TRACE MATRIKS HANKEL BENTUK KHUSUS ORDO GENAP BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

MAYANG NURUL IHZA
11754202021

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2023

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS HANKEL ORDO GENAP BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

oleh:

MAYANG NURUL IHZA
11754202021

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 27 Desemeber 2023

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Rahmawati, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIP. 19890202 202321 2 057

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS HANKEL ORDO GENAP BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

oleh:

MAYANG NURUL IHZA
11754202021

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 27 Desember 2023

Pekanbaru, 27 Desember 2023
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Sri Basriati, M.Sc.**
Sekretaris	**: Rahmawati, M.Sc.**
Anggota I	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota II	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si.**

Lampiran Surat :
Nomor : Nomor 25/2021
Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : MAYANG NURUL IHZA
NIM : 11754202021
Tempat/Tgl. Lahir : KUOK, 1 FEBRUARI 1999
Fakultas/Pascasarjana : SAINS DAN TEKNOLOGI
Prodi : MATEMATIKA
Judul Disertasi/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya*:
TRACE MATRIKS HANKEL BENTUK KHUSUS ORDO GENAP BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan Disertasi/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya* dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu Disertasi/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya* saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan Disertasi/Thesis/Skripsi/(Karya Ilmiah lainnya)* saya tersebut, maka saya besedia menerima sanksi sesua peraturan perundang-undangan.

Demikianlah Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 15 JANUARI 2024
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
10000
SEPULUH RIBU RUPIAH
761ALX042873854

NIM : 11754202021

*pilih salah satu sasuai jenis karya tulis

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkennankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 27 Desember 2023
Yang membuat pernyataan,

MAYANG NURUL IHZA
11754202021

LEMBAR PERSEMBAHAN

Bismillahirahmanirrahim

Alhamdulilahirabbil'alamin segala puji dan syukur kepada Alla SWT yang telah memberikan Rahmat, Kesehatan, dan kelancaran kepada saya sehingga dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini. Tugas Akhir ini merupakan persembahan untuk orang yang saya cintai dan sayangi.

Untuk kedua orang tua saya

Terima kasih kepada ibu tersayang (Euis Kurniasih) dan ayah (Eri Masnur) yang selalu memberikan kasih sayang, dan pengorbanan yang tiada hingga kepada saya sehingga saya dapat menyelesaikan gelar sarjana. Semoga ibu dan ayah selalu diberikan Kesehatan amin ya robba'alamin.

TRACE MATRIKS HANKEL ORDO GENAP BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

MAYANG NURUL IHZA
NIM:11754202021

Tanggal Sidang : 27 Desember 2023
Tanggal Wisuda : 2024

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh bentuk umum *trace* Matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1)$ genap berpangkat bilangan bulat positif m. Pada awal penelitian akan dilakukan perpangkatan Matriks Hankel bentuk khusus dimulai dari $(A_{n+1})^2$ hingga $(A_{n+1})^{10}$ dengan $n = 1,3,5,7$. Kemudian diduga bentuk $(A_{1+1})^m, (A_{3+1})^m, (A_{5+1})^m, (A_{7+1})^m$. Selanjutnya diduga bentuk umum $(A_{n+1})^m$ dengan n ganjil dan $m \in Z^+$ dan dibuktikan kembali dengan menggunakan induksi matematika. Akhir penelitian ditentukan $tr(A_{n+1})^m$ dengan menggunakan definisi *trace* matriks, sehingga diperoleh $tr(A_{n+1})^m = (n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^{m-1} a^m$, dengan n ganjil dan $m \in Z^+$

Kata Kunci : Induksi matematika, Matriks Hankel, Perpangkatan matriks, *trace* matriks berpangkat.

TRACE OF POSITIVE INTEGER POWER OF SPECIAL HANKEL MATRIX EVEN ORDER

MAYANG NURUL IHZA
117754202021

Date of Final Exam : 27 December 2023
Date of Graduation : 2024

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

This research pourposed to obtain general form trace of special Hankel Matrix of positive integer power m of $(n+1)$ even order. At the firstof the reaserch, will raised special Hankel Matrix from $(A_{n+1})^2$ to $(A_{n+1})^{10}$ with $n = 1,3,5,7$. Then expect general form $(A_{1+!})^m, (A_{3+!})^m, (A_{5+1})^m, (A_{7+1})^m$. Next assumed general form of $(A_{n+1})^m$ with n odd and $m \in Z^+$. Then proved again with mathematical induction. In the result of the research, determining $tr(A_{n+1})^m$ by using trace of matrix definition and the reaserch obtain $tr(A_{n+1})^m = (n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^{m-1} a^m$ with odd n and $m \in Z^+$.

***Keywords** : Mathematical induction, power of matrix, trace of power of matrix.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Alhamdulillah, saya ucapkan segala puji dan syukur kepada Allah SWT yang mana masih memberikan nikmatnya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir. Tak lupa mengucapakan sholawat serta salam lepada junjungan alam baginda Muhammad SAW semoga mendapatkan safa'atnya. Penulisan Tugas Akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi syarat dalam rangka menyelesaikan Studi Strata (S1) Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasyim Riau. Dalam penulisan Tugas Akhir ini penulis mengucapkan banyak terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Bapak Dr. Rado Yendra, M.Sc selaku Pembimbing Akademik.
6. Bu Rahmawati, M.Sc selaku Pembimbing Tugas Akhir yang mana selalu senantiasa meluangkan waktu, tenaga dan pikiran untuk selalu membimbing, memberikan nasehat, semangat, dan memotivasi untuk menyelesaikan permasalahan selama perkuliahan dan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
7. Ketua sidang, Penguji I, dan Penguji II yang telah menyempatkan waktu dalam menyelesaikan laporan tugas akhir ini.
8. Bapak Zukrianto, M.Si selaku Kordinator Tugas Akhir yang telah banyak memberikan bantuan dalam rangka menyelesaikan Tugas Akhir ini.
9. Seluruh dosen Program Studi Matematika Fakulats Sains dan Teknologi

yang telah selalumemberikan banyak ilmu dan pola piker untuk penulis.

10. Kedua orang tua penulis Bapak Eri Masnur dan Bu Euis Kurniasih dan adik-adik penulis Aisyah Nurul Saumi, Fatma Azzahra, dan Callista Iswani yang memberikan doa, semangat, kasih , sayang, dan bantuannya.
11. Sahabat Risda Marpaung, Fitria Maulida Agustini, Dwi Oktavia, Delfi Harahap, Mayang Yuliana, INDY, dan khusus nya untuk Masroh tersayang dan selalu dirindukan karena telah memberikan nasehat, saran, tenaga, dan motivasi hingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.
12. Teman-teman dan adik tingkat penulis Wildan, Aris, Hafis, Pera dan lain-lain yang telah membantu dalam memberikan semangat.
13. Kepada calon masa depan penulis telah memberikan semangat, motivasi dan doanya selama pengerjaan Tugas Akhir ini.
14. Semua pihak yang telah membantu dalam mengerjakan penulisan tugas akhir ini yang tak dapat disebut satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan dan kesalahan. Sehingga diharapkan kritik dan saran dari pembaca demi kesempurnaan Tugas Akhhir ini. Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca. *Amin ya Robbal'alamin*

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 27 Desember 2023

MAYANG NURUL IHZA
11754202021

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$Tr(A_{n+1})^m$: Trace matriks dari matriks $(A_{n+1})^m$

a_{ij} : Entri matriks baris ke-i kolom ke-j

m : Pangkat matriks

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penggunaan matriks sudah berkembang pesat hingga era digital saat ini dan telah dirasakan sejak lama manfaatnya. Misalnya penerapan matriks dalam kehidupan sehari-hari yaitu dalam dekripsi dan enskripsi gambar pada *smartphone* (Android dan iOS) [1]. Matriks merupakan salah satu cabang kajian illmu aljabar. Matriks memiliki beberapa jenis, seperti Matriks Toeplitz, Matriks Hassenberg, Matriks Hankel, matriks segitiga, dan lain-lain. Pada penelitian ini akan membahas mengenai Matriks Hankel. Matriks Hankel pertama kali ditemukan oleh Hermann Hankel dalam [2] dengan bentuk umum dari Matriks Hankel sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{2n-2} & a_{2n-1} \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \end{bmatrix}_{n+1}. \tag{1.1}$$

Dapat diperhatikan bahwa pada Matriks Hankel selalu berbentuk persegi dan masing-masing diagonal miring naik dari kiri ke kanan adalah konstan.

Matriks dapat dioperasikan ke dalam beberapa operasi seperti penjumlahan matriks, pengurangan matriks, perkalian matriks, dan transpos. Beberapa penelitian mengenai matriks telah banyak dilakukan seperti determinan matriks berpangkat [3], [4], [5], [6], invers matriks berpangkat [7], [8], [9], [10], *trace* matriks berpangkat[11], [12], [13], dan lain sebagainya. Pada penenlitian ini akan membahas mengenai *trace* matriks berpangkat. Beberapa penelitian mengenai *trace* matriks seperti, pada tahun 2019, [14] membahas mengenai *trace* matriks Toeplitz simetris berbentuk khusus ordo 3×3 berpangkat positif integer dengan matriks yang digunakan sebagai berikut:

$A_n = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$ dengan $a \in R$ dan diperoleh $tr(A_3)^n = \begin{cases} 0 & n\ ganjil \\ 2^{\frac{n}{2}+1} a^n & n\ genap \end{cases}$.

Pada tahun 2021, [15] meneliti tenatng *trace* matriks persegi bentuk spesial bepangkat bilangan bulat poditif dengan matriks berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_i & a_i & \cdots & a_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{bmatrix} a_i \in R; a \neq 0, i = 1,2,\ldots,n.$$

Hasil akhir penelitian diperoleh $tr(A_n)^m = (\sum_{i=1}^{n} a_i)$, dengan $m \in Z^+$. Pada tahun yang sama, [16] meneliti mengenai *trace* Matiks Hankel ke-n berpangkat bilangan bulat positif dengan matriks sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n+1}$$

dengan $a \in R, a \neq 0,$ dan $n \geq 3$ dengan hasil penelitiannya sebagai berikut:

$$tr(A_n)^m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m \sqrt{5} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m (-\sqrt{5})\right) a^m, & untuk\ n\ ganjil, m\ ganjil \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m \sqrt{5} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m (-\sqrt{5})\right) a^m + a^m, & untuk\ n\ genap, m\ ganjil \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m \sqrt{5} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m (-\sqrt{5})\right) a^m + (n-1)a^m, & untuk\ n\ ganjil, m\ genap \\ & untuk\ n\ genap, m\ genap \end{cases}.$$

Pada tahun 2022, [16] melakukan penelitian mengenai *trace* matiks Hankel berpangkat tiga dengan matriks sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}.$$

Dengan hasil akhir penelitian diperoleh yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A_n)^3 = {} & \sum_{r=0}^{n}\sum_{l=o}^{n} a_{2l}a_{r+l}{}^2 + 2\Bigg(\sum_{r=0}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_l a_r a_{r+l} + \sum_{r=0}^{n}\sum_{l=2}^{n} a_{l+1}a_{r+1}a_{r+l} + \sum_{r=0}^{n}\sum_{l=3}^{n} a_{l+2}a_{r+2}a_{r+l} + \cdots \\ & + \sum_{r=0}^{n}\sum_{l=n-2}^{n} a_{l+(n-3)}a_{r+(n-3)}a_{r+l} + \sum_{r=0}^{n}\sum_{l=n-1}^{n} a_{l+(n-2)}a_{r+(n-2)}a_{r+l} + \sum_{r=0}^{n}\sum_{l=n}^{n} a_{l+(n-1)}a_{r+(n-1)}a_{r+l}\Bigg) \end{aligned}$$

Pada tahun berikutnya, [17] meneliti mengenai *trace* Matriks Hankel bentuk khusus berordo ganjil berpangkat bilangan bulat positif, dengan bentuk matriks sebagai berikut:

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Dengan hasil akhir penelitian diperoleh $tr(A_{n+1})^m = \left[\left(\frac{n}{2}+1\right)a\right]^m + \left[\left(\frac{n}{2}\right)a\right]^m$.

Penelitian ini merupakan penelitian lanjutan dari penelitian [17] dengan pembahasan mengenai "***Trace* Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo Genap Berpangkat Bilangan Bulat Positif**", dan menggunakan matriks yang serupa pada Persamaan (1.2).

1.2 Rumusan Masalah

Berlandaskan latar belakang yang telah dijabarkan sebelumnya, perumusan masalah pada penelitian ini yaitu bagaimana bentuk umum *trace* Matriks Hankel bentuk khusus $(n+1)$ genap pada Persamaan (1.2) berpangkat m, dengan n ganjil dan $m \in Z^{+}$.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada pembahasan ini yaitu Matriks Hankel bentuk khusus pada Persamaan (1.2) berordo$(n+1)$ genap dengan $a \in R, a \neq 0$, dan n ganjil.

1.4 Tujuan Masalah

Tujuan penelitian ini yaitu untuk memperoleh bentuk umum *trace* Matriks Hankel bentuk khusus berordo $(n+1)$ genap berpangkat m dengan n ganjil dan $m \in Z^{+}$.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan uraian rumusan masalah dan tujuan dari penelitian ini bermanfaat:

1. Memberikan pemahaman yang lebih mendalam bagipembaca dan penulisan khususnya *trace* Matriks Hankel bentuk khusus ordo genap berpangkat bilangan bulat positif dengan matriks pada Persamaan (1.2).
2. Dapat mengembangkan wawasan mengenai aljabar linear elementer, terlebihnya mengenai *trace* Matriks Hankel bentuk khusus ordo genap berpangkat bilangan bulat positif dengan menggunakan matriks pada Persamaan (1.2).
3. Dapat dijadikan referensi untuk memecahkan masalah yang berkaitan tentang *trace* matriks.

1.6 Sistematika Penelitian

Pengaturan penulisan laporan Tugas Akhir ini terdiri dari pokok-pokok permasalahan yang dijabarkan menjadi beberapa bagian yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan menguraikan tentang latar belakang pemilihan judul, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penelitian.

BAB II LANDASAN TEORI

Landasan teori berisi teori-teori yang berkaitan mengenai acuan penelitian, seperti: matiks, perpangkatan pada matriks, dan trace matriks.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini berisikan tahapan untuk menemukan persamaan trace matriks Hankel ordo genap berpangkat bilangan positif.

BAB IV PEMBAHASAN

Pada bab ini berisikan tahapan dalam menemukan bentuk umum dari Trace Matriks Hankel ordo genap bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positf.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisikan tentang kesimpulan dari bab pembahasan.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan membahas mengenai teori yang berkaitan dalam menyelesaikan permasalahan penelitian ini.

2.1 Matriks Hankel

Defenisi 2.1 [2] Matriks Hankel ke-n, $n \geq 0$ ialah matriks persegi $(n+1)\times(n+1)$ yang elemen-elemen (i,j) adalah a_{i+j} dengan $i = 0,1,2,3,\ldots,n$ dan $j = 0,1,2,3,..n$.

Matriks Hankel ialah suatu matriks bujursangkar dimana pada masing-masing diagonal miring naik dari kiri ke kanan nilai elemen-elemennya ialah konstan.

Berdasarkan Persamaan (1.1) bentuk umum Matriks Hankel sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{2n-2} & a_{2n-1} \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \end{bmatrix}_{n+1}.$$

Dapat diperhatikan dari segi komponen, jika entri (i,j) elemen dari A dan dinotasikan dengan a_{ij}, degan asumsi $i \leq j$, maka $a_{i,j} = a_{i+k,j-k}$, untuk semua $k = 0,1,\ldots,j-1$. Matriks Hankel adalah simetris [18].

Contoh 2.3 Diberikan sebuah Matriks Hankel sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 6 \\ 6 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.4 [19] Apabila A merupakan suatu matriks berbentuk persegi, maka definisi berpangkat integer tak negative dari A yaitu,

$$A_0 = I,\ A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n\,faktor} \text{di mana } n > 0 \tag{2.1}$$

Kemudian, apabila A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat integer negative dari A yaitu,

$$A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n\,faktor} \text{di mana } n < 0. \tag{2.2}$$

Contoh 2.4 Diberikan sebuah matriks Hankel D sebagai berikut.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka tentukan } B^3!$$

Penyelesaian:

$$B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 15 & 12 & 11 \\ 15 & 22 & 15 & 11 \\ 2 & 15 & 22 & 14 \\ 11 & 11 & 14 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 105 & 111 & 127 & 126 \\ 111 & 130 & 144 & 108 \\ 127 & 144 & 120 & 99 \\ 126 & 108 & 99 & 88 \end{bmatrix}.$$

2.3 Induksi Matematika

Definisi 2.5 [20] Misalkan $p(n)$ ialah suatu pernyataan bilangan bulat positif (positive integer) dan akan dibuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ tersebut benar untuk semua bilangan bulat positif dengan Langkah:

1. Ditunjukkan bahwa $p(1)$ benar.
2. Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan ditunjukkan $p(k+1)$ benar.

Jika langkah 1 dan 2 terpenuhi kebenarannya maka dapat disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiapl bilangan bulan n. Langkah 1 dikatakan basis induki sedangkan langkah 2 dikatakan Langkah induksi.

Contoh 2.5 Diberikan matriks $A_{2+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a \in R, a \neq 0$, maka

$(A_{2+1})^m = \begin{bmatrix} 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m \\ 0 & a^m & 0 \\ 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m \end{bmatrix}$ dengan $m \in Z^+$.

Penyelesaian: Misalkan $p(n): (A_{2+1})^m = \begin{bmatrix} 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m \\ 0 & a^m & 0 \\ 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m \end{bmatrix}$.

1. Basis Induksi.

   Akan ditunjukan $p(1)$ benar, yaitu:

$$p(1): (A_{2+1})^1 = \begin{bmatrix} 2^{1-1}a^1 & 0 & 2^{1-1}a^1 \\ 0 & a^1 & 0 \\ 2^{1-1}a^1 & 0 & 2^{1-1}a^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}.$$

2. Langkah induksi.

   Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): (A_{2+1})^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1}a^k & 0 & 2^{k-1}a^k \\ 0 & a^k & 0 \\ 2^{k-1}a^k & 0 & 2^{k-1}a^k \end{bmatrix}.$$

   Akan ditunjukkan $p(k+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+1): (A_{2+1})^k = \begin{bmatrix} 2^k a^{k+1} & 0 & 2^k a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & 0 \\ 2^k a^{k+1} & 0 & 2^k a^{k+1} \end{bmatrix}.$$

   Bukti:

$$A^{k+1} = A^k . A^1$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{k-1}a^k & 0 & 2^{k-1}a^k \\ 0 & a^k & 0 \\ 2^{k-1}a^k & 0 & 2^{k-1}a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(2^{k-1}a^{k+1}) & 0 & 2(2^{k-1}a^{k+1}) \\ 0 & a^{k+1} & 0 \\ 2(2^{k-1}a^{k+1}) & 0 & 2(2^{k-1}a^{k+1}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k a^{k+1} & 0 & 2^k a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & 0 \\ 2^k a^{k+1} & 0 & 2^k a^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Karena langkah 1 dan 2 terpenuhi, maka

$$(A_{2+1})^m = \begin{bmatrix} 2^{m-1} a^m & 0 & 2^{m-1} a^m \\ 0 & a^m & 0 \\ 2^{m-1} a^m & 0 & 2^{m-1} a^m \end{bmatrix} \text{ untuk } m \in Z^+ \text{ terbukti.}$$

2.4 *Trace* Matriks

Defenisi 2.5 [21] Jika A merupakan suatu matriks bujur sangkar, maka *trace* dari A yang dilambangkan sebagai $tr(A)$, yang diartikan sebagai jumlah seluruh elemen pada diagonal utama A.

Jika A bukan suatu matriks bujur sangkar maka $trace$ tidak terdefinisi.

Jika diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

maka

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{2.3}$$

Contoh 2.6 Diberikan suatu Matriks Hankel $A = \begin{bmatrix} 24 & 22 & 16 & 11 \\ 22 & 16 & 11 & 14 \\ 16 & 11 & 14 & 24 \\ 11 & 14 & 24 & 17 \end{bmatrix}$, maka $trace$ dari matriks A dengan menggunakan Persamaan (2.3) adalah sebagai berikut.

$$Tr(A) = 24 + 16 + 14 + 17$$

$$= 71.$$

Teorema 2.1 [21] Apabila diberikan sebuah matriks persegi A dan B yang keduanya memiliki ordo yang serupa dan c merupakan sebuah konstanta maka berlaku:

a) $tr(A) = tr(A^T)$
b) $tr(cA) = c\,tr(A)$
c) $tr(A+B) = tr(A) + Tr(B)$
d) $tr(AB) = tr(BA)$.

Bukti: Diambil sebarang c merupakan skalar dan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

a) Akan dibuktikan untuk $tr(A) = tr(A^T)$.

Sebelumnya telah diambil sebarang matriks A pada Persamaan (2.4), maka

$$tr(A^T) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^T\right)$$

$$tr(A^T) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

$$= tr(A).$$

b) Akan dibuktikan bahwa $tr(cA) = ctr(A)$.

Telah diambil sebarang A pada Persamaan (2.4) dan c merupakan saklar

sehingga $tr(cA) = tr\left(c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{21} & \cdots & ca_{n1} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{1n} & ca_{2n} & \dots & ca_{nn} \end{bmatrix}\right)$$
$$= ca_{11} + ca_{22} + \cdots + ca_{nn}$$
$$= c(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$$
$$= ctr(A).$$

c) Akan dibuktikan bahwa untuk $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

Telah diambil sebarang matriks A dan B pada Persamaan (2.4) dan Persamaan (2.5).

Maka

$$tr(A+B) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$
$$= tr\left(\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{21} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{1n} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$
$$= (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + \cdots + (b_{nn}+a_{nn})$$
$$= (a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}) + (b_{11}+b_{22}+\cdots+b_{nn})$$
$$= tr(A) + tr(B).$$

d) Akan dibuktikan bahwa untuk $tr(AB) = tr(BA)$.

Telah diambil sebarang matriks A dan B pada Persamaan (2.4) dan (2.5).

Maka

$$tr(AB) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & \dots & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\cdots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nn}b_{n2} & \dots & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$
$$= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2}) + \cdots$$
$$+(a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+a_{nn}b_{nn})$$

$$= (b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} + \cdots + b_{n1}a_{1n}) + (b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{n2}a_{2n}) + \cdots$$
$$+(b_{1n}a_{n1} + b_{2n}a_{n2} + b_{nn}a_{nn})$$
$$= tr(BA).$$

2.5 *Trace* Matriks Berpangkat

Pada tahun 2022, [17] melakukan penelitian mengenai *trace* Matriks Hankel bentuk khusus berordo ganjil berpangkat bilangan bulat positif. Penelitiannya bertujuan untuk menentukan bentuk umum dari $tr(A_n)^m$ dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan Matriks Hankel (A_{n+1}) bentuk khusus pada Persamaan (1.2) untuk ordo $(n+1)$ ganjil.
2. Menghitung perpangkatan $(A_{n+1})^2$ hingga $(A_{n+1})^{11}$ dengan $n = 2,4,6,8$.
3. Menduga bentuk umum $(A_{n+1})^m$ dengan $n = 2,4,6,8$ yaitu $(A_{2+1})^m, (A_{4+1})^m, (A_{6+1})^m$, dan $(A_{8+1})^m$ dengan dugaan sebagai berikut:

$$(A_{2+1})^m = \begin{bmatrix} 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m \\ 0 & a^m & 0 \\ 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m \end{bmatrix}$$

$$(A_{4+1})^m = \begin{bmatrix} 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m \\ 0 & 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m & 0 \\ 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m \\ 0 & 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m & 0 \\ 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m \end{bmatrix}$$

$$(A_{6+1})^m = \begin{bmatrix} 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m \\ 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 \\ 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m \\ 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 \\ 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m \\ 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 \\ 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m \end{bmatrix}$$

$$(A_{8+1})^m = \begin{bmatrix} 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m \\ 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 \\ 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m \\ 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 \\ 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m \\ 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 \\ 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m \\ 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 \\ 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m \end{bmatrix}$$

4. Membuktikan bentuk umum $(A_{n+1})^m$ dengan $n = 2,4,6,8$ dan $m \in Z^+$, menggunakan induksi matematika yang dinyatakan dalam teorema-teorema berikut:

   a. **Teorema 2.2** Jika diberikan matriks $A_{2+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix} \forall a \in R, a \neq 0,$

   maka $(A_{2+1})^m = \begin{bmatrix} 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m \\ 0 & a^m & 0 \\ 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m \end{bmatrix}$ atau dapat ditulis

$$(A_{2+1})^m = [a_{ij}] = \begin{cases} 2^{m-1}a^m & \text{untuk } i = 0,2 \text{ dan } j = 0,2 \\ a^m & \text{untuk } i = j = 1 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}. \tag{2.6}$$

   Bukti: Teorema 2.2 akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

   Misalkan $p(n)$: $A_{2+1} = \begin{bmatrix} 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m \\ 0 & a^m & 0 \\ 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m \end{bmatrix}$.

   1. Basis Induksi: Untuk $m = 1$,

$$p(1):\ A_{2+1} = \begin{bmatrix} 2^{1-1}a^1 & 0 & 2^{1-1}a^1 \\ 0 & a^1 & 0 \\ 2^{1-1}a^1 & 0 & 2^{1-1}a^1 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 2^0 a^1 & 0 & 2^0 a^1 \\ 0 & a^1 & 0 \\ 2^0 a^1 & 0 & 2^0 a^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$$

$p(1)$ bernilai benar.

2. Langkah induksi:

Asumsikan $p(k): (A_{2+1})^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} a^k & 0 & 2^{k-1} a^k \\ 0 & a^k & 0 \\ 2^{k-1} a^k & 0 & 2^{k-1} a^k \end{bmatrix}$ benar.

Akan ditunjukkan $p(k+1)$ benar, yaitu:

$$p(k+1): (A_{2+1})^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^k a^{k+1} & 0 & 2^k a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & 0 \\ 2^k a^{k+1} & 0 & 2^k a^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian:

$(A_{2+1})^{k+1} = (A_{2+1})^k (A_{2+1})$

$$= \begin{bmatrix} 2^{k-1} a^k & 0 & 2^{k-1} a^k \\ 0 & a^k & 0 \\ 2^{k-1} a^k & 0 & 2^{k-1} a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(2^{k-1} a^{k+1}) & 0 & 2(2^{k-1} a^{k+1}) \\ 0 & a^{k+1} & 0 \\ 2(2^{k-1} a^{k+1}) & 0 & 2(2^{k-1} a^{k+1}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k a^{k+1} & 0 & 2^k a^{k+1} \\ 0 & a^{k+1} & 0 \\ 2^k a^{k+1} & 0 & 2^k a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$p(k+1)$ benar.

Berdasarkan langkah 1 dan 2 mak Teorema 2.2 Terbukti.

b. **Teorema 2.3** Jika diberikan matriks $A_{4+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & 0 & a \end{bmatrix} \forall a \in R,$

$a \neq 0$. Maka

$$(A_{4+1})^m = \begin{bmatrix} 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m \\ 0 & 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m & 0 \\ 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m \\ 0 & 2^{m-1}a^m & 0 & 2^{m-1}a^m & 0 \\ 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m \end{bmatrix}$$

atau dapat dtulis

$$(A_{4+1})^m = [a_{ij}] = \begin{cases} 3^{m-1}a^m & \text{untuk } i = 0,2,4 \text{ dan } j = 0,2,4 \\ 2^{m-1}a^m & \text{untuk } i = 1,3 \text{ dan untuk } j = 1,3. \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases} \tag{2.7}$$

Bukti: Teorema 2.3 terbukti dengan menggunakan cara yang sama pada Teorema 2.2.

c. **Teorema 2.4** Jika diberikan matriks $A_{6+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & 0 & a & 0 & a \end{bmatrix}$

$\forall a \in R, a \neq 0$. Maka

$$(A_{6+1})^m = \begin{bmatrix} 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m \\ 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 \\ 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m \\ 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 \\ 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m \\ 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 & 3^{m-1}a^m & 0 \\ 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m \end{bmatrix}$$

atau dapat dtulis

$$(A_{4+1})^m = [a_{ij}] = \begin{cases} 3^{m-1}a^m & \text{untuk } i = 0,2,4 \text{ dan } j = 0,2,4 \\ 2^{m-1}a^m & \text{untuk } i = 1,3 \text{ dan untuk } j = 1,3 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases} \tag{2.8}$$

Bukti: Teorema 2.4 terbukti dengan menggunakan cara yang sama pada Teorema 2.2.

d. **Teorema 2.5** Jika diberikan matriks

$$A_{8+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 & a \end{bmatrix} \forall a \in R, a \neq 0. \text{ Maka}$$

$$(A_{8+1})^m = \begin{bmatrix} 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m \\ 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 \\ 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m \\ 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 \\ 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m \\ 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 \\ 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m \\ 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 & 4^{m-1}a^m & 0 \\ 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m & 0 & 5^{m-1}a^m \end{bmatrix}$$

atau dapat dtulis

$$(A_{8+1})^m = [a_{ij}] = \begin{cases} 5^{m-1}a^m & \text{untuk } i = 0,2,4,6,8 \text{ dan } j = 0,2,4,6,8 \\ 4^{m-1}a^m & \text{untuk } i = 1,3,5,7 \text{ dan untuk } j = 1,3,5,7 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases} \tag{2.9}$$

Bukti: Teorema 2.5 terbukti dengan menggunakan cara yang sama pada Teorema 2.2.

Dengan memperhatikan Persaman (2.6) - (2.9) maka diduga bentuk umum $(A_{n+1})^m$ dengan n genap dan $m \in Z^+$ sebagai berikut:

$$(A_{n+1})^m = \begin{bmatrix} \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & \cdots & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m \\ 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & 0 \\ \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & \cdots & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & \cdots & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m \\ 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & 0 \\ \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & \cdots & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m \end{bmatrix}.$$

5. Membuktikan bentuk umum $(A_{n+1})^m$ dengan n genap dan $m \in Z^+$, yang dinyatakan dalam Teorema 2.6 berikut:

Teorema 2.6 Jika A_{n+1} merupakan Matriks Hankel berordo ganjil dengan bentuk:

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \end{bmatrix} \forall a \in R, a \neq 0. \text{ Maka}$$

$$(A_{n+1})^m = \begin{bmatrix} \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & \cdots & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m \\ 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & 0 \\ \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & \cdots & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & \cdots & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m \\ 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & 0 \\ \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & \cdots & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m & 0 & \frac{(n+1)}{2}^{m-1} a^m \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

atau dapat dtulis

$$(A_{n+1})^m = [a_{ij}] = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & \text{untuk i} = 0,2,..,n \text{ ganjil dan j} = 0,2,..,n \text{ genap} \\ \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & \text{untuk i} = 1,3,..,n-1 \text{ dan untuk j} = 1,3,..,n-1 \, . \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Bukti: Teorema 2.6 terbutki dengan menggunakan cara yang sama pada Teorema 2.2.

6. Menentukan bentuk umum $tr(A_{n+1})^m$ dengan n genap dan $m \in Z^+$, menggunakan Definisi 2.1 *trace* matriks, dan dinyatakan dalam Teorema 2.7 berikut:

Akibat 2.7 Jika A_{n+1} sebuah Matriks Hankel berordo ganjil $(n+1)$ dengan bentuk:

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \end{bmatrix} \; a \in R, a \neq 0, \text{ dan } n \text{ genap.}$$

Maka $tr(A_{n+1})^m = \left[\left(\frac{n}{2}+1\right)a\right]^m + \left[\left(\frac{n}{2}\right)a\right]^m$.

Bukti: Telah diperoleh bentuk umum $(A_{n+1})^m$ pada Persamaan (2.10), maka akan ditentukan bentuk umum $tr(A_{n+1})^m$ sebagai berikut.

$$tr(A_{n+1})^m = tr\left(\begin{bmatrix} \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m & 0 & \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m & \cdots & \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m & 0 & \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m \\ 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1}a^m & 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1}a^m & 0 \\ \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m & 0 & \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m & \cdots & \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m & 0 & \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m & 0 & \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m & \cdots & \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m & 0 & \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m \\ 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1}a^m & 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1}a^m & 0 \\ \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m & 0 & \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m & \cdots & \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m & 0 & \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m \end{bmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m + \frac{(n-1)^{m-1}}{2}a^m + \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m + \cdots + \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m + \frac{(n-1)^{m-1}}{2}a^m + \frac{(n+1)^{m-1}}{2}a^m}_{(n+1)\,faktor}$$

$$= \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m$$

$$= \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1+1} a^m + \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1+1} a^m$$

$$= \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m} a^m + \left(\frac{n}{2}\right)^{m} a^m$$

$$= \left[\left(\frac{n}{2}+1\right)a\right]^m + \left[\frac{n}{2}a\right]^m.$$

BAB III
METODE PENELITIAN

Metode penelitan yang digunakan pada tugas akhir ini menggunakan metode studi liteatur dengan cara mengumpulkan informasi-informasi dari buku dan jurnal yang berkaitan mnegenai *trace* Matriks Hankel ordo genap berpangkat bilangan bulat positif. Berikut langkah-langkahnya:

1. Diberikan suatu Matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1)$ genap pada Persamaan (1.2).
2. Menghitung perpangkatan $(A_{n+1})^2$ hingga $(A_{n+1})^{10}$ dengan $n = 1,3,5,7$.
3. Menduga bentuk umum $(A_{1+1})^m$, $(A_{3+1})^m$, $(A_{5+1})^m$, dan $(A_{7+1})^m$ dengan $m \in Z^+$.
4. Menduga bentuk umum $(A_{n+1})^m$ dengan n ganjil dan $m \in Z^+$.
5. Membuktikan $(A_{n+1})^m$ dengan n ganjil dan $m \in Z^+$ menggunakan induksi matematika.
6. Menentukan bentuk umum $tr(A_{n+1})^m$ dengan n ganjil dengan menggunakan Definisi 2.1 mengenai *trace* matriks.
7. Mengapilkasikan bentuk umum $(A_{n+1})^m$ dan $tr(A_{n+1})^m$ ke dalam bentuk soal dengan $3 \leq n \leq 7$ dengan n bilangan genap dan $m = 4, 10, 12$.

BAB V
KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarakan hasil penelitian yang telah dijabarkn sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

Jika A_{n+1} merupakan suatu Matriks Hankel bentuk khusus dengan ordo $(n+1)$ genap yaitu:

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 & \cdots & a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a & \cdots & 0 & a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 & \cdots & a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a & \cdots & 0 & a & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & a & 0 & \cdots & a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a & \cdots & 0 & a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 & \cdots & a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a & \cdots & 0 & a & 0 & a \end{bmatrix}; \forall a \in R, a \neq 0,$$

maka $(A_{n+1})^m = \left(\frac{(n+1)}{2}a\right)^{m-1} A_{n+1}$ dan $tr(A_{n+1})^m = (n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^{m-1} a^m$, dengan n ganjil dan $m \in Z^+$.

5.2 Saran

Berdasarkan uraian yang telah dijabarkan pada penelitan ini, penelitian ini dapat dikembangkan menjadi penelitian yang membahas mengenai *trace* Matriks Hankel berpangkat bilangan bulat negatif dengan entri-entri yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

[1] J. I. Sari, Sulindawaty, and H. T. Sihotang, “Implementasi Penyembunyian Pesan Pada Citra Digital Dengan Menggabungkan Algoritma Hill Cipher Dan Metode Least Significant Bit (LSB),” *Jurnal Mantik Penusa*, vol. 1, no. 2, pp. 1–8, 2017, [Online]. Available: http://e-jurnal.pelitanusantara.ac.id/index.php/mantik/article/view/253

[2] S.-L. Yang and Y. Dong, “Hankel determinants of the Generalized Factorials,” *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, pp. 217–225, 2018, [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1007/s13226-018-0264-9

[3] A. N. Rahma, Rahmawati, and S. M. Jauza, “Determinana Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo 3X3 Berpangkat Bulangan Blat Positif,” *Jurnal Sains dan Matematika*, vol. 6, no. 2, pp. 89–96, 2020.

[4] A. N. Rahma, E. Safitri, and Rahmawati, “Determinan Matriks FLScirc Bentuk Khusus nxn, n>3 Menggunakan Metode Kondensasi Chio”.

[5] A. N. Rahma, E. Erizona, and Rahmawati, “Determinan Matriks Centrosymetric Bentuk Khusus Oordo ? × ? Berpangkat Bilangan Bulat Positif,” *Jurnal of Fundamental Mathematics And Applicatins*, vol. 4, no. 1, pp. 7–16, 2021.

[6] A. N. Rahma, F. Aryani, M. Anggelina, and Rahmawati, “Determinan Matriks Blok 2X2 Dalam Aplikasi Matriks FLD [circ]_r Bentuk Khusus,” *Jurnal Sains dan Statistika*, vol. 5, no. 2, 2019.

[7] A. N. Rahma, R. H. Vitho, Rahmawati, and E. Safitri, “Invers Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo n×n Menggunakan Adjoin,” vol. 4, no. 1, pp. 199–210, 2022.

[8] Rahmawati, Saniyah, and A. N. Rahma, “Invers Matriks Toeplitz-Hessenberg Bentuk Khusus Menggunakan Metode Faddeev,” *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi, dan Industri.*, no. November, pp. 405–411, 2019.

[9] Rahmawati, N. Fitri, and A. N. Rahma, “Invers Matriks RSFPLRcircfr (0,b,...,b),” *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 1, p. 113, 2020, doi: 10.24014/jsms.v6i1.9260.

[10] A. N. Rahma, M. Anggelina, and Rahmawati, “Invers Matriks Blok 2X2 Dalam Aplikasik Matriks FLDcirc Bentuk Khusus,” *Seminar Nasional Teknologi, Komunikasi, dan Industri*, pp. 334–344, 2019.

[11] Rahmawati, Wartono, and M. Jelita, “Trace of Integer Power of Real 3X3 Specific Matrix,” *International Jurnal of Advances in Scientific Reaserch*

and Enginereing, vol. 5, no. 3, pp. 48–56, 2019.

[12] C. C. Marzuki, F. Aryani, and Rahmawati, "Trace Matriks n×n Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 7, no. 1, p. 28, 2021, doi: 10.24014/jsms.v7i1.11561.

[13] F. Aryani, A. Rubbani, Haslinda, C. C. Marzuki, and Rahmawati, "Trace Matriks Segitiga 5X5 Berpangkat Bilangan Bulat," *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komuniskasi, dan Industri*, vol. 12, pp. 554–566, 2020.

[14] Rahmawati, N. A. Putri, F. Aryani, and A. N. Rahma, "Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Sains Matematika dan Statistika*, vol. 5, no. 2, pp. 61–70, 2019, [Online]. Available: http://ejournal.uin-suska.ac.id/index.php/JSMS/article/view/7637

[15] Rahmawati, A. Citra, F. Aryani, C. C. Marzuki, and Y. Muda, "Trace of Positive Integer Power of Squared Special Matrix," *CHAUCHY:Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, vol. 5, no. 4, pp. 200–211, 2021.

[16] R. Amelia, "Trace Matriks Hankel Ke-n Bentuk Khusus berpangkat Bilangan Bulat Positif," 2020, pp. 41–49.

[17] D. E. Sari, "Trace Matriks Hankel Bentuk Khusus Berordo Ganjil Berpangkat Bilangan Bulat Positif," in *Skripsi, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasyim*, Riau, 2023. [Online]. Available: https://core.ac.uk/download/pdf/300873657.pdf

[18] A. N. Rahma and Z. Aqilah, "Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Sains Matematika dan Statistika*, vol. 7, no. 1, p. 96, 2021, doi: 10.24014/jsms.v7i1.12193.

[19] A. Howard and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra*, Kesebelas., vol. 6, no. August. 2016.

[20] Sukirman, *Pengantar Teori Bilangan*. Yogyakarta: Hangga Kreator, 2006.

[21] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer dan Aplikasi*, Ke delapan. 2004.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Mayang Nurul Ihza dilahirkan di Kuok, 1 Februari 1999 dan merupakan anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Euis Kurniasih dan Eri Masnur. Mengawali Pendidikan secara formal di SDN Terpadu 002 Kuok (2004-2011) dan melanjutkan Pendidikan di SMPN 002 Laboi Jaya (2011-2013). Selanjutnya penulis melanjutkan Pendidikan di SMAN 2 Bangkinang Kota (2013-2017) dan melanjutkan Pendidikan di Universitas Islam Negeri Syarif Kasim Riau Fakultas Sains dan Teknologi Prodi Matematika pada tahun 2017. Untuk menyelesaikan Program Studi Matemtaika penulis melakukan penelitian dengan judul "**Trace Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo Genap Berpangkat Bilangan Bulat Positif**" sebagai syarat dalam memperoleh gelar sarjana 1.