KONVERGENSI MODIFIKASI METODE NEWTON GANDA DENGAN MENGGUNAKAN KELENGKUNGAN KURVA

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh:

NOFI MAULANA
10854004551

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2012

KONVERGENSI MODIFIKASI METODE NEWTON GANDA DENGAN MENGGUNAKAN KELENGKUNGAN KURVA

NOFI MAULANA
10854004551

Tanggal Sidang: 22 Oktober 2012
Periode Wisuda: Februari 2013

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Metode Newton Ganda adalah salah satu metode iterasi yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinier dengan konvergensi orde empat. Banyaknya iterasi yang digunakan oleh sebuah metode iterasi bergantung kepada orde konvergensinya. Semakin tinggi orde konvergensinya, semakin sedikit iterasi yang dilakukan. Oleh karena itu, pada skripsi ini penulis memodifikasi metode Newton Ganda dengan menggunakan kelengkungan kurva untuk meningkatkan orde konvergensi. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh bahwa modifikasi metode Newton Ganda dengan menggunakan kelengkungan kurva menghasilkan sebuah metode iterasi baru dengan konvergensi orde delapan.

Katakunci: Kelengkungan Kurva, Metode Newton Ganda, Orde Konvergensi.

KATA PENGANTAR

Syukur *alhamdulillah* penulis ucapkan kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan *rahmat* dan *hidayah*-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini tepat pada waktunya. Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan tingkat sarjana.

Petunjuk, bimbingan dan nasehat dari berbagai pihak telah banyak penulis terima dalam penulisan, penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini. Untuk itu sudah sepantasnya bila penulis mengucapkan terima kasih kepada kedua orang tua tercinta yang telah melimpahkan perhatian dan kasih sayang juga materi yang tak mungkin bisa terbalas. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir Karim, M.A selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati,S.Si.,M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Wartono,S.Si.,M.Sc. selaku pembimbing I dan Ibu Yuslenita Muda, S.Si.,M.Sc. selaku pembimbng II yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dalam penulisan Tugas Akhir ini.
5. Ibu Fitri Aryani, S.Si., M.sc. selaku penasehat akademis selama penulis menjalani perkuliahan.
6. Untuk kakak-kakakku (Mama F2f, Mama Rezaharakbar, Bunda, Mamie, Ibuk, Inty, Wo Jen, Da wan, dan Da Man), adik-adikku (Andi dan Adeq) untuk support dan dorongannya yang tiada henti dan Ponakan-ponakan dan anak-anakku tersayang yang selalu membuatku tersenyum.
7. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan FST UIN SUSKA Riau, Khususnya di Jurusan Matematika.
8. Wak Genk (Agus, Hary dan Roni), sahabat-sahabatku (Edi, Vira, kak Vira, Alcha, Olive dan kak Fitri) dan teman-teman Matcom’s (Vidi, Ali, Adi,

Nazar, Andri, Aan dan Saihoni) dan teman-teman MT Angkatan 2008 serta para senior dan junior.

9. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal sampai selesai Tugas Akhir ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penulis telah berusaha semaksimal mungkin dalam penyusunan Tugas Akhir ini penulis. Walaupun demikian, tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.

Pekanbaru, 22 Oktober 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penentuan akar-akar persamaan merupakan salah satu persoalan yang terdapat dalam persamaan nonlinear. Untuk menentukan akar-akar persamaan suatu persamaan nonlinear yang cukup rumit digunakan metode iterasi sebagai pendekatan hasil numerik. Salah satu metode iterasi yang sering digunakan yaitu metode Newton dengan orde konvergensi berbentuk kuadratik. Oleh karena konvergensinya berorde dua, maka metode Newton cukup cepat menghampiri akar-akar persamaan nonlinier.

Bentuk umum metode Newton adalah,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,... \tag{1.1}$$

Sebuah tebakan awal x_0 diperlukan untuk memulai iterasi pada metode Newton. Apabila tebakan awalnya diambil cukup dekat ke akar α, maka metode Newton akan konvergen secara kuadratik.

Belakangan ini, beberapa peneliti telah melakukan berbagai macam pendekatan untuk meningkatkan orde konvergensi suatu metode iterasi. Salah satunya adalah Metode Newton Ganda yang memiliki orde konvergensi tingkat empat. Bentuk umum dari metode Newton Ganda (Traub, 1964) adalah

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} \tag{1.2}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Selanjutnya, persamaan (1.2) dimodifikasi dengan melakukan beberapa pendekatan untuk meningkatkan orde konvergensi sehingga menghasilkan akar-akar untuk menghampiri nilai eksak dengan error yang kecil. Sanjay K. Khattri dan Ravi

P. Agarwal (2010) telah memodifikasi metode Newton Ganda dengan Kuadratur yang menghasilkan orde konvergensi delapan. Selain itu, Sanjay K. Khattri dan Ioannis K. Argyros (2010) juga telah memodifikasi metode Newton Ganda dengan ekspansi Taylor yang menghasilkan orde konvergensi tujuh.

Selain teknik pendekatan kuadratur dan ekspansi Taylor, terdapat sebuah teknik yang juga dapat meningkatkan orde konvergensi suatu metode iterasi yang disebut kelengkungan kurva. Yong-Il Kim dan Changbun Chun (2010) telah memodifikasi metode Jarratt dengan menggunakan Kelengkungan Kurva yang menghasilkan orde konvergensi dua belas.

Oleh karena itu, pada skripsi ini penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan memodifikasi metode Newton Ganda dengan menggunakan Kelengkungan Kurva untuk menghasilkan orde konvergensi yang tinggi.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah ”Bagaimana menentukan orde konvergensi modifikasi metode Newton Ganda dengan menggunakan Kelengkungan Kurva?”.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini yaitu fungsi f adalah suatu fungsi nonlinear dengan satu variabel dan fungsinya bernilai riil.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan iterasi modifikasi metode Newton Ganda dengan menggunakan Kelengkungan Kurva.
2. Menentukan orde konvergensi modifikasi metode Newton Ganda dengan menggunakan Kelengkungan Kurva.

3. Mensimulasikan secara numerik persamaan iterasi modifikasi metode Newton Ganda dengan menggunakan Kelengkungan Kurva.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat penelitian dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan gambaran kelajuan suatu metode iterasi dengan orde konvergensi ke delapan dalam menyelesaikan fungsi *f*.
2. Kontribusi pengetahuan khususnya di bidang numerik.
3. Dapat digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan non-linear dengan tingkat kekonvergenan yang lebih tinggi.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini mencakup lima bab yaitu :

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisi tentang teori-teori dasar yang digunakan dalam penelitian.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisi tentang metodologi penelitian yang digunakan dalam skripsi ini.

BAB IV Pembahasan

Modifikasi Persamaan (2) dengan menggunakan Kelengkungan Kurva.

Bab ini berisi tentang pembahasan bagaimana bentuk rumusan baru dari persamaan (2) dengan menggunakan Kelengkungan Kurva, serta bagaimana bentuk orde konvergensinya. Selain itu dilengkapi dengan simulasi numerik.

BAB V Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Untuk mencapai tujuan dari penulisan skripsi ini, penulis mengambil beberapa konsep dasar yang akan menjadi landasan teori dalam penulisan skripsi ini, diantaranya adalah Orde Konvergensi, Deret Taylor, metode Newton dan Orde Konvergensinya, metode Newton Ganda dan Orde Konvergensinya, dan Kelengkungan Kurva. Konsep dasar tersebut akan dijelaskan sebagai berikut.

2.1 Orde Konvergensi

Orde konvergensi menunjukkan kelajuan suatu metode iterasi dalam menghampiri sebuah fungsi *f*. Secara umum, apabila orde konvergensi suatu metode iterasi rendah maka iterasi yang dilakukan akan lebih banyak dari pada metode iterasi dengan orde konvergensi yang tinggi. Apabila suatu metode iterasi berorde dua maka metode iterasi ini akan konvergen secara kuadratik, dan apabila metode iterasi berorde tiga maka metode iterasi ini akan konvergen secara kubik, dan seterusnya. Untuk mengetahui lebih jelas mengenai orde konvergensi untuk barisan dan orde konvergensi, dapat dilihat pada definisi berikut.

Definisi 2.1: Orde Konvergensi untuk Barisan (Mathews, John. H, 1992) Diberikan $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \alpha$ dan $\{e_n\}$ adalah sebuah barisan dengan $\lim_{n\to\infty}\{e_n\} = 0$ konvergen ke α dengan orde konvergensi $O(e_n)$ jika terdapat sebuah bilangan konstan $K > 0$, sedemikian sehingga:

$$\frac{|x_n - \alpha|}{|e_n|} \le K \tag{2.1}$$

Untuk itu dapat ditulis $x_n = \alpha + O(e_n)$ dengan orde konvergensi $O(e_n)$.

Contoh 2.1: Tunjukkan apakah barisan $\{(\ln n)/e^n\}$ konvergen, dan jika ya, menuju bilangan berapa?

Jawab:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{e^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \ln n}{\lim\limits_{n\to\infty} e^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1/n}{\lim\limits_{n\to\infty} e^n} = \frac{0}{\lim\limits_{n\to\infty} e^n} = 0$$

Jadi, barisan $\{(\ln n)/e^n\}$ konvergen dan menuju bilangan 0.

Definisi 2.2: Orde Konvergensi (Mathews, 1992) Diberikan $\{x_n\}$ adalah sebuah barisan yang konvergen terhadap α dan himpunan $e_n = x_n - \alpha$ untuk $n \geq 0$ Jika terdapat bilangan konstanta $K \neq 0$ dan $p > 0$, dengan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = K \qquad (2.2)$$

maka barisan $\{x_n\}$ konvergen terhadap α dengan orde konvergensi p. Nilai K dapat disebut sebagai konstanta *error*.

Jika $p = 2$ atau 3 maka metode hampiran memiliki orde konvergensi kuadratik atau kubik, dan seterusnya. Apabila notasi $e_n = x_n - \alpha$ merupakan notasi untuk nilai tingkat kesalahan pada iterasi ke-n pada suatu metode yang menghasilkan suatu barisan $\{x_n\}$, maka suatu persamaan

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}), \qquad (2.3)$$

disebut sebagai persamaan tingkat kesalahan, sedangkan nilai p pada persamaan (2.3) menunjukan orde konvergensinya.

Contoh 2.2: Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^3 - 3x + 2$ dengan nilai awal $p_0 = -2{,}4$, dan akar $\alpha = -2$ memiliki orde konvergensi kuadratik jika dengan menggunakan metode Newton.

Jawab:

Diketahui metode Newton memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Untuk itu, dengan mengambil $p = 2$ yang menunjukkan bahwa orde konvergensi pada $\{x_n\}$ adalah kuadratik, sehingga diperoleh:

Tabel 2.1. Konvergensi kuadratik metode Newton pada akar sederhana

K	x_n	$x_{n+1} - x_n$	$e_n = x_n - \alpha$	$\frac{\lvert e_{n+1}\rvert}{\lvert e_n\rvert^2}$
0	-2,400000000	0,323809524	0,400000000	0,476190475
1	-2,076190476	0,072594465	0,076190476	0,619469086
2	-2,003596011	0,003587422	0,003596011	0,664202613
3	-2,000008589	0,000008589	0,000008589	
4	-2,000000000	0,000000000	0,000000000	

kemudian

$$|x_{n+1} - \alpha| \approx K|x_n - \alpha|^p$$

Berdasarkan Teorema *Convergence Rate for Newton-Raphson Iteration* (Mathews, John. H, 1992) bahwa:

$$|e_{n+1}| \approx \frac{|f''(\alpha)|}{|f'(\alpha)|}|e_n|^2$$

sehingga

$$K = \frac{1}{2}\frac{|f''(-2)|}{|f'(-2)|} = \frac{1}{2}\frac{|-12|}{|9|} = \frac{2}{3}$$

kemudian diperoleh:

$$|x_3 - \alpha| = 0{,}000008589 \text{ dan } |x_2 - \alpha| = |0{,}003596011|^2 = 0{,}0000012931$$

maka,

$$|x_3 - \alpha| = 0{,}000008589 = \frac{3}{2}|x_3 - \alpha|^2$$

Selanjutnya untuk menegaskan tingkat orde konvergensi suatu metode iterasi, perlu dilakukan perbandingan terhadap hampiran akar-akar dari sebuah fungsi *f*. Salah satu metode yang digunakan untuk penegasan itu dikenal dengan istilah *Computational Order of Convergence* (COC). Berikut ini diberikan definisi tentang COC.

Definisi 2.3. *Computational Order of Convergence* (Weerakoon, 2000). Diberikan α adalah akar dari $f(x)$, dan x_{n+1}, x_n dan x_{n-1} berturut-turut alalah iterasi yang dekat dengan α, maka *Computational Order of Convergence* (COC) ρ dapat diaproksimasikan dengan menggunakan rumus

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|} \tag{2.4}$$

oleh karena $x_{n+1}-\alpha = e_{n+1}$, maka persamaan (2.4) dapat ditulis kembali menjadi

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(e_{n+1})/(e_n)\right|}{\ln\left|(e_n)/(e_{n-1})\right|} \tag{2.5}$$

2.2 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan deret yang berbentuk polinomial yang sering digunakan untuk menghampiri fungsi-fungsi yang diberikan dengan suku banyak. Konsep deret Taylor akan dijelaskan dengan teorema di bawah ini.

Teorema 2.1: (Edwin J. Purcell, 2004) Diberikan f fungsi yang mana turunan ke-$(n+1)$-nya ada untuk setiap x pada selang terbuka I yang mengandung a. Jadi untuk setiap x di dalam I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{2!}(x-a)3 + \ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \tag{2.6}$$

di mana $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ adalah suku sisa dalam rumus Taylor dan c adalah titik di antara x dan a.

Bukti:

Teorema dasar kalkulus dibutuhkan untuk membuktikan persamaan (2.6) di atas, yaitu Andaikan *f* kontinu pada [*a*,*x*] dan andaikan *F* sebarang anti turunan dari *f* , maka

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a) \tag{2.7}$$

Berdasarkan teorema dasar kalkulus di atas diperoleh bahwa :

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$$

atau

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \tag{2.8}$$

dengan menerapkan integral parsial pada suku kedua ruas kanan dari persamaan (2.8) maka dapat dimisalkan :

$$u = f'(t) \qquad\qquad dv = dt$$
$$du = f''(t) \qquad\qquad v = t - x$$

dengan *x* merupakan konstanta terhadap peubah *t*, maka :

$$\int_a^x udv = uv\Big|_a^x - \int_a^x vdu$$

$$\int_a^x f'(t)dt = f'(a)(x-a) - \int_a^x (t-x)f''(t)dt \tag{2.9}$$

Substitusikan persamaan (2.8) ke dalam persamaan (2.9), maka diperoleh

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^b (x-t)f''(t)dt \tag{2.10}$$

dengan cara yang sama, untuk $\int_a^x (x-t)f''(t)dt$ adalah, misalkan :

$$u = f''(t) \qquad dv = (x-t)dt$$
$$du = f'''(t) \qquad v = -\frac{(x-t)^2}{2}$$

maka diperoleh

$$\int_a^x (x-t) f''(t)dt = -f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Bigg|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)dt$$

$$\int_a^x (x-t) f''(t)dt = f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)dt \qquad (2.11)$$

dengan memasukkan persamaan (2.11) ke persamaan (2.10), diperoleh

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \int_a^x \frac{(x-a)^2}{2} f'''(t)dt \qquad (2.12)$$

Apabila proses yang sama dilakukan sebanyak (n), maka diperoleh

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$+ \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt \qquad (2.13)$$

dengan

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt \qquad (2.14)$$

Secara umum, deret Taylor dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \qquad (2.15)$$

dengan $R_n(x) = \frac{(x-x_0)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x-x_0)^{n+1}$

Ekspansi Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi f disekitar x_0, dimana $x_0 = 0$ maka diperoleh

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x) \tag{2.16}$$

Persamaan (2.16) disebut deret MacLaurin.

Dan untuk turunannya dapaat dituliskan sebagai

$$f'(x) = f'(0) + x^2 f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} f^{(n)}(0) \tag{2.17}$$

Selanjutnya, Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(x) \neq 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$, dan dengan menggunkan rumus ekspansi Taylor untuk mengaproksimasi fungsi *f* di sekitar α, diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \cdots$$

$$= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!}(e_n)^2 + \cdots \tag{2.18}$$

dan

$$f'(\alpha + e_n) = f'(\alpha) + f''(\alpha)(e_n)^2 + \cdots \tag{2.19}$$

Contoh 2.3: Misalkan $f(x) = e^x + 1$. Tentukanlah hampiran dann grafiknya untuk orde 1, 3, 5, dan 7 menggunakan deret Taylornya dengan $x_0 = 0$ pada titik $x = 2$!

Jawab:

$f(x) = e^x + 1$ $\qquad$ $f(0) = e^0 + 1 = 2$

$f'(x) = e^x$ $\qquad$ $f'(0) = e^0 = 1$

$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = e^0 = 1$$

$$f^{(3)}(x) = e^x \qquad f^{(3)}(0) = e^0 = 1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(7)}(x) = e^x \qquad f^{(7)}(0) = e^0 = 1$$

Sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= 2 + 1(x - 0) \\ &= 2 + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \\ &= 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_5(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}(x - x_0)^5 \\ &= 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_7(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}(x - x_0)^5 + \frac{f^{(6)}(x_0)}{6!}(x - x_0)^6 \\ &\quad + \frac{f^{(7)}(x_0)}{7!}(x - x_0)^7 \\ &= 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \end{aligned}$$

Nilai sejati fungsi tersebut adalah

$$f(2) = e^2 + 1 = 8{,}389056099$$

Maka, hampirannya adalah

$$P_1(2) = 2 + x = 2 + 2 = 4$$

$$P_3(2) = 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$= 2 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}$$

$$= \frac{22}{3}$$

$$P_5(2) = 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$= 2 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!}$$

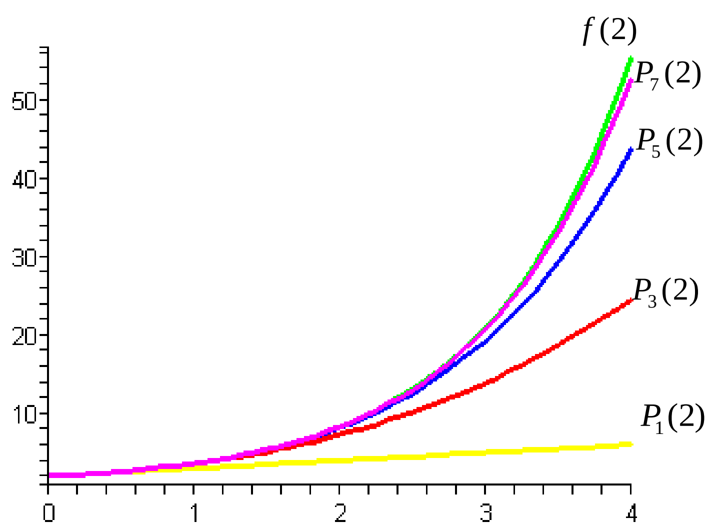
$$= \frac{124}{15}$$

$$P_7(2) = 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}$$

$$= 2 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!}$$

$$= 8{,}380952381$$

Grafiknya dapat di gambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.1. Hampiran fungsi *f* menggunakan Deret Taylor

2.3 Metode Newton dan Orde Konvergensinya

Metode Newton diperoleh dari turunan Deret Taylor Orde 1. Misalkan fungsi f dapat diekspansi di sekitar $x = x_n$ menggunakan deret Taylor dengan x_n pendekatan $f(x) = 0$, jika $f(x)$ diekspansi di sekitar $x = x_n$ sampai orde pertama, maka diperoleh

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) \tag{2.20}$$

Karena $f(x) = 0$, selanjutnya distribusikan ke persamaan (2.20) dengan mengambil $x = x_{n+1}$ sehingga

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n)$$

$$(x_{n+1} - x_n) f'(x_n) = -f(x_n)$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{2.21}$$

persamaan di atas merupakan rumus umum Metode Newton.

Berikut ini akan dibahas mengenai error metode Newton yang menunjukkan nilai orde konvergensinya.

Teorema 2.2: Diberikan $f(x)$ adalah fungsi bernilai rill yang mempunyai turunan pertama, kedua dan ketiga pada interval (a,b). Jika $f(x)$ mempunyai akar α pada interval (a,b) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat ke α, maka metode iterasi pada persamaan (2.21) memenuhi persamaan galat

$$e_{n+1} = C_2 e_n^2 + O(e_n^3) \tag{2.22}$$

dimana $e_n = x_n - \alpha$ dan $C_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad k = 1,2,3,\cdots$

Bukti :

Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha)=0$. Asumsikan $f'(x)\neq 0$ dan $x_n=\alpha+e_n$, dan dengan menggunakan rumus ekspansi Taylor untuk mengaproksimasi fungsi *f* di sekitar x_n, diperoleh

$$f(x_n)=f(\alpha+e_n)$$

$$=f(\alpha)+f'(\alpha)e_n+\frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3+O(e_n^4) \qquad (2.23)$$

karena *f*(α)=0, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.23) diperoleh

$$f(x_n)=f'(\alpha)\left(e_n+\frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)}+\frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)}+\frac{O(e_n^4)}{f'(\alpha)}\right)$$

$$=f'(\alpha)\left(e_n+\frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)}+\frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)}+O(e_n^4)\right)$$

$$=f'(\alpha)\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right) \qquad (2.24)$$

Jika untuk $f'(x_n)$ dilakukan ekspansi Taylor di sekitar $x=\alpha$ maka

$$f'(x_n)=f'(\alpha)\left(1+\frac{f''(\alpha)e_n}{f'(\alpha)}+\frac{1}{2!}\frac{f'''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)}+\frac{O(e_n^3)}{f'(\alpha)}\right)$$

$$=f'(\alpha)\left(1+\frac{f''(\alpha)e_n}{f'(\alpha)}+\frac{1}{2!}\frac{f'''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)}+O(e_n^3)\right)$$

$$=f'(\alpha)\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right) \qquad (2.25)$$

Apabila persamaan (2.24) dibagi dengan persamaan (2.25) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\frac{f'(\alpha)\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)}{f'(\alpha)\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)}$$

$$=\frac{\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)}{\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)}$$

$$=\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)\times\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)^{-1}$$

$$= \left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times (1 - \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$+ \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)^2 - \ldots$$

$$= \left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) + \left(4C_2^2 e_n^2 + \ldots\right)\right)$$

$$= \left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - 2C_2 e_n + \left(4C_2^2 - 3C_3\right) e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$= e_n - C_2 e_n^2 + O(e_n^3) \tag{2.26}$$

Selanjutnya persamaan (2.26) substitusikan ke persamaan (2.21) dan diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \left(e_n - C_2 e_n^2 + O(e_n^3)\right) \tag{2.27}$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, maka persamaan (2.27) menjadi

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - e_n + C_2 e_n^2 + O(e_n^3)) \tag{2.28}$$

Penyelesaiaan persamaan (2.28) memberikan

$$e_{n+1} = C_2 e_n^2 + O(e_n^3)$$

2.4 Metode Newton Ganda dan Orde Konvergensinya

Pandang persamaan metode Newton Ganda pada persamaan (1.2) sebagai berikut:

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Berikut ini akan dibahas mengenai error metode Newton Ganda yang menunjukkan orde konvergensinya.

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai rill yang mempunyai turunan di $f : I \subseteq R \to R$, untuk I interval terbuka. Jika x_0 menghampiri α maka persamaan di atas mempunyai orde konvergensi tingkat empat dengan persamaan galat

$$e_{n+1} = 2c_2{}^3 e_n{}^4 + O(e_n{}^5) \tag{2.29}$$

di mana $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_k = f^{(k)}(\alpha)/k!f'(\alpha)$.

Bukti: Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha)=0$. Asumsikan $f'(x)=0$ dan $x_n = \alpha + e_n$. Selanjutnya dengan menggunakan rumus ekspansi Taylor untuk mengaproksimasi fungsi f di sekitar x_n, diperoleh

$$f(x_n) = (\alpha + e_n)$$

$$= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!} + f^{(3)}(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.30}$$

karena $f(\alpha)=0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.30) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f^{(3)}(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)} + O(e_n^4)\right) \tag{2.31}$$

misalkan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ maka persamaan (2.31) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right] \tag{2.32}$$

Cara yang sama dilakukan untuk mendapatkan $f'(x_n)$ sehingga diperoleh:

$$f'(x_n) = (\alpha + e_n)$$

$$= f'(\alpha) + f''(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f^{(3)}(\alpha)e_n^2 + O(e_n^3)$$

$$= f'(\alpha)\left(1 + \frac{f''(\alpha)e_n}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f^{(3)}(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + O(e_n^3)\right)$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] \tag{2.33}$$

Selanjutnya dilakukan pembagian terhadap persamaaan (2.32) dan (2.33)

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)\left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]}{f'(\alpha)\left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right]}$$

$$= \frac{\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right)}{\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O\left(e_n^3\right)\right)}$$

$$= \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) \times \left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O\left(e_n^3\right)\right)^{-1}$$

$$= \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) \times \left(1 - \left(2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O\left(e_n^3\right)\right)\right.$$

$$\left. + 2\left(c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O\left(e_n^3\right)\right)^2 - \ldots\right)$$

$$= \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) \times \left(1 - \left(2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O\left(e_n^3\right)\right) + \left(4c_2^2 + \ldots\right)\right)$$

$$= \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) \times \left(1 - 2c_2 e_n + \left(4c_2^2 - 3c_3\right)e_n^2 + O\left(e_n^3\right)\right)$$

sehingga diperoleh,

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2 e_n^2 + 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right) \qquad (2.34)$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (2.34) ke persamaan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \left(e_n - c_2 e_n^2 + 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) \qquad (2.35)$$

Oleh karena $x_n = \alpha + e_n$, maka persamaan (2.35) menjadi

$$= \alpha + e_n - \left(e_n - c_2 e_n^2 + 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right)$$

$$= \alpha + c_2 e_n^2 - 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right) \qquad (2.36)$$

Dengan demikian, maka

$$f(y_n) = f'(\alpha)\left[c_2 e_n^2 - 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right]$$

dan

$$f'(y_n) = f'(\alpha)\left[1 + 2{c_2}^2 e_n^2 - 4c_2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right]$$

Selanjutnya, dengan cara yang sama maka diperoleh

$$\frac{f(y_n)}{f'(y_n)} = \frac{f'(\alpha)\left[c_2 e_n^2 - 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right]}{f'(\alpha)\left[1 + 2{c_2}^2 e_n^2 + 4c_2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right]}$$

$$= \left(c_2 e_n^2 - 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) \times \left(1 + 2{c_2}^2 e_n^2 + 4c_2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right)^{-1}$$

$$= c_2 e_n{}^2 - 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 - 2c_2{}^3 e_n{}^4 + O\left(e_n^5\right) \tag{2.37}$$

Kemudian, substitusikan persamaan (2.36) dan (2.37) ke dalam persamaan (1.2) sehingga diperoleh

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

$$z_n = \left(\alpha + c_2 e_n^2 - 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) - \left(c_2 e_n{}^2 - 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 - 2c_2{}^3 e_n{}^4 + O\left(e_n^5\right)\right)$$

$$z_n = \alpha + 2c_2{}^3 e_n{}^4 + O(e_n{}^5) \tag{2.38}$$

Oleh karena $z_n = e_{n+1} + \alpha$, maka persamaan (2.38) menjadi

$$e_{n+1} + \alpha = \alpha + 2c_2{}^3 e_n{}^4 + O(e_n{}^5)$$

$$e_{n+1} = 2c_2{}^3 e_n{}^4 + O(e_n{}^5)$$

2.5 Kelengkungan Kurva

Berikut ini akan diberikan konsep tentang kelengkungan kurva yang akan diguunakan untuk memodifikasi persamaan Newton Ganda.

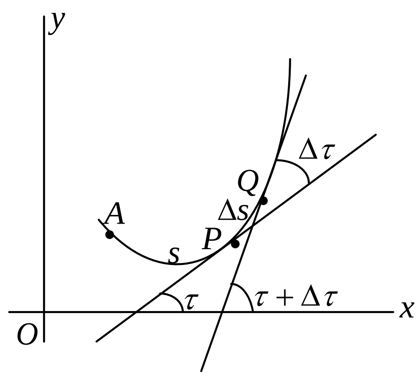
Young Il-Kim (2010) dalam penelitiannya yang berjudul *Some Third-Order Curvature Based Methods for solving Nonlinear Equations* melibatkan fungsi $f(x_n)$ dengan $f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$, yang mana x_n merupakan iterasi ke *n*. Dengan mempertimbangkan kelengkungan lingkaran yang mempunyai garis singgung pada titik $(x_n, f(x_n))$ pada sebuah kurva $f(x)$, dengan $f(x)$ mempunyai turunan pertama yang kontinu dan $h(x) = g(x_n)(x - x_n)$ melalui titik $(x_n, 0)$, di mana *g* adalah fungsi yang akan ditentukan kemudian. Sehingga mudah ditunjukkan bahwa kelengkungan kurva di $(x_n, f(x_n))$ adalah sebagai berikut:

$$\left(x - x_n + \frac{f(x_n)\left[1 + f'(x_n)^2\right]}{f''(x_n)}\right)^2 + \left(y - f(x_n) + \frac{1 + f'(x_n)^2}{f''(x_n)}\right)^2 = \frac{(1 + f'(x_n)^2)^3}{f''(x_n)^2} \tag{2.39}$$

Persamaan (2.35) diperoleh dengan cara sebagai berikut:

Kelengkungan K dari sebuah kurva $f(x)$ di sebarang titik P pada kurva tersebut didefinisikan sebagai laju perubahan arah kurva di P, yaitu sudut inklinasi τ dari garis singgung di P, terhadap panjang busur s. Secara intuitif, kelengkungan tersebut menyatakan seberapa cepat garis singgung membelok. Jadi, kelengkungan besar bila kurva membengkok dengan tajam (Frank Ayres, 2004).

Kelengkungan kurva disebarang titik P dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.2. Kelengkungan K disebarang titik P

Sebagai rumus untuk kelengkungan itu, maka didapatkan:

$$K = \frac{d\tau}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s} = \frac{\dfrac{d^2 f(x_n)}{dx^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{df(x_n)}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{f''(x_n)}{\left(1 + f'(x_n)^2\right)^{3/2}} \quad (2.40)$$

Biasanya, K didefinisikan positif, sehingga tanda untuk K diabaikan.

Selanjutnya, jari-jari kelengkungan R di titik P pada kurva didefinisikan oleh

$$R = \left|\frac{1}{K}\right| \; ; \; K \neq 0 \quad (2.41)$$

Sehingga

$$R = \left| \frac{1}{\dfrac{f''(x_n)}{\left(1 + f'(x_n)^2\right)^{3/2}}} \right| = \frac{\left(1 + f'(x_n)^2\right)^{3/2}}{f''(x_n)} \quad (2.42)$$

Sedangkan pusat kelengkungan sebuah titik $P(x, f(x_n))$ pada kurva adalah pusat *C* dari lingkaran kelengkungan di *P*. Koordinat (α, β) dari pusat kelengkungan diberikan oleh:

$$\alpha = x - \frac{\frac{df(x_n)}{dx}\left[1+\left(\frac{df(x_n)}{dx}\right)^2\right]}{d^2 f(x_n)/dy^2} = x - \frac{f'(x_n)\left[1+f'(x_n)^2\right]}{f''(x_n)} \tag{2.43}$$

dan

$$\beta = f(x) + \frac{1+\left(\frac{df(x_n)}{dx}\right)^2}{d^2 f(x_n)/dy^2} = f(x) + \frac{1+f'(x_n)^2}{f''(x_n)} \tag{2.44}$$

Sedemikian sehingga, untuk kelengkungan kurva pada sebarang titik dapat dirumuskan sebagai:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

$$\left(x - x_n + \frac{f(x_n)\left[1+f'(x_n)^2\right]}{f''(x_n)}\right)^2 + \left(y - f(x_n) + \frac{1+f'(x_n)^2}{f''(x_n)}\right)^2 = \left(\frac{\left(1+f'(x_n)^2\right)^{3/2}}{f''(x_n)}\right)^2$$

$$\left(x - x_n + \frac{f(x_n)\left[1+f'(x_n)^2\right]}{f''(x_n)}\right)^2 + \left(y - f(x_n) + \frac{1+f'(x_n)^2}{f''(x_n)}\right)^2 = \frac{(1+f'(x_n)^2)^3}{f''(x_n)^2}$$

Contoh 2.4: Tentukan persamaan lingkaran dengan kelengkungan $2xy + x + y = 4$ di titik (1,1)!

Jawab:

Diketahui $2xy + x + y = 4$. Kemudian, dengan mendiferensialkan sampai dengan turunan ke dua terhadap persamaan tersebut dan mensubstitusikan titik (1,1) diperoleh

$$2y + 2xy' + 1 + y' = 0$$

$$2 + 2y' + 1 + y' = 0$$

$$y' = -1$$

dan turunan keduanya

$$4y' + 2xy'' + y'' = 0$$

$$4 + 2y'' + y'' = 0$$

$$y'' = \frac{4}{3}$$

Sedemikian sehingga didapatkan

$$1 + (y')^2 = 2$$

$$K = \frac{d\tau}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{4/3}{2\sqrt{2}}$$

$$R = \left|\frac{1}{K}\right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{d^2 y / dy^2} = x - \frac{y'\left[1 + (y')^2\right]}{y''} = 1\frac{-1(2)}{4/3} = \frac{5}{2}$$

$$\beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{d^2 y / dy^2} = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = 1 + \frac{2}{4/3} = \frac{5}{2}$$

Jadi persamaan lingkarannya adalah

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan skripsi ini menggunakan metode *research library* (penelitian kepustakaan) yang bertujuan mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dalam penelitian yang berasal dari buku-buku, jurnal serta artikel yang berhubungan dengan penelitian yang akan diuraikan menjadi dasar penelitian.

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan metode Newton ganda orde empat seperti pada persamaan (2), yaitu:

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dan persamaan galatnya $e_{n+1} = 2c_2^{\,3}e_n^{\,4} + O(e_n^{\,5})$.

2. Mendefinisikan Kelengkungan Kurva di $\left(z_n, f'(z_n)\right)$ sehingga diperoleh persamaan baru

$$\left(x - z_n + \frac{f'(z_n)\left[1 + f'(z_n)^2\right]}{f''(z_n)}\right)^2 + \left(y - f'(z_n) + \frac{1 + f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right)^2 = \frac{(1 + f'(z_n)^2)^3}{f''(z_n)^2} \quad (3.1)$$

3. Mengaproksimasikan persamaan (3.1) pada titik $\left(x_{n+1}, 0\right)$ terhadap sumbu x.

4. Hasil aproksimasi persamaan (3.1) pada titik $\left(x_{n+1}, 0\right)$ terhadap sumbu x diaproksimasikan kembali terhadap

$$f''(z_n) \approx \frac{f'(w_n) - f'(z_n)}{w_n - z_n} \quad (3.2)$$

dengan

$$w_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

5. Menentukan orde konvergensi yang dihasilkan berdasarkan rumusan iterasi.

6. Membuat beberapa fungsi simulasi numerik menggunakan bahasa pemograman *Matlab*.
7. Membandingkan dengan hasil penelitian lain, seperti metode Newton (Orde konvergensi dua), Newton Ganda (Orde konvergensi empat), Ostrowski modifikasi (Orde konvergensi delapan) dan Jarrat modifikasi (Orde konvergensi dua belas).

BAB IV
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai modifikasi metode Newton Ganda menggunakan Kelengkungan Kurva, orde konvergensi dan membuat simulasi numeriknya serta membandingkannya dengan dengan hasil penelitian lain, seperti metode Newton (Orde konvergensi tingkat 2), Newton Ganda (Orde konvergensi 4), metode Jarrat yang dimodifikasi menggunakan kelengkungan kurva dengan orde konvergensi dua belas oleh Young Il-Kim (2010), dan modifikasi metode Ostrowski dengan orde konvergensi delapan oleh Guofeng Zhang (2009).

4.1 Modifikasi Metode Newton Ganda Menggunakan Kelengkungan Kurva

Pada persamaan (1.2) diketahui rumusan metode Newton Ganda sebagai berikut:

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dan pada persamaan (2.33) rumusan Kelengkungan Kurva diketahui sebagai berikut:

$$\left(x - x_n + \frac{y_n\left[1 + {y'_n}^2\right]}{y''_n}\right)^2 + \left(y - y_n + \frac{1 + {y'_n}^2}{y''_n}\right)^2 = \frac{(1 + {y'_n}^2)^3}{{y''_n}^2}$$

Selanjutnya, rumusan kelengkuan kurva yang berada pada $\left(z_n, f'(z_n)\right)$ dapat dirumuskan kembali, sehingga diperoleh persamaan baru seperti terdapat pada persamaan (3.1), yaitu:

$$\left(x - z_n + \frac{f'(z_n)\left[1 + f'(z_n)^2\right]}{f''(z_n)}\right)^2 + \left(y - f'(z_n) + \frac{1 + f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right)^2 = \frac{(1 + f'(z_n)^2)^3}{f''(z_n)^2}$$

Persamaan (3.1) di atas selanjutnya diaproksimasi pada titik $(x_{n+1},0)$ terhadap sumbu x, sehingga diperoleh

$$\left(x_{n+1}-z_n+\frac{f'(z_n)\left[1+f'(z_n)^2\right]}{f''(z_n)}\right)^2+\left(0-f'(z_n)+\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right)^2=\frac{(1+f'(z_n)^2)^3}{f''(z_n)^2} \tag{4.1}$$

Persamaan (4.1) dapat dijabarkan menjadi

$$(x_{n+1}-z_n)^2+2(x_{n+1}-z_n)\left(\frac{f'(z_n)\left[1+f'(z_n)^2\right]}{f''(z_n)}\right)+\left(\frac{f'(z_n)\left[1+f'(z_n)^2\right]}{f''(z_n)}\right)^2$$

$$+f(z_n)^2+2f(z_n)\left[\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right]+\left[\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right]^2=\frac{\left(1+f'(z_n)^2\right)^3}{f''(z_n)^2} \tag{4.2}$$

Selanjutnya, persamaan (4.2) dijabarkan kembali sehingga didapat

$$(x_{n+1}-z_n)^2+2(x_{n+1}-z_n)\left(\frac{f'(z_n)\left[1+f'(z_n)^2\right]}{f''(z_n)}\right)+f(z_n)^2+2f(z_n)\left[\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right]$$

$$=\frac{\left(1+f'(z_n)^2\right)^3}{f''(z_n)^2}-\left(\frac{f'(z_n)\left[1+f'(z_n)^2\right]}{f''(z_n)}\right)^2-\left[\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right]^2 \tag{4.3}$$

Kemudian, persamaan (4.3) difaktorisasi dengan faktor $1+f'(z_n)^2$ sehingga persamaan (4.3) menjadi

$$(x_{n+1}-z_n)^2+2(x_{n+1}-z_n)\left(\frac{f'(z_n)\left[1+f'(z_n)^2\right]}{f''(z_n)}\right)+f(z_n)^2+2f(z_n)\left[\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right]$$

$$=\frac{\left(1+f'(z_n)^2\right)^2\left(1+f'(z_n)^2-f'(z_n)^2-1\right)}{f''(z_n)^2} \tag{4.4}$$

Oleh karena aproksimasinya pada titik $(x_{n+1},0)$, maka persamaan (4.4) menjadi

$$(x_{n+1}-z_n)^2+2(x_{n+1}-z_n)\left(\frac{f'(z_n)\left[1+f'(z_n)^2\right]}{f''(z_n)}\right)+f(z_n)^2+2f(z_n)\left[\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right]$$

$$=\frac{\left(1+f'(z_n)^2\right)^2(0)}{f''(z_n)^2}$$

$$\left(x_{n+1}-z_n\right)^2+2\frac{f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}\left(x_{n+1}-z_n\right)+f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}=0 \quad (4.5)$$

Persamaan (4.5) di atas dapat ditulis kembali menjadi suatu persamaan baru dengan melakukan manipulasi aljabar, sehingga diperoleh

$$\left(x_{n+1}-z_n\right)^2+2\frac{f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}\left(x_{n+1}-z_n\right)=-f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)} \quad (4.6)$$

Kemudian, persamaan (4.6) difaktorisasi terhadap $x_{n+1}-z_n$ sehingga persamaan (4.6) menjadi

$$\left(x_{n+1}-z_n\right)\left[\left(x_{n+1}-z_n\right)+2\frac{f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}\right]=-f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)} \quad (4.7)$$

Selanjutnya, dengan melakukan manipulasi aljabar terhadap persamaan (4.7) didapat

$$\left(x_{n+1}-z_n\right)=-\frac{f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}}{\left[\left(x_{n+1}-z_n\right)+2\frac{f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}\right]} \quad (4.8)$$

Jika z_n pada ruas kiri persamaan (4.8) dipindahkan ke ruas kanan, maka diperoleh

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}}{\left[\left(x_{n+1}-z_n\right)+2\frac{f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}\right]} \quad (4.9)$$

Variabel x_{n+1} yang terletak disebelah kanan persamaan (4.9) di atas disubstitusikan dengan iterasi Newton yang menghasilkan

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}}{\left[\left(z_n-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}-z_n\right)+2\frac{f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}\right]}$$

$$= z_n - \frac{f(z_n)^2 + 2f(z_n)\dfrac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}}{\dfrac{2f'(z_n)^2(1+f'(z_n)^2) - f(z_n)f''(z_n)}{f'(z_n)f''(z_n)}}$$

$$= z_n - \frac{f'(z_n)f''(z_n)f(z_n)^2 + 2f(z_n)f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{2f'(z_n)^2(1+f'(z_n)^2) - f(z_n)f''(z_n)} \tag{4.10}$$

Pada persamaan (4.10) dibutuhkan evaluasi turunan kedua. Untuk itu, turunan kedua pada persamaan (4.10) di atas diaproksimasikan pada

$$f''(z_n) \approx \frac{f'(w_n) - f'(z_n)}{w_n - z_n} \tag{4.11}$$

dengan

$$w_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{4.12}$$

Sedemikian sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f'(z_n)f''(z_n)f(z_n)^2 + 2f(z_n)f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{2f'(z_n)^2(1+f'(z_n)^2) - f(z_n)f''(z_n)}$$

$$= z_n - \frac{f'(z_n)\dfrac{(f'(w_n)-f'(z_n))}{w_n - z_n}f(z_n)^2 + 2f(z_n)f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{2f'(z_n)^2(1+f'(z_n)^2) - f(z_n)\dfrac{(f'(w_n)-f'(z_n))}{w_n - z_n}} \tag{4.13}$$

Oleh karena $w_n = z_n - \dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$, maka persamaan (4.13) menjadi

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f'(z_n)\dfrac{[f'(w_n)-f'(z_n)]}{z_n - \dfrac{f'(z_n)}{f(z_n)} - z_n}f(z_n)^2 + 2f(z_n)f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{2f'(z_n)^2(1+f'(z_n)^2) - f(z_n)\dfrac{[f'(w_n)-f'(z_n)]}{z_n - \dfrac{f'(z_n)}{f(z_n)} - z_n}} \tag{4.14}$$

Selanjutnya, persamaan (4.14) disederhanakan sehinga didapat

$$x_{n+1} = z_n - \frac{-f'(z_n)(f'(w_n) - f'(z_n))f(z_n) + 2f(z_n)(1 + f'(z_n)^2)}{2f'(z_n)(1 + f'(z_n)^2) + (f'(w_n) - f'(z_n))}$$

$$= z_n - \frac{-f'(z_n)f'(w_n)f(z_n) + f'(z_n)^2 f(z_n) + 2f(z_n) + 2f'(z_n)^2 f(z_n)}{2f'(z_n) + 2f'(z_n)^3 + f'(w_n) - f'(z_n)}$$

$$= z_n - \frac{f(z_n)\left[2 + 3f'(z_n)^2 - f'(z_n)f'(w_n)\right]}{f'(z_n) + 2f'(z_n)^3 + f'(w_n)} \qquad (4.15)$$

Cara berbeda dapat diturunkan dengan memanipulasi persamaan (4.5). Variabel $(x_{n+1} - z_n)^2$ diganti dengan iterasi Newton yang menghasilkan

$$\left(z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - z_n\right)^2 + 2\frac{f'(z_n)(1 + f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}\left(x_{n+1} - z_n\right) + f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1 + f'(z_n)^2}{f''(z_n)} = 0$$

$$\left(\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right)^2 + 2\frac{f'(z_n)(1 + f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}\left(x_{n+1} - z_n\right) + f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1 + f'(z_n)^2}{f''(z_n)} = 0 \qquad (4.16)$$

Persamaan (4.16) dapat ditulis kembali menjadi

$$2\frac{f'(z_n)(1 + f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}\left(x_{n+1} - z_n\right) = -\left(\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right)^2 - f(z_n)^2 - 2f(z_n)\frac{1 + f'(z_n)^2}{f''(z_n)} \qquad (4.17)$$

Selanjutnya, variabel $2\frac{f'(z_n)(1 + f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}$ pada ruas kiri persamaan (4.17) dipindahkan ke ruas kanan, sehingga diperoleh

$$\left(x_{n+1} - z_n\right) = \frac{-\left(\frac{f(z_n)^2}{f'(z_n)^2} + f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1 + f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right)}{2\frac{f'(z_n)(1 + f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}}$$

$$\left(x_{n+1} - z_n\right) = \frac{-\left(\frac{f(z_n)^2}{f'(z_n)^2} + f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1 + f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right)f''(z_n)}{2f'(z_n)(1 + f'(z_n)^2)} \qquad (4.18)$$

Persamaan (4.18) dapat dijabarkan menjadi

$$\left(x_{n+1}-z_n\right)=-\left(\frac{f(z_n)^2 f''(z_n)}{2f'(z_n)^3(1+f'(z_n)^2)}+\frac{f(z_n)^2 f''(z_n)}{2f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}\right.$$

$$\left.+\frac{f(z_n)}{f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}+\frac{f(z_n)f'(z_n)}{(1+f'(z_n)^2)}\right) \tag{4.19}$$

Kemudian, persamaan (4.19) diuraikan kembali sehingga diperoleh

$$\left(x_{n+1}-z_n\right)=-\frac{f(z_n)^2 f''(z_n)+f(z_n)^2 f''(z_n)f'(z_n)^2+2f'(z_n)^3 f(z_n)f'(z_n)}{2f'(z_n)^3(1+f'(z_n)^2)}$$

$$\left(x_{n+1}-z_n\right)=-\frac{\left(f(z_n)f''(z_n)+2f'(z_n)^2\right)(1+f'(z_n)^2)f(z_n)}{2f'(z_n)^3(1+f'(z_n)^2)}$$

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)^2 f''(z_n)+2f(z_n)f'(z_n)^2}{2f'(z_n)^3} \tag{4.20}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan aproksimasi persamaan (4.11) terhadap persamaan (4.20) diatas, maka didapatkan

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)^2\,\dfrac{f'(w_n)-f'(z_n)}{w_n-z_n}+2f(z_n)f'(z_n)^2}{2f'(z_n)^3}$$

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)^2\,\dfrac{f'(w_n)-f'(z_n)}{-\dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}}+2f(z_n)f'(z_n)^2}{2f'(z_n)^3}$$

$$x_{n+1}=z_n-\frac{-f'(z_n)f(z_n)f'(w_n)+f(z_n)f'(z_n)^2+2f(z_n)f'(z_n)^2}{2f'(z_n)^3}$$

$$x_{n+1}=z_n-\frac{3f(z_n)f'(z_n)^2-f'(z_n)f(z_n)f'(w_n)}{2f'(z_n)^3}$$

$$x_{n+1}=z_n-\frac{1}{2}\left(3-\frac{f'(w_n)}{f'(z_n)}\right)\frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{4.21}$$

dengan $w_n=z_n-\dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$, $z_n=y_n-\dfrac{f(y_n)}{f'(y_n)}$ dan $y_n=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Persamaan (4.21) di atas merupakan metode iterasi baru yang diperoleh dari modifikasi metode Newton Ganda menggunakan kelengkungan kurva. Aproksimasi nilai suatu fungsi *f* dengan menggunakan persamaan (4.21) untuk setiap iterasi dilakukan dengan enam evaluasi fungsi, yaitu tiga evaluasi fungsi *f* dan tiga f', dan terdiri dari empat tahap yaitu mencari y_n, z_n, w_n dan x_{n+1}.

4.2 Analisa Kekonvergenan

Pada sub bab ini akan dibahas mengenai analisa kekonvergenan persamaan (4.21) di atas untuk mengetahui orde konvergensi dari persamaan (4.21) itu. Berikut ini teorema yang memberikan persamaan tingkat kesalahan dari persamaan (4.21) yang menunjukkan orde konvergensinya.

Teorema 4.2.1 Diberikan $f(x)$ adalah fungsi bernilai rill yang mempunyai turunan di $f : I \subseteq R \to R$, untuk I interval terbuka. Jika x_0 menghampiri α maka persamaan (4.21) di atas mempunyai orde konvergensi delapan dengan persamaan galat

$$e_{n+1} = -4c_2{}^7 e_n{}^8 + O(e_n{}^9) \tag{4.22}$$

dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $C_k = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, k = 1, 2, 3, ...

Bukti: Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(x) = 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$. Pada persamaan (2.30) telah diketahui bahwa

$$\begin{aligned}
y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&= x_n - \left(e_n - c_2 e_n^2 + 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) \\
&= \alpha + e_n - \left(e_n - c_2 e_n^2 + 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) \\
&= \alpha + c_2 e_n^2 - 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)
\end{aligned}$$

Dengan demikian maka diperoleh

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

$$z_n = \left(\alpha + c_2 e_n^2 - 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) - \left(c_2 e_n^{\ 2} - 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 - 2c_2^{\ 3} e_n^{\ 4} + O\left(e_n^5\right)\right)$$

$$z_n = \alpha + 2c_2^{\ 3} e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5}) \tag{4.23}$$

maka

$$f(z) = f'(\alpha)\left(2c_2^{\ 3} e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)$$

$$f'(z) = f'(\alpha)\left(1 + 4c_2^{\ 4} e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)$$

Sehingga

$$\frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = \frac{f'(\alpha)\left(2c_2^{\ 3} e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)}{f'(\alpha)\left(1 + 4c_2^{\ 4} e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)}$$

$$= \frac{\left(2c_2^{\ 3} e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)}{\left(1 + 4c_2^{\ 4} e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)}$$

$$= \left(2c_2^{\ 2} e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right) \times \left(1 + 4c_2^{\ 4} e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)^{-1}$$

$$= \left(2c_2^{\ 2} e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right) \times \left(1 - \left(4c_2^{\ 4} e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right) + \left(4c_2^{\ 4} e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)^2 - \ldots\right)$$

$$= 2c_2^{\ 3} e_n^{\ 4} - 8c_2^{\ 7} e_n^{\ 8} + 32c_2^{\ 11} e_n^{\ 12} + \left(1 + (-2c_2^{\ 3} - 4c_2^{\ 4})e_n^{\ 4}\right.$$

$$\left. + (16c_2^{\ 7} + 16c_2^{\ 8})e_n^{\ 8}\right)O(e_n^{\ 5}) + \left(1 + (2c_2^{\ 3} + 8c_2^{\ 4})e_n^{\ 4}\right)O(e_n^{\ 5})^2 + O(e_n^{\ 5})^3$$

$$= 2c_2^{\ 3} e_n^{\ 4} - 8c_2^{\ 7} e_n^{\ 8} + O(e_n^{\ 9}) \tag{4.24}$$

Kemudian substitusikan persamaan (4.22) dan (4.23) ke dalam persamaan (4.12) sehingga didapatkan

$$w_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

$$= \left(\alpha + 2c_2^{\ 2} e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right) - \left(2c_2^{\ 3} e_n^{\ 4} - 8c_2^{\ 7} e_n^{\ 8} + O(e_n^{\ 9})\right)$$

$$= \alpha + 8c_2^{\ 7} e_n^{\ 8} + O(e_n^{\ 9})$$

Sedemikian sehingga

$$f(w_n) = f'(\alpha)\left(8c_2^{\ 7}e_n^{\ 8} + O(e_n^{\ 9})\right)$$

dan

$$f'(w_n) = f'(\alpha)\left(1 + 16c_2^{\ 8}e_n^{\ 8} + O(e_n^{\ 9})\right)$$

Selanjutnya, dengan cara yang sama maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{f'(w_n)}{f'(z)} &= \frac{f'(\alpha)\left(1 + 16c_2^{\ 8}e_n^{\ 8} + O(e_n^{\ 9})\right)}{f'(\alpha)\left(1 + 4c_2^{\ 4}e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)} \\
&= \frac{\left(1 + 16c_2^{\ 8}e_n^{\ 8} + O(e_n^{\ 9})\right)}{\left(1 + 4c_2^{\ 4}e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)} \\
&= \left(1 + 16c_2^{\ 8}e_n^{\ 8} + O(e_n^{\ 9})\right) \times \left(1 + 4c_2^{\ 4}e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)^{-1} \\
&= \left(1 + 16c_2^{\ 8}e_n^{\ 8} + O(e_n^{\ 9})\right) \times \left(1 - \left(4c_2^{\ 4}e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)\left(4c_2^{\ 4}e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)^2 + \ldots\right) \\
&= 1 - 4c_2^{\ 4}e_n^{\ 4} + 32c_2^{\ 8}e_n^{\ 8} - 64c_2^{\ 12}e_n^{\ 12} + O(e_n^{\ 13}) \\
&= 1 - 4c_2^{\ 4}e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.22), (4.23) dan (4.24) ke dalam persamaan (4.21) sehingga didapatkan

$$x_{n+1} = z_n - \frac{1}{2}\left(3 - \frac{f'(w_n)}{f'(z_n)}\right)\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, maka persamaan (4.10) menjadi

$$e_{n+1} + \alpha = \left(\alpha + 2c_2^{\ 3}e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right) - \frac{1}{2}\left(3 - \left(1 - 4c_2^{\ 4}e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right)\right)\left(2c_2^{\ 3}e_n^{\ 4} + O(e_n^{\ 5})\right) \tag{4.25}$$

Penyelesaian persamaan (4.25) memberikan

$$e_{n+1} = -4c_2^{\ 7}e_n^{\ 8} - 2c_2^{\ 4}e_n^{\ 4}O(e_n^{\ 5}) + c_2^{\ 3}e_n^{\ 4}O(e_n^{\ 5}) + \frac{1}{2}O(e_n^{\ 5})^2$$

$$e_{n+1} = -4c_2^{\ 7}e_n^{\ 8} + O(e_n^{\ 9})$$

4.3 Simulasi Numerik

Pada sub bab ini, akan diberikan simulasi numerik menggunakan *software* Matlab versi 7.0.4 untuk persamaan (4.21) yang bertujuan untuk menunjukkan keefektivan persamaan (4.21) tersebut. Selain itu, persamaan (4.21) akan dibandingkan jumlah jumlah iterasi beberapa metode iteratif dalam menghampiri akar persamaan. Fungsi-fungsi yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$f_1(x) = 2x\cos x + x - 3 \qquad \alpha \approx -3.5322516915364759$$

$$f_2(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 3 \qquad \alpha \approx 9.6335955628326951$$

$$f_3(x) = e^x + x - 20 \qquad \alpha \approx 2.8424389537844470$$

$$f_4(x) = x^3 - +4x^2 - 10 \qquad \alpha \approx 1.3652300134140968$$

$$f_5(x) = (x+2)e^x - 1 \qquad \alpha \approx -0.4428544010023885$$

Berdasarkan hasil perhitungan komputasi atau simulasi numerik diperoleh jumlah iterasi dari berbagai metode seperti: NW dinotasikan sebagai metode Newton dengan orde kovergensi dua, NG dinotasikan sebagai metode Newton Ganda dengan orde konvergensi empat, JMC dinotasikan sebagai metode Jarrat yang dimodifikasi menggunakan kelengkungan kurva dengan orde konvergensi dua belas oleh Young Il-Kim (2010), OM dinotasikan sebagai modifikasi metode Ostrowski dengan orde konvergensi delapan oleh Guofeng Zhang (2009) dan NGC dinotasikan sebagai persamaan (4.21) dengan orde konvergensi delapan.

Tabel.4.1. Perbandingan Jumlah Iterasi

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi				
		NW	NG	JMC	OM	NGC
$f_1(x)$	-4.8	6	3	2	3	3
$f_2(x)$	15.5	4	3	2	2	2
$f_3(x)$	0.0	12	6	3	10	4

$f_4(x)$	1.6	4	3	2	2	2
$f_5(x)$	2.0	8	4	3	3	5

BerdasarkanTabel 4.1 dapat dilihat bahwa secara umum metode iterasi dengan orde yang lebih tinggi memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan metode iterasi yang mempunyai orde konvergensi lebih rendah. Akan tetapi,pada beberapa fungsi, orde yang lebih tinggi memiliki iterasi yang lebih banyak dibandingkan metode iterasi yang orde konvergensi yang lebih rendah, seperti pada $f_3(x)$ dengan nilai awal 0.0, OM dengan orde konvergensi delapan memiliki iterasi yang lebih banyak dibandingan NG yang memiliki orde konvergensi empat. Selain itu, pada $f_5(x)$ dengan nilai awal 2.0, NGC dengan orde konvergensi delapan memiliki iterasi yang lebih banyak dibandingan NG yang memiliki orde konvergensi empat.

Hal ini dapat terjadi karena masing-masing metode mempunyai cara yang berbeda dalam menghampiri akar dari suatu persamaan, serta juga dapat terjadi akibat fungsi yang diberikan dan nilai awal yang diberikan pada fungsi itu.

Selain menggunakan iterasi, kekonvergenan juga dapat dilihat dengan menggunakan *Computational Order of Convergence* (COC), yaitu perhitungan orde konvergensi secara numerik. Berikut ini adalah tabel perbandingan COC dari berbagai metode tersebut diatas.

Tabel 4.2. Perbandingan Nilai COC

$f(x)$	x_0	COC				
		NW	NG	JMC	OM	NGC
$f_1(x)$	-4.8	1.99	3.90	Ttd	3.96	6.03
$f_2(x)$	15.5	2.00	3.74	Ttd	Ttd	Ttd
$f_3(x)$	0.0	2.00	3.97	10.83	2.01	6.09
$f_4(x)$	1.6	2.02	3.99	Ttd	Ttd	Ttd
$f_5(x)$	2.0	1.50	3.29	9.59	5.56	3.92

Tabel 4.2 mengambarkan perbandingan nilai orde konvergensi secara numerik. Tabel tersebut menunjukkan bahwa orde konvergensi pada setiap metode berbeda-beda. Hal ini dapat terjadi akibat fungsi serta nilai awal yang diberikan pada setiap metode. Secara umum hasil perhitungan orde konvergensi secara numerik (COC) untuk metode iterasi yang memiliki orde konvergensi yang lebih tinggi secara teori menunjukkan nilai COC lebih tinggi dibandingkan metode iterasi yang memiliki orde konvergensi yang lebih rendah.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Metode Newton Ganda memiliki orde konvergensi tingkat empat. Setelah Metode Newton Ganda dimodifikasi menggunakan kelengkungan kurva, maka di peroleh persamaan baru seperti pada persamaaan (4.21), yaitu:

$$x_{n+1} = z_n - \frac{1}{2}\left(3 - \frac{f'(w_n)}{f'(z_n)}\right)\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

dengan $w_n = z_n - \dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$, $z_n = y_n - \dfrac{f(y_n)}{f'(y_n)}$ dan $y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

dan persamaan errornya sebagai berikut:

$$e_{n+1} = -4c_2^{\,7} e_n^{\,8} + O(e_n^{\,9})$$

yang merupakan orde konvergensi delapan. Aproksimasi nilai suatu fungsi *f* dengan menggunakan persamaan (4.21) untuk setiap iterasi dilakukan dengan enam evaluasi fungsi, yaitu tiga evaluasi fungsi *f* dan tiga evaluasi fungsi f', dan terdiri dari empat tahap yaitu mencari y_n, z_n, w_n dan x_{n+1}.

Berdasarkan hasil simulasi numerik pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2, NGC secara umum memiliki iterasi yang lebih sedikit dan nilai COC yang lebih tinggi dibandingkan metode iterasi Newton dan Newton Ganda. Sehingga, metode ini lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinier dibandingkan metode lainnya yang memiliki orde konvergensi yang lebih rendah.

5.2 Saran

Tugas akhir ini penulis lakukan karena terilhami oleh Yong-Il Kim dan Changbun Chun (2010) yang telah memodifikasi metode Jarrat menggunakan Kelengkunngan Kurva. Pada skripsi ini penulis melakukan modifikasi metode Newton Ganda menggunakan kelengkunngan kurva.

Oleh sebab itu, disarankan pada pembaca untuk melakukan modifikasi terhadap metode Newton Ganda menggunakan Interpolasi Kuadratik dan membuat simulasi numeriknya dengan menggunakan bahasa pemograman dengan digit galat yang lebih tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Chapra, Steven C., Raymond P. Canale, *Numerical Methods for Engineers, fifth edition*, MC Graw Hill, Singapura, 2006.

F, Traub J., *Iterative Method for The Solution of Equations*, Prentice Hall, New York, 1964.

JR, Frank Ayres & Elliot Mendelson, *Kalkulus Edisi Keempat*, Erlangga, Jakarta, 2004.

Khattri, Sanjai K. & Ioannis K. Argyros, *How to Develop Fourth and Seventh Order Iterative Methods?*, Novi Sad J. Math, Vol. 40, No. 2, 2010

Kim, Yong-Il & Changbun Chun, *New Twelfth-Order Modifications of Jarratt's Method for Solving Nonlinear Equations*, Studies in Nonlinear Sciences 1,(1): 14-18,2010.

Kim, Yong-Il, Changbun Chun, Weonbae Kim, *Some Third-Order Curvature Based Methods for solving Nonlinear Equations*, Studies in Nonlinear Sciences 1,(3) :72-76,2010.

Purcell, Edwin J., Dale Varberg., Steven E. Rigdon, *Kalkulus Edisi Kedelapan. Jilid 2*, Erlangga, Jakarta. 2004.

Smith, Robert T. & Roland B. Minton, *Calculus Second Edition*, MC Graw Hill, New York, 2002.

Weerakon, S. & Fernando, T.G.I. *A Variant of Newton's Method With Accelerated Third-Order Convergence.* Applied Mathematics Letters. 13:87-93, 2000.