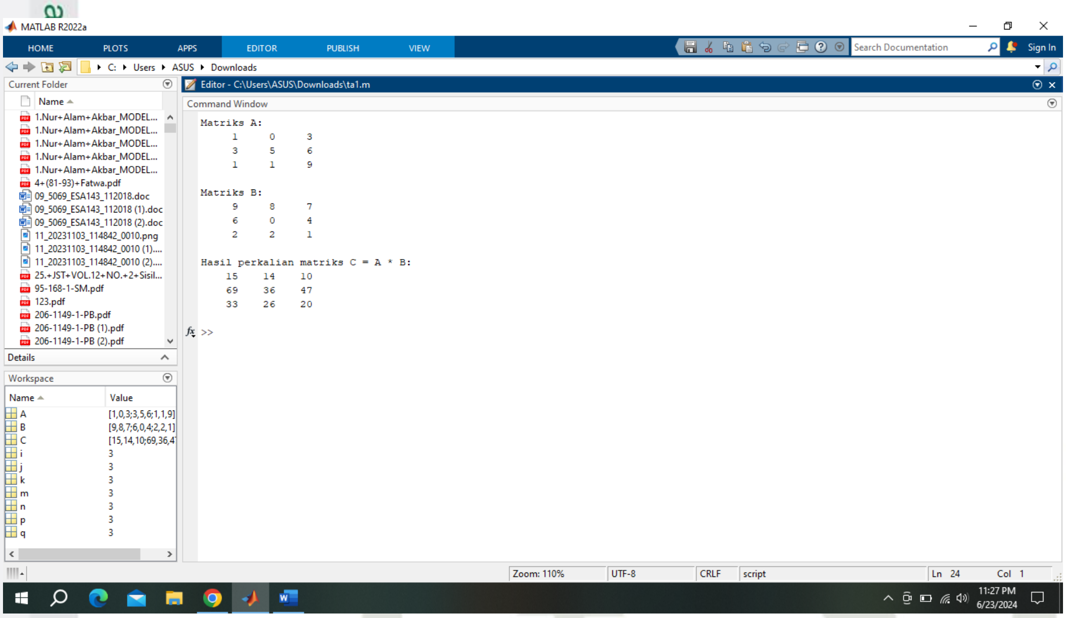
2.7 Pemrograman MATLAB

Perkembangan teknologi komputer saat ini telah memberikan berbagai kemudahan di berbagai bidang, salah satunya dalam bidang matematika. Penggunaan komputer dapat membantu meningkatkan efisiensi dan keakuratan dalam perhitungannya, contohnya pada penyelesaian perhitungan matriks menggunakan pemrograman MATLAB. MATLAB merupakan suatu program untuk analisis dan komputasi numerik, sebuah bahasa pemograman matematika lanjutan yang dibentuk atas dasar pemikiran menggunakan sifat dan bentuk matriks [19].

Contoh 2.9 Diberikan pemrograman MATLAB untuk perkalian matriks sebagai berikut.

```
clc
clear all
A = [1 0 3; 3 5 6; 1 1 9];
B = [9 8 7; 6 0 4; 2 2 1];
[m, n] = size(A);
[p, q] = size(B);
if n ~= p
    error('Jumlah kolom matriks A harus sama dengan jumlah baris matriks B');
end
C = zeros(m, q);
for i = 1:m
    for j = 1:q
        for k = 1:n
            C(i,j) = C(i,j) + A(i,k) * B(k,j);
        end
    end
end
disp('Matriks A:');
disp(A);
disp('Matriks B:');
disp(B);
disp('Hasil perkalian matriks C = A * B:');
disp(C);
```

Hasil yang diperoleh yaitu:



BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dapat diperhatikan pada hasil penelitian di bab sebelumnya bahwa bentuk umum perpangkatan matriks *centrosymmetric* $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

$$A_n^m = \begin{cases} \begin{bmatrix} a^m & \frac{m-1}{2}a^m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{m+1}{2}a^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^m & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^m & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m+1}{2}a^m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{m-1}{2}a^m & a^m \end{bmatrix} & \text{,untuk } m \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^m & \frac{m}{2}a^m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{m}{2}a^m & 0 \\ 0 & a^m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^m & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^m & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a^m & 0 \\ 0 & \frac{m}{2}a^m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{m}{2}a^m & a^m \end{bmatrix} & \text{,untuk } m \text{ genap.} \end{cases}$$

Kemudian bentuk umum dari *trace* matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

$$tr(A_n^m) = \begin{cases} 3a^m & \text{, untuk } n \text{ ganjil dan } m \text{ ganjil} \\ 2a^m & \text{, untuk } n \text{ genap dan } m \text{ ganjil} \\ na^m & \text{, untuk } m \text{ genap.} \end{cases}$$

5.2 Saran

Penelitian ini mengkaji tentang langkah-langkah dalam menentukan bentuk umum dari *trace* matriks *centrosymmetric* $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif. Peneliti selanjutnya yang berminat memperluas topik penelitian ini menggunakan matriks *centrosymmetric* disarankan untuk menggunakan bilangan bulat berpangkat negatif.

DAFTAR PUSTAKA

[1] A. Howard and C. Rorres, *Aljabar Linier Elementer versi Aplikasi, Ed. ke-8, jilid*, vol. 2, 2004.

[2] C. Brezinski, P. Fika, and M. Mitrouli, "Estimations of the trace of powers of positive self-adjoint operators by extrapolation of the moments," *Electron. Trans. Numer. Anal.*, vol. 39, pp. 144–155, 2012.

[3] F. Aryani and Y. Yulianis, "*Trace* Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 4, no. 2, pp. 105–113, 2018.

[4] F. Aryani, R. Andesta, and C. C. Marzuki, "*Trace* Matriks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 1, pp. 40–49, 2020.

[5] C. C. Marzuki, F. Aryani, and R. Rahmawati, "*Trace* Matriks $n \times n$ Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 7, no. 1, pp. 28–37.

[6] F. Aryani *et al.*, "*Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat," *UIN Sultan Syarif Kasim Riau ISSN*, no. November, pp. 2579–5406, 2021.

[7] S. P. A. P. A. Alfianov, C. C. Marzuki, and A. N. Rahma, "*Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat," in *Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi dan Industri*, pp. 322–333.

[8] Maryam Siti, "*Trace* Matriks Simetris Bentuk Khusus $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru, 2022.

[9] Hernita, "*Trace* Matriks Toeplitz Tridiagonal $n \times n$ Berpangkat Dua dan Tiga," Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru, 2023.

[10] Marpaung Risda, "*Trace* Matriks Antisimetris 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru, 2023.

[11] Sari Dyan Elvita, "*Trace* Matriks Hankel Bentuk Khusus Berordo Ganjil Berpangkat Bilangan Bulat Positif ," Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru, 2023.

[12] A. N. Rahma, E. Erizona, and R. Rahmawati, "Determinan Matriks *Centrosymmetric* Bentuk Khusus Ordo 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Matematika Dasar dan Aplikasi*, vol. 4, no. 1, pp. 7–16, 2021.

[13] B. P. Tomasouw, "Karakteristik Matriks Centro-Simetris," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 10, no. 2, pp. 69–76, 2016.

[14] N. L. Azizah and N. Ariyanti, "Buku Ajar Mata Kuliah Dasar-Dasar Aljabar Linear," *Umsida Press*, pp. 1–159, 2020.

[15] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. John Wiley & Sons, 2013.

[16] R. Munir, *Matematika Diskrit Revisi Keenam*. Bandung: Informatika Bandung, 2016.

[17] R. Rifa'i, *Aljabar Matriks Dasar*. Deepublish, 2016.

[18] F. B. Cenia and Y. Muda, "Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat," in *Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi dan Industri*, 2021, pp. 300–310.

[19] M. Fatwa, R. Rizki, P. Sriwinarty, and E. Supriyadi, "Pengaplikasian MATLAB pada Perhitungan Matriks," *PAPANDA: Jurnal Penelitian Ilmu Matematika dan Sains*, vol.1, no. 2, pp. 81–93, 2022, doi: 10.56916/ pjmsr.v1i2.260.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Kota Bukittinggi pada tanggal 31 Juli 2001 sebagai anak ketiga dari pasangan Ayahanda Hendrial dan Ibunda Ermawati. Jenjang pendidikan pertama penulis dimulai pada tahun 2007 di Sekolah Dasar Negeri 02 Pandai Sikek sampai dengan tahun 2013 dan melanjutkan pendidikan di Madrasah Tsanawiyah Diniyah Pandai Sikek. Pada tahun 2016 penulis melanjutkan pendidikan di SMAN 1 Kecamatan X Koto dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA). Selama menempuh pendidikan disini penulis aktif terlibat dalam berbagai kegiatan organisasi seperti pramuka, rohis dan PMR. Pada tahun 2020 penulis terdaftar sebagai Mahasiswi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dengan jurusan Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi.

Pada awal tahun 2023, penulis melakukan Kerja praktek (KP) di Bank Syariah Indonesia dengan judul **"Pengaruh Nilai Taksir Harga Emas Terhadap Pembiayaan Awal yang Diberikan Bank Menggunakan Analisis Regresi Sederhana"** dibawah bimbingan Ibu Elfira Safitri, M.Si. yang diseminarkan tanggal 20 juni 2023. Pada tahun yang sama tepatnya tanggal 3 Juli 2023 penulis mengikuti kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Lubuk Raja, Kecamatan Bandar Petalangan, Kabupaten Pelalawan. Pada tanggal 11 Juni 2024 penulis dinyatakan lulus dengan skripsi berjudul "***Trace* Matriks *Centrosymmetric* Bentuk Khusus Ordo $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif"** yang dibimbing oleh Ibu Fitri Aryani, M.Sc.