PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL PARABOLIK NONLINIER DENGAN MENGGUNAKAN MODIFIKASI METODE ITERASI VARIASI

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar Sarjana
Pada Jurusan Matematika

Oleh :

JELDI FANTRI
10654004478

UIN SUSKA

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2012

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL PARABOLIK NON LINIER DENGAN MENGGUNAKAN MODIFIKASI METODE ITERASI VARIASI

JELDI FANTRI
NIM:10654004478

Tanggal sidang :
Periode Wisuda :

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl.Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Skripsi ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier $u_t - u_{xx} = \phi(u) + g(x,t)$ menggunakan modifikasi metode iterasi variasi berdasarkan syarat batas $u(0,t) = u(1,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$. Berdasarkan hasil kajian diperoleh bahwa persamaan diferensial parabolik nonlinier dapat diselesaikan dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi, baik yang homogen maupun yang nonhomogen.

Kata kunci : Metode iterasi variasi, Modifikasi metode iterasi variasi, persamaan diferensial parabolik nonlinier.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini tepat pada waktunya. Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan tingkat sarjana, selanjutnya limpahan salawat serta salam kepada junjugan Nabi Besar Muhammad SAW pembawa petunjuk bagi seluruh umat manusia.

Pada penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu sudah sepantasnya penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayah dan ibu yang tidak pernah lelah dan tiada henti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi yang membuat penulis mampu untuk terus dan terus melangkah, pelajaran hidup, juga materi yang tak mungkin bisa terbalas. Jasa-jasamu kan selalu kukenang hingga akhir hayatku dan semoga Allah menjadikan jasa-jasamu sebagai amalan soleh, Amin..

Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. DR. H. M. Nasir, M.A. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Wartono, S.Si., M.Sc. dan Bapak M. Nizam Muhaijir, S.Si selaku pembimbing yang telah banyak membantu, mendukung, mengarahkan dan membimbing penulis dalam penulisan Tugas Akhir ini.
5. Ibu Fitri Aryani, S.Si,. M.Sc. selaku koordinator Tugas Akhir.
6. Bapak dan Ibu dosen jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim.

7. Ayahanda Edi Yarlis, A.R, dan Ibunda Nurhasiah, tak ada yang bisa diibaratkan untuk mengukur kasih sayang dan perhatianmu, begitu luas dan begitu banyak.
8. Adik-adikku tersayang yang selalu memberiku semangat, Eltya Nefri,Amd, dan Pahturasi, Semoga kita tetap tumbuh menjadi anak-anak yang membanggakan. Dan buat seluruh keluargaku yang telah memberikan perhatian, kasih sayang serta motivasi untukku.
9. Teman- teman dekatku yang selalu membantuku dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini yaitu : Farida Fitri, Hendri, Hanafi, Yunus, Laina, Devi, Adri, dan Aidil.
10. Teman-teman jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi pada umumnya dan khususnya angkatan 2006.
11. Seluruh pihak yang telah memberikan andil dalam proses penulisan Tugas Akhir ini sampai selesai yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Dalam penyusunan dan penulisan Tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin untuk menghindari kesalahan. Tapi sudah selayaknya sifat manusia tak luput dari kesalahan, seperti *tak ada gading yang tak retak,* tak ada manusia yang sempurna. Akhirnya penulis mengharapkan kepada pembaca Tugas Akhir ini agar memberikan saran dan kritik konstruktif. Semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan kontribusi yang bermanfaat. Amin…

Pekanbaru,

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Berbagai cabang ilmu pengetahuan seperti sosial, fisika, biologi, dan kimia bahkan dalam kehidupan sehari-hari seringkali muncul suatu permasalahan yang dapat dimodelkan ke dalam suatu model matematika. Salah satu model matematika yang sering digunakan adalah persamaan diferensial.

Beberapa model matematika dalam bentuk persamaan diferensial tersebut berupa persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memuat satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu variabel bebas.

Persamaan diferensial terdiri dari persamaan linier dan persamaan nonlinier, persamaan nonlinier terdiri dari beberapa macam persamaan diantaranya persamaan hiperbolik nonlinier, persamaan parabolik nonlinier, persamaan eliptik nonlinier, dan lain sebagainya. Persamaan-persamaan tersebut mempunyai penyelesaian yang berbeda-beda.

Penyelesaian persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan berbagai metode, diantaranya penyelesaian persamaan parabolik dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian oleh Ahcene Merad (2011), penyelesaian persamaan Klein-Gordon menggunakan metode iterasi variasi oleh Syed Tauseef Mohyud-Din, dan Ahmet Yildirim (2010), selanjutnya penyelesaian persamaan nonlinier parsial dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi dan metode homotopi perturbasi oleh Behrouz Raftari (2009), selanjutnya modifikasi dari metode iterasi variasi dan metode dekomposisi adomian untuk menyelesaikan persamaan Sine-Gordon oleh Syed Tauseef Mohyud-Din, Muhammad Aslam Noor dan Khalida Inayat Noor (2009).

Berdasarkan uraian di atas penulis tertarik untuk meneliti modifikasi metode iterasi variasi dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial parabolik nonlinier dengan judul " **Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Parabolik Nonlinier dengan Menggunakan Modifikasi Metode Iterasi Variasi** ".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana penyelesaian persamaan diferensial parsial parabolik nonlinier dengan persamaan umum $u_t - u_{xx} = \phi(u) + g(x,t)$ dan komponen nonlinier $\phi(u)$ menggunakan modifikasi metode iterasi variasi.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah tugas akhir ini penulis membatasi pada persamaan differensial parsial parabolik nonlinier dengan persamaan umumnya $u_t - u_{xx} = \phi(u) + g(x,t)$ dengan variabel bebas masing-masing x dan t, menggunakan modifikasi metode iterasi variasi.

1.4 Tujuan dan Manfaat

1. Tujuan penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk :

menyelesaikan persamaan diferensial parsial parabolik nonlinier $u_t - u_{xx} = \phi(u) + g(x,t)$ menggunakan modifikasi metode iterasi variasi.

2. Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan di atas, maka manfaat yang dapat diambil sebagai berikut :

a. Penulis dapat mengetahui tentang solusi eksak dari penyelesaian persamaan diferensial parsial parabolik nonlinier.

b. Dapat mengetahui apakah modifikasi metode iterasi variasi dapat atau tidak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial parabolik, baik yang homogen maupun yang nonhomogen.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulis , dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang digunakan, seperti: bentuk-bentuk persamaan diferensial parsial, klasifikasi persamaan diferensial parsial, metode iterasi variasi, metode dekomposisi adomian, modifikasi metode iterasi variasi.

Bab III Metodologi

Bab ini berisikan studi literatur yang digunakan penulis dan berisikan serta langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan dari tugas akhir ini.

Bab IV Pembahasan

Bab ini berisikan tentang modifikasi dari metode iterasi variasi yang digunakan untuk membahas persamaan diferensial parsial parabolik nonlinier dengan persamaan $u_t - u_{xx} = \phi(u) + g(x,t)$, serta memperlihatkan *grafik* akurasinya.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran-saran untuk pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

Adapun landasan teori yang digunakan pada tugas akhir ini sebagai berikut :

2.1 Bentuk - Bentuk Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu variabel bebas. Bentuk umum persamaan diferensial parsial orde dua dengan dua dimensi adalah :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \qquad (2.1)$$

Berdasarkan persamaan (2.1) maka, bentuk – bentuk dari persamaan diferensial parsial dapat di kelompokkan sebagai berikut :

a. Persamaan Diferensial Parabolik.

Persamaan (2.1) dikatakan persamaan diferensial parabolik jika $B^2 - 4AC = 0$. Persamaan diferensial parabolik biasanya merupakan persamaan yang tergantung pada waktu dan penyelesaiannya memerlukan kondisi awal dan syarat batas. Persamaan yang paling sederhana yaitu perambatan panas, dengan bentuk persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\left(u^2\right) \qquad (2.2)$$

b. Persamaan Diferensial Eliptik

Persamaan (2.1) dikatakan persamaan eliptik jika $B^2 - 4AC < 0$. Persamaan diferensial eliptik adalah persamaan yang berhubungan dengan masalah kesetimbangan atau tidak bergantung pada waktu dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas disekeliling daerah tinjauan. Seperti aliran air tanah dibawah bendungan dan karena adanya pemompaan serta difleksi pelat akibat pembebanan, dengan bentuk persamaan : .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.3)$$

c) Persamaan Diferensial Hiperbolik

Persamaan (2.1) dikatakan persamaan diferensial hiperbolik jika $B^2 - 4AC > 0$. Persamaan diferensial eliptik biasanya berhubungan dengan getaran atau permasalahan dimana terjadi diskontinu dalam waktu, seperti gelombang kejut yang terjadi diskontinu dalam kecepatan, dan rapat massa.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.4}$$

2.2 Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial dapat dibagi ke dalam beberapa kelompok, berdasarkan hal-hal sebagai berikut :

a) Berdasarkan Orde

Orde suatu persamaan diferensial adalah orde turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial tersebut.

Contoh :

i. $u_t - \frac{1}{2}(u^2)_x - u(1-u) = 0$, persamaan diferensial parsial orde 1

ii. $u_t = uu_{xx} - 2x^2$, persamaan diferensial parsial orde 2

b) Berdasarkan Linier dan Nonliniernya

Linier atau nonlinier suatu persamaan diferensial dapat dilihat dari koefisien suatu fungsi turunan, jika koefisiennya konstanta atau suatu fungsi lain maka persamaan itu disebut persamaan diferensial linier, sedangkan jika koefisiennya suatu fungsi integral dari fungsi diferensial yang ada pada persamaan tersebut maka persamaan itu disebut persamaan diferensial nonlinier.

Pada tugas akhir ini persamaan umum diferensial parabolik yang berbentuk $u_t - u_{xx} = \phi(u) + g(x,t)$ bisa berbentuk linier dan bisa berbentuk nonlinear, tetapi disini memisalkan fungsi $\phi(u)$ ke dalam bentuk nonlinier.

Contoh :

i. $u_t - \frac{1}{2}\left(x^2\right)u_{xx} = 0$, persamaan diferensial parsial linier

ii. $u_t - uu_{xx} = 0$, persamaan diferensial parsial nonlinier

c) Homogen dan Nonhomogen

Menentukan kehomogenan pada persamaan diferensial dapat dilihat dari fungsi persamaan diferensial itu sendiri. Menentukan homogen dari persamaan umum $u_t - u_{xx} = \phi(u) + g(x,t)$ yaitu apabila fungsi $g(x,t) = 0$ maka persamaan itu dikatakan homogen dan apabila fungsi $g(x,t) \neq 0$ maka fungsi itu nonhomogen.

Contoh :

i. $u_t - u_{xx} = 0$, persamaan diferensial homogen

ii. $u_t - u_{xx} = (\cos t - \sin t)e^{-2x}$, persamaan diferensial nonhomogen

2.3 Metode Iterasi Variasi

Metode iterasi variasi adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan menggunakan pengali Lagrange umum yang diidentifikasi secara optimal melalui teori yang variational, dan perkiraaan awal dapat dipilih secara bebas dengan kostanta yang tidak diketahui.

Bentuk umum dari persamaan diferensial adalah

$$L(u) + N(u) = g(x,t)$$

Persamaan di atas diubah menjadi :

$$L_t u + L_x u + Nu = g(x,t) \tag{2.5}$$

dengan $L_t, L_x,$ adalah operator linier $t, x,$ dan N adalah operator nonlinier dan $g(x,t)$ adalah fungsi kontinu yang diberikan.

Selajutnya persamaan (2.5) diubah ke dalam metode iterasi variasi yaitu:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda \{L_s u_n + (L_x + N)\tilde{u}_n - g(x,t)\} ds \tag{2.6}$$

dengan $u_0(x,t)$ ditetapkan

$u_0(x,t)$ adalah nilai awal yang diketahui

λ adalah fungsi pengali Lagrange

$\tilde{u}_n$ adalah variasi yang terbatas

$u_{n+1}, n \geq 0$, untuk mencari nilai fungsi pengali Lagrange (λ) digunakan persamaan :

$$\lambda(s) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

dengan m adalah banyak orde

Setelah didapat nilai fungsi pengali Lagrangenya, lalu disubstitusikan ke persamaan (2.6) untuk mencari nilai u_1, selanjutnya untuk mencari nilai $u_2, u_3 ... u_n$ sampai mendekati solusi eksaknya. Metode ini dapat ditulis dalam bentuk

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) \tag{2.7}$$

Pandang persamaan

$$u_t - u_{xx} = \phi(u) + g(x,t) \tag{2.8}$$

dengan nilai awalnya $u(x,0) = f(x)$. Persamaan (2.8) dapat diselesaikan dengan metode iterasi variasi yaitu :

persamaan (2.8) diubah menjadi $u_t - u_{xx} = \phi(u) + g(x,t)$. Untuk menyelesaikan persamaan (2.8) langkah pertama dicari fungsi pengali Lagrange yaitu :

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

Dengan m merupakan banyak orde pada persaman (2.8). Karena persamaan (2.8) nilai u hanya diturunkan sekali terhadap t maka $m=1$, sehingga didapat nilai fungsi pengali Lagrangenya :

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$
$$= -1$$

Selanjutnya, akan dicari nilai u_1, karena nilai u_o dan nilai λ sudah diketahui maka

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda \{L_s u_n + (L_x + N)\tilde{u}_n - g(x,t)\} ds$$

$$u_1(x,t) \quad = u_0(x,t) + \int_0^t -1 \left\{ \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} - \phi(u) - g(x,t) \right\} ds$$

$$\vdots$$

Langkah selanjutnya dicari nilai

$$u_2(x,t)$$
$$\vdots$$
$$u_n(x,t)$$

sehingga solusi dari persamaan (2.8) adalah

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t).$$

Contoh 2.1 (Lin Jin, 2008) :

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial parabolik linier berikut :

$$u_t - \frac{1}{2}(x^2)u_{xx} = 0$$

dengan

masalah nilai awal $u(x,0) = x^2$

Penyelesaian :

Langkah pertama dicari nilai fungsi pengali Lagrange (λ), sebagai berikut :

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

$$= \frac{(-1)^1}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$

$$= -1$$

Selanjutnya persamaan diferensial parsial parabolik linier dibentuk ke dalam metode iterasi variasi sehingga

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda\{L_s u_n + (L_{xx} + N)\tilde{u}_n - g\}ds$$

$$\begin{aligned} u_1(x,t) \quad &= u_0(x,t) - \int_0^t \left\{ \left(u_0(x,s)\right)_s - \frac{1}{2}x^2 (u_0(x,t))_{xx} \right\} ds \\ &= x^2 - \int_0^t \left\{ 0 - \frac{x^2}{2}(2) \right\} ds \\ &= x^2 + \int_0^t x^2 ds \\ &= x^2 + x^2 t \\ &= x^2(1+t) \end{aligned}$$

untuk menentukan $u_2(x,t)$ didapat dengan menggantikan nilai variabel t dengan s pada $u_1(x,t)$, sehingga persamaan tersebut menjadi $u_1(x,t) = x^2(1+s)$, selanjutnya $u_2(x,t)$ diperoleh :

$$\begin{aligned} u_2(x,t) &= u_1(x,t) - \int_0^t \left\{ \left(u_1(x,s)\right)_s - \frac{1}{2}x^2 \left(u_1(x,s)\right)_{xx} \right\} ds \\ &= x^2 + x^2 t - \int_0^t \left\{ x^2 - \frac{1}{2}x^2 2(1+s) \right\} ds \\ &= x^2 + x^2 t + \int_0^t (x^2 s) ds \\ &= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2}x^2 t^2 \\ &= x^2(1 + t + \frac{t^2}{2!}) \end{aligned}$$

Menententukan $u_3(x,t)$, dilakukan dengan menggantikan nilai variabel t dengan s pada persamaan $u_2(x,t)$ sehingga diperoleh $u_2(x,t) = x^2(1 + s + \frac{s^2}{2})$, sehingga $u_3(x,t)$ diperoleh :

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) - \int_0^t \left\{ \left(u_2(x,s)\right)_s - \frac{1}{2}x^2\left(u_2(x,s)\right)_{xx} \right\} ds$$

$$= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2}x^2 t^2 + \int_0^t \left\{ \left(u_2(x,s)\right)_s - \frac{1}{2}x^2\left(u_2(x,s)\right)_{xx} \right\} ds$$

$$= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2}x^2 t^2 + \int_0^t \left\{ \frac{x^2 s^2}{2} \right\} ds$$

$$= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2}x^2 t^2 + \frac{x^2 t^3}{6}$$

$$= x^2 (1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!})$$

Jadi, solusi yang didapat dari persamaan $u_t(x,t) - \frac{x^2}{2}u_{xx}(x,t) = 0$ dengan nilai awal $u(x,0) = x^2$ adalah :

$$u_1(x,t) = x^2(1+t)$$

$$u_2(x,t) = x^2(1+t+\frac{t^2}{2})$$

$$u_3(x,t) = x^2(1+t+\frac{t^2}{2\,!}+\frac{t^3}{3!})$$

$$\vdots$$

$$u_n(x,t) = x^2(1+t+\frac{t^2}{2\,!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^n}{n!})$$

dan solusi eksaknya yaitu :

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty}(1+t+\frac{t^2}{2\,!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^n}{n!})x^2 = e^t x^2$$

2.4 Metode Dekomposisi Adomian

Metode dekomposisi Adomian adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier dan nonlinier, metode ini cukup efektif dalam menghampiri solusi eksak.

Pertimbangkan persamaan $u_t - uu_{xx} = g(x,t),$ untuk $0 < t < 1$, dengan syarat awal $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dan $u(x,0) = f(x)$, atau dalam bentuk operator

$$L_t u(x,t) = Nu + g(x,t) \tag{2.9}$$

dengan nilai awal $u(x,0) = f(x),\ L = \dfrac{\partial}{\partial t}$ adalah operator diferensial. Diasumsikan bahwa invers operator L_t^{-1} ada, dan merupakan integral tunggal terhadap t dari 0 sampai t, yaitu

$$L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot)dt$$

dengan menerapkan invers operator kedalam persamaan (2.9) diperoleh

$$L_t^{-1} L_t u(x,t) = L_t^{-1} Nu + L_t^{-1} g(x,t)$$

Berdasarkan nilai awal yang diberikan $u(x,0) = f(x)$¸ maka persamaan di atas dapat ditulis

$$u(x,t) = u(x,0) + L^{-1} Nu + L^{-1} g(x,t)$$

atau

$$u(x,t) = f(x) + L_t^{-1} Nu + L_t^{-1} g(x,t) \tag{2.10}$$

Penyelesaian persamaan (2.10) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $u(x,t)$ yang merupakan deret $u_0(x,t), u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots, u_{n+1}(x,t)$ ditulis

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \end{aligned}$$

Selanjutnya komponen nonlinier Nu diekspansi dengan menggunakan deret polinomial Adomian A_n , ditulis

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

maka, persamaan (2.10) menjadi

$$u(x,t) = f(x) + L_t^{-1} g(x,t) + L_t^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \tag{2.11}$$

sehingga diperoleh polinomial Adomian A_n dari persamaan (2.11), yaitu :

$$A_0 = u_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\right)$$

$$A_1 = u_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1\right) + u_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\right)$$

$$A_2 = u_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2\right) + u_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1\right) + u_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\right)$$

$$\vdots$$

karena,

$$u_0(x,t) = f(x) + L_t^{-1}\phi(x,t)$$

maka,

$$u_1(x,t) = L_t^{-1}(A_0)$$

$$u_2(x,t) = L_t^{-1}(A_1)$$

$$\vdots$$

$$u_{n+1}(x,t) = L_t^{-1}(A_n),\ n \geq 0$$

Selanjutnya setelah nilai suku-suku $u_0(x,t), u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots, u_{n+1}(x,t)$ telah diketahui, maka penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty}\phi_n(x,t)$$

dengan

$$\phi_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x,t)$$

Contoh 2.2 (Lin Jin, 2008) :

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial parabolik linier berikut :

$$u_t - \frac{1}{2}(x^2)u_{xx} = 0$$

dengan

kondisi awal $u(x,0) = x^2$

Penyelesaian :

$$u_0(x,t) = f(x) + L_t^{-1}\phi(x,t)$$

$$= x^2 + \int_0^t \{0\} ds$$

$$= x^2$$

Untuk memperoleh nilai $u_1(x,t)$, maka dicari nilai A_0 yaitu :

$$A_0 = \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 (2)$$

$$= x^2$$

karena, $u_1(x,t) = L_t^{-1}(A_0)$, maka

$$u_1(x,t) = \int_0^t x^2 dt$$

$$= x^2 t$$

Selanjutnya A_1 diperoleh

$$A_1 = \frac{x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) + \frac{x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right)$$

$$= \frac{x^2}{2}(2t) + \frac{x^2}{2}(2)$$

$$= x^2(1+t)$$

maka,

$$u_2(x,t) = L_t^{-1}(A_1)$$

$$= \int_0^t x^2 (1+t)\, dt$$

$$= x^2 \left(t + \frac{t^2}{2} \right)$$

Demikian pula untuk menentukan A_2 diperoleh

$$A_2 = \frac{x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) + \frac{x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) + \frac{x}{2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(2t + t^2\right) + \frac{x^2}{2}\left(2t\right) + \frac{x^2}{2}\left(2\right)$$

$$= x^2\left(1 + 2t + \frac{t^2}{2}\right)$$

maka

$$u_3(x,t) = L_t^{-1}(A_2)$$

$$= \int_0^t x^2\left(1 + 2t + \frac{t^2}{2}\right)dt$$

$$= x^2\left(t + t^2 + \frac{t^3}{6}\right)$$

Selanjutnya persamaan dapat diperoleh

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + ...$$

$$= x^2 + x^2 t + x^2\left(t + \frac{t^2}{2}\right) + x^2\left(t + t^2 + \frac{t^3}{6}\right) + ...$$

2.5 Modifikasi Metode Iterasi Variasi

Pertimbangkan persamaan umum diferensial berikut :

$$Lu + Nu = g(x,t) \tag{2.12}$$

dengan L adalah operator linier, N adalah operator nonlinier, dan $g(x)$ adalah homogenius.

Metode iterasi variasi diberikan sebagai berikut :

$$\mathrm{u}_{\mathrm{n+1}}(x) = \mathrm{u}_{\mathrm{n}}(x) + \int_0^x \lambda(Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s))ds \tag{2.13}$$

dengan λ adalah pengali Lagrange, dengan mengubah $N\tilde{u}_n(s)$ dengan dekomposisi Adomian, maka diperoleh modifikasi metode iterasi variasi sebagai berikut :

$$\mathrm{u}_{\mathrm{n+1}}(x) = \mathrm{u}_{\mathrm{n}}(x) + \int_0^t \lambda(Lu_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n - g(x))dx \tag{2.14}$$

Contoh 2.3 (Lin Jin, 2008) :

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial parabolik linier berikut :

$$u_t - \frac{1}{2}(x^2)u_{xx} = 0$$

dengan

kondisi awal $u(x,0) = x^2$

Penyelesaian:

Untuk menentukan $u_1,..,u_n$ terlebih dahulu ditentukan pengali Lagrange

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

dengan m adalah banyak orde

$$\lambda = \frac{(-1)^1}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$

$$= -1$$

Persamaan modifikasi iterasi variasi diberikan :

$$\mathrm{u}_{\mathrm{n}+1}(x) = \mathrm{u}_{\mathrm{n}}(x) + \int_0^t \lambda(Lu_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n - g(x))dx \qquad (2.15)$$

Jika λ disubstitusikan ke persamaan (2.15), maka diperoleh :

$$u_{\mathrm{n}+1}(x,t) = x^2 - \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) ds \qquad (2.16)$$

Oleh karena $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ merupakan operator nonlinier, sedangkan yang akan diselesaikan adalah persamaan linier, maka $\sum_{n=0}^{\infty} A_n = 0$.

Jika diaplikasikan ke dalam persamaan (2.16), diperoleh :

$$u_n(x,t) = x^2 - \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right) ds$$

- $u_0(x,t) = x^2$
- $u_1(x,t) = x^2 + \int_0^t (-1)\left\{ \frac{\partial^2 u_0}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right\} ds$

$$= x^2 - \int_0^t (0-2)ds$$

$$= x^2 + 2t$$

- $$u_2(x,t) = x^2 + 2t + \int_0^t (-1)\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial s} - \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)\right\}ds$$

$$= x^2 + 2t - \int_0^t (0-(2+2))ds$$

$$= x^2 + 2t + \int_0^t 4\,ds$$

$$= x^2 + 6t$$

- $$u_3(x,t) = x^2 + 6t + \int_0^t (-1)\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial s} - \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)\right\}ds$$

$$= x^2 + 6t - \int_0^t (0-(2+2+2))ds$$

$$= x^2 + 6t + \int_0^t 6\,ds$$

$$= x^2 + 12t$$

maka, diperoleh solusi

$$u(x,t) = x^2 + 12t$$

BAB III

METODOLOGI

Metode yang digunakan penulis pada Tugas Akhir ini adalah studi literatur, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Persamaan diferensial parabolik nonlinier dengan persamaan umumnya $u_t - u_{xx} = \phi(u) + g(x,t)$.
2. Menentukan pengali Lagrange nya yaitu :

   $$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

   dengan m adalah banyak orde.
3. Menentukan A_n , dengan A_n adalah metode Dekomposisi Adomian yaitu :

   $$A_0 = u_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\right)$$

   $$A_1 = u_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1\right) + u_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\right)$$

   $$A_2 = u_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2\right) + u_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1\right) + u_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\right)$$

   $$\vdots$$
4. Menentukan $u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t), \ldots$ dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi yaitu :

   $$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^t \lambda(Lu_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n - g(x))dx.$$
5. Memperlihatkan akurasi dari modifikasi metode iterasi variasi dengan nilai eksaknya.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Persamaan Homogen

Pertimbangan kembali persamaan diferensial parsial parabolik berikut ini

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi(u) = g(x,t) \tag{4.1}$$

dengan syarat batas $u(0,t) = u(1,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$. Persamaan pada (4.1) dapat ditulis dalam bentuk operator :

$$L_t u - L_{xx} u - \phi(u) = g(x,t) \tag{4.2}$$

Komponen $\phi(u)$ pada persaman (4.1) berbentuk nonlinier dan $L_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ adalah operator diferensial. Persamaan (4.2) dikatakan homogen apabila $g(x,t) = 0$. Untuk menyelesaikan persamaan (4.2) dilakukan dengan mengubah persamaan ini ke dalam modifikasi metode iterasi variasi yaitu:

$$u_{n+1} = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(s)\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n - g(x)\right) ds \tag{4.3}$$

Selanjutnya akan ditentukan fungsi pengali Lagrange (λ) yaitu:

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

Kemudian setelah pengali Lagrange didapat akan ditentukan $u_1(x,t)\ u_2(x,t), u_3(x,t)\ldots$ sehingga diperoleh :

$$u_0(x,t) = f(x)$$

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

$$\left\{\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} - A_0 - g(x,t)\right\} ds$$

$$= f(x) + \int_0^t \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial s} - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - A_0 - g(x,t)\right\} ds$$

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) + \int_0^t \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

$$\left\{ \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial s} - \left(\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} \right) - \left(A_0 + A_1 \right) - g(x,t) \right\} ds$$

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) + \int_0^t \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

$$\left\{ \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial s} - \left(\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} \right) - \left(A_0 + A_1 + A_2 \right) - g(x,t) \right\} ds$$

$$\vdots$$

$$u_n = (x,t)$$

Sehingga diperoleh nilai $u_1, u_2, ... u_n$ dan solusi dari persaman (4.3) yaitu:

$$u(x,t) = \lim_{n \to \infty} u_n(x,t).$$

Contoh 4.1 (A. Soufyane, 2005) :

Tentukan penyelesaian persamaan differensial parsial parabolik nonlinier berikut ini:

$$u_t - \left(\frac{1}{x}\right) u_{xx} = \left(\frac{1}{x}\right) u^2 \tag{4.4}$$

dengan

nilai awal $u(x,0) = x$,

Penyelesaian :

Penyelesaian persamaan parabolik nonlinier pada persamaan (4.4) dilakukan dengan menentukan nilai $u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t), ... u_n(x,t)$, namun sebelumnya akan ditentukan fungsi pengali Lagrange (λ), yaitu :

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$

$$\lambda = -1$$

Selanjutnya akan ditentukan A_0 yaitu :

$$A_0 = u_0{}^2$$
$$= x^2.$$

Setelah diperoleh A_0, maka $u_1(x,t)$ diperoleh :

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$
$$\left\{\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} - A_0 + g(x,t)\right\}ds$$
$$= x + \int_0^t (-1)\left\{\frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{x}x^2\right\}ds$$
$$= x + \int_0^t (-1)\{0 - 0 - x\}ds$$
$$= x + \int_0^t (x)ds$$
$$= x + x\ t$$

Selanjutnya A_1 didapat

$$A_1 = 2u_0u_1$$
$$= 2(x)(x + x\ t)$$
$$= 2x(x + xt)$$

Selanjutnya perhatikan kembali $u_1(x,t)$, kemudian ganti t dengan s pada persamaan $u_1(x,t)$ sehingga bentuk $u_1(x,t) = x + x\ s$ dan $u_2(x,t)$ didapat :

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) + \int_0^t \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$
$$\left\{\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial s} - \left(\frac{1}{x}\right)\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \left(\left(\frac{1}{x}\right)A_0 + \left(\frac{1}{x}\right)A_1\right) + g(x,t)\right\}ds$$
$$= (x + x\ t) + \int_0^t (-1)\{x - 0 - (2x + 2xt)\}ds$$
$$= x + xt + 2x(x + xt)t$$

Untuk menentukan $u_3(x,t)$, dilakukan cara yang sama, yaitu menentukan A_2, diperoleh :

$$A_2 = (u_1)^2 + 2u_0u_2$$
$$= (x+xt)^2 + 2x(x+xt+2x(x+xt)t)$$

Kemudian perhatikan kembali persamaan $u_2(x,t)$, dengan menggantikan s dengan t pada persamaan $u_2(x,t)$ menjadi $u_2(x,t) = x + xs + 2x(x+xs)s$ sehingga diperoleh :

$$u_3 = u_2(x,t) + \int_0^t \lambda(s)\left\{L_s u_2 + \left(L_{xx} + N\right)u_2 - \tilde{g}(x,t)\right\}ds$$

$$= x\left(1 + t + t^2 + \frac{1}{3}t^3\right) + \int_0^t -1$$

$$\left\{\frac{\partial u_2}{\partial s} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \left(\left(\frac{1}{x}\right)A_0 + \left(\frac{1}{x}\right)A_1 + \left(\frac{1}{x}\right)A_2\right)\right\}ds$$

$$= x + xt + 4x(x+xt)t - 2x^2t^2 - 2x^2t + 2x(x+xt+2x(x+xt)t)t$$

$$+ \frac{4(1+t)t^2}{x} + (x+xt)^2 t$$

Analog cara di atas, diperoleh :

$$u_5(x,t) = \frac{1}{x^7}\left(160t^4 + 36t^3x^3 + 32t^2x^6 + 176x^7t^3 + 40t^3x^6 + 16t^4x^4\right.$$
$$+ 40t^4x^3 + 160x^8t^4 + 224x^7t^4 + 14x^9t + 20x^9t^2 + x^8t$$
$$+ 30x^{10}t^4 + 4t^5x^3 + 160t^5x^8 + 48t^5x^7 + x^8 + 160t^5$$
$$\left. + 24x^{11}t^5 + 2x^{10}t^5 + 16x^4t^5 + 16x^{12}t^4 + 16x^{12}t^5\right)$$

$$u_7(x,t) = \frac{1}{x^{13}}\left(15x^{15}t^3 + 210x^{16}t^4 + 27x^{15}t + 2880t^4x^6 + 220x^9t^3\right.$$
$$+ 392x^{10}t^4 + 58240t^5x^3 + 3840t^5x^7 + 320x^{11}t^5 + 552x^{10}t^5$$
$$+ 40x^{12}t^4 + 480x^6t^6 + 96x^{13}t^6 + 64x^{20}t^6 + 64x^{20}t^7$$
$$+ 985600t^7 + x^{14}t + 42x^{15}t^2 + 210x^{16}t^2 + 390x^{16}t^3 + 645x^{17}t^3$$
$$+ 1260x^{17}t^4 + 750x^{17}t^5 + 840x^{18}t^4 + 1560x^{18}t^5 + 840x^{18}t^6$$

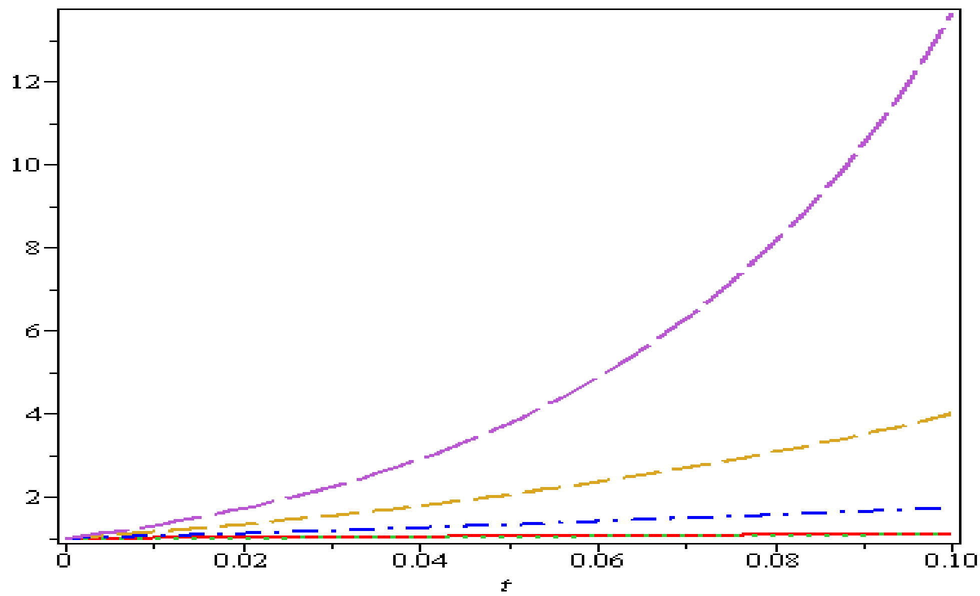
$$
\begin{aligned}
&+140x^{17}t^{6}+432x^{19}t^{5}+672x^{19}t^{6}+4480x^{7}t^{3}+1216x^{7}t^{8}\\
&+768x^{7}t^{7}+39424x^{7}t^{4}+1344x^{12}t^{7}+384x^{14}t^{7}+3008t^{7}x^{15}\\
&+2240x^{16}t^{7}+8x^{10}t^{7}+120x^{18}t^{7}+5x^{17}t^{7}+128x^{11}t^{7}+240x^{19}t^{7}\\
&+280x^{9}t^{4}+3360x^{6}t^{5}+60x^{9}t^{5}+x^{14}+140x^{12}t^{3}+100x^{12}t^{2}\\
&+1456x^{13}t^{3}+5568x^{14}t^{4}+2368x^{13}t^{4}+9120x^{14}t^{5}+1008x^{13}t^{5}\\
&+6848x^{15}t^{4}+62720t^{6}x^{3}+448t^{6}x^{11}+168t^{6}x^{10}+39424x^{4}t^{6}\\
&+1344t^{6}x^{12}+4608x^{7}t^{6}+9856x^{15}t^{6}+3936x^{14}t^{6}+1216x^{8}t^{6}\\
&+30x^{16}t^{5}+2240x^{16}t^{6}+985600t^{6}\Big)
\end{aligned}
$$

sehingga akan didapat hampiran dari solusi eksaknya, dan solusi eksak yaitu :

$$u(x,t)=\frac{x}{1-t} \quad \text{dimana nilai } 0<t<1$$

akurasi penyelesaian dari persamaan (4.4) bergantung banyak iterasi yang dilibatkan.

Gambar (4.1) menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi untuk beberapa iterasi terhadap penyelesaian eksak persamaan diferenesial parabolik nonlinier di $0<t<1$



Gambar 4.1 Hampiran penyelesaian persamaan (4.4) dengan $u(x,0)=x$ pada $0\le t\le 1$ untuk beberapa iterasi.

Tabel 4.1 Galat persamaan (4.4) dari masing-masing iterasi dengan $x = 0.1$

t	E_1	E_3	E_5	E_7
0.02	12.39800000	12.38065429	251.8042998	$6.453108663 \cdot 10^{8}$
0.04	24.89400000	24.73812658	22039.75085	$4.879166435 \cdot 10^{11}$
0.08	49.89200000	49.61110323	70932.89996	$2.792472797 \cdot 10^{12}$

Berdasarkan pada gambar 4.1, dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentuk oleh $u_7(x,t)$ menjauh dari persamaan eksaknya.

Contoh 4.2 (Yavuz ugurlu, 2011) :

Tentukan penyelesaian persamaan differensial parsial parabolik nonlinier berikut ini:

$$u_t - u_{xx} - \alpha(u^2)_x + \alpha u_x = 0 \tag{4.5}$$

Dengan $\alpha = 1,$ dan kondisi awal $u(x,0) = \dfrac{1}{x}$,

Penyelesaian :

Penyelesaian persamaan parabolik nonlinier pada persamaan (4.5) dilakukan dengan menentukan nilai $u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t), \ldots u_n(x,t)$, namun sebelumnya akan ditentukan fungsi pengali Lagrange (λ), yaitu :

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$

$$\lambda = -1$$

Selanjutnya A_0, dan B_0 diperoleh dengan

$$A_0 = ((u_0)_x)^2$$

$$= \frac{1}{x^4}$$

$$B_0 = (u_0)_x$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

Sehingga diperoleh $u_1(x,t)$ dengan menggunakan persamaan

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

$$\left\{ \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} + \sum_0^\infty A_n + g(x,t) \right\} ds$$

$$= u_0(x,t) + \int_0^t (-1)$$

$$\left\{ \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} + (B_0 - A_0) + g(x,t) \right\} ds$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{t}{x^2} + \frac{2t}{x^3} + \frac{t}{x^4}$$

Kemudian A_1,dan B_1 diperoleh :

$$A_0 = ((u_1)_x)^2$$

$$= \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{6t}{x^4} - \frac{4t}{x^5} - \frac{2t}{x^3} \right)^2$$

$$B_1 = (u_1)_x$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{6t}{x^4} - \frac{4t}{x^5} - \frac{2t}{x^3}$$

Kembali perhatikan persamaan $u_1(x,t)$, ganti t dengan s, sehingga menjadi

$u_1(x,t) = \frac{1}{x} + \frac{s}{x^2} + \frac{2s}{x^3} + \frac{s}{x^4}$, dan diperoleh :

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) + \int_0^t (-1)$$

$$\left\{ \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + \left((B_0 - A_0) + (B_1 - A_1) \right) \right\} ds$$

$$= \frac{x^2 + 2tx - 2t + 2t^2}{x^3}$$

Kemudian A_2 ,dan B_2 diperoleh :

$$A_2 = ((u_2)_x)^2$$

$$= \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{12t}{x^4} - \frac{8t}{x^5} - \frac{6t}{x^3} - \frac{140t^2}{x^6} - \frac{120t^2}{x^7} - \frac{48t^2}{x^5} \right.$$

$$\left. + 2\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{6t}{x^4} - \frac{4t}{x^5} - \frac{2t}{x^3} \right) t \left(\frac{2}{x^3} + \frac{24t}{x^5} + \frac{20t}{x^6} + \frac{6t}{x^4} \right) - \frac{6t^2}{x^4} \right)^2$$

$$B_2 = (u_2)_x$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{12t}{x^4} - \frac{8t}{x^5} - \frac{6t}{x^3} - \frac{140t^2}{x^6} - \frac{120t^2}{x^7} - \frac{48t^2}{x^5}$$

$$+ 2\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{6t}{x^4} - \frac{4t}{x^5} - \frac{2t}{x^3} \right) t \left(\frac{2}{x^3} + \frac{24t}{x^5} + \frac{20t}{x^6} + \frac{6t}{x^4} \right) - \frac{6t^2}{x^4}$$

Perhatikan kembali persamaan $u_2(x,t)$, ganti t menjadi s, sehingga menjadi $u_2(x,t) = \frac{x^2 + 2sx + 2s + 2s^2}{x^3}$, sehingga diperoleh :

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) +$$

$$\int_0^t (-1)\left\{ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + \left((B_0 - A_0) + (B_1 - A_1) + (B_2 - A_2) \right) \right\} ds$$

$$= \frac{x^4 - 8t^2 + 4t^3 - 6tx^2 - 12t^2 x + 3tx^3 + 6x^2 t^2 + 6t^3 x}{x^5}$$

Analog cara di atas, akan diperoleh :

$$u_5(x,t) = \frac{1}{x^9} \left(x^8 + 5tx^7 - 20tx^6 - 120t^2 x^5 + 20t^2 x^6 - 120x^3 t^4 \right.$$

$$+ 696t^5 x^2 + 2128t^5 x - 300t^3 x^4 + 60x^5 t^3 + 120x^4 t^4$$

$$+ 120t^5 x^3 + 2880t^5 - 5760t^4 - 360x^2 t^3 - 480x^3 t^3$$

$$\left. - 1560t^4 x^2 - 4816t^4 x \right)$$

Analog cara diatas, diperoleh $u_7(x,t)$ sebagai berikut :

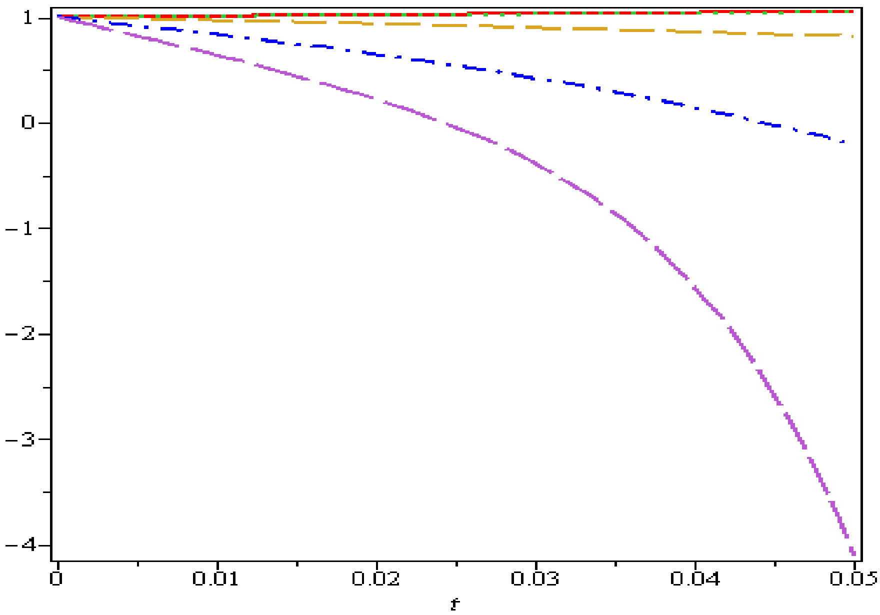
$$
\begin{aligned}
u_7(x,t) = \frac{1}{x^{13}}\Big(&280t^2x^8 - 1008t^3x^6 - 9603840t^6x^2 - 31527936t^6x \\
&- 34944x^5t^4 - 535872x^4t^5 - 1374624t^6x^3 - 280x^7t^3 \\
&- 21504x^6t^4 - 104160x^5t^5 - 8256t^6x^4 - 43545600t^6 + x^{12} \\
&- 1562240t^5x^2 - 19968x^4t^4 - 1390752t^5x^3 + 7tx^{11} - 42tx^{10} \\
&- 420t^2x^9 + 42t^2x^{10} + 840x^8t^4 - 6720x^7t^4 + 210t^3x^9 \\
&- 2240t^3x^8 - 5712t^5x^6 + 31584t^6x^5 + 2520t^5x^7 + 796176t^7x^3 \\
&+ 4414080t^7x^2 + 87648t^7x^4 + 5040t^6x^6 + 5040t^7x^5 \\
&+ 14433408t^7x + 21772800t^7\Big)
\end{aligned}
$$

sehingga akan didapat hampiran dari solusi eksaknya, dan solusi eksak yaitu :

$u(x,t) = \dfrac{1}{x-t}$ dimana nilai $0 < t < 1$

akurasi penyelesaian dari persamaan (4.5) bergantung banyak iterasi yang dilibatkan.

Gambar (4.2) menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi untuk beberapa iterasi terhadap penyelesaian eksak persamaan diferenesial parabolik nonlinier di $0 < t < \dfrac{1}{2}$



Gambar 4.2 Hampiran penyelesaian persamaan (4.5) dengan $u(x,0)=\dfrac{1}{x}$ **pada** $0 \le t \le 0.05$ **untuk beberapa iterasi.**

Tabel 4.2 Galat persamaan (4.5) dari masing-masing iterasi dengan $x = 0.1$

t	E_1	E_3	E_5	E_7
0.01	111.1111111	$4.596888889 \cdot 10^{5}$	$3.161538600 \cdot 10^{12}$	$2.355179069 \cdot 10^{20}$
0.03	210.5263158	12610.52632	$9.536479600 \cdot 10^{11}$	$1.805878000 \cdot 10^{20}$
0.05	310.3448276	$4.176910345 \cdot 10^{6}$	$2.463179275 \cdot 10^{14}$	$1.675370532 \cdot 10^{23}$

Berdasarkan pada gambar 4.2, dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentuk oleh $u_7(x,t)$ menjauh dari persamaan eksaknya.

4.2 Persamaan Nonhomogen

Pertimbangan kembali persamaan umum diferensial parsial parabolik berikut :

$$Lu + Nu = g(x,t) \tag{4.6}$$

dengan syarat batas $u(0,t) = u(1,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$. Persamaan pada (4.6) dapat ditulis dalam bentuk operator $L_t u + L_{xx} u + \phi(u) = g(x,t)$

atau

$$L_t u = g(x,t) - L_{xx} u - \phi(u) \tag{4.7}$$

Komponen $\phi(u)$ pada persaman (4.7) berbentuk nonlinier Nu dan $L_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ adalah operator diferensial.

Persamaan (4.7) dikatakan homogen apabila $g(x,t) \neq 0$. Untuk menyelesaikan persamaan (4.7) dilakukan dengan mengubah persamaan ke dalam metode iterasi variasi yaitu :

$$u_{n+1} = u_n(x,t) + \int \lambda \left\{ L_s u_n + (L_{xx} + N)\tilde{u}_n - g(x,t) \right\} ds \tag{4.8}$$

Selanjutnya akan ditentukan fungsi pengali Lagrange (λ) yaitu :

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

Kemudian setelah didapat fungsi pengali Lagrange akan ditentukan $u_1(x,t)\ u_2(x,t), u_3(x,t)\ldots$ diamana $u_0(x,t) = f(x)$

Sehingga didapat nilai $u_1, u_2, \ldots u_n$ dan solusi dari persaman (4.8) yaitu:

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t).$$

Contoh 4.3 (Wartono, 2010) :

Tentukan solusi eksak dari persamaan diferensial nonlinier nonhomogen berikut ini

$$u_t = uu_{xx} - 2x^2. \tag{4.9}$$

dengan masalah nilai awal $u(x,0) = x^2$,

Penyelesaian :

Penyelesaian persamaan parabolik nonlinier pada persamaan (4.9) dengan menentukan nilai pengali Lagrange (λ) yaitu :

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$

$$\lambda = -1$$

A_0 diperoleh dengan :

$$\begin{aligned} A_0 &= (u_0^2)_{xx} \\ &= 12x^2 \end{aligned}$$

Untuk memperoleh nilai solusi eksak $u_1(x,t)$ dilakukan dengan mengubah persamaan (4.9) kedalam modifikasi metode iterasi variasi. Selanjutnya akan ditentukan $u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t),...$ yaitu :

$$= x^2 + \int_0^t \lambda \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial s} - A_0 + 2x^2 \right\} ds$$

$$= x^2 + 10x^2 t$$

Setelah didapat nilai $u_1(x,t)$,untuk mencari nilai $u_2(x,t)$ sama halnya dengan mencari nilai pada $u_1(x,t)$, maka akan ditentukan A_2 sebagai berikut :

$$A_1 = 4x^2 + 40x^2 t + 8x(2x + 20xt) + 2x^2(2 + 20t)$$

Perhatikan kembali persamaan $u_1(x,t)$, ganti t menjadi s, sehingga menjadi

$u_1(x,t) = x^2 + 10x^2 s$, dan diperoleh :

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) + \int_0^t \lambda \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial s} - (A_0 + A_1) + 2x^2 \right\} ds$$

$$= x^2 + 10x^2 t + \int_0^t (-1) \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} - (12x^2 + 4x^2 + 40x^2 t + 8x(2x + 20xt) \right.$$

$$\left. + 2x^2(2 + 20t)) + 2x^2 \right) ds$$

$$= x^2 + 34x^2 t + 240x^2 t^2$$

Setelah didapat nilai $u_2(x,t)$,untuk mencari nilai $u_3(x,t)$ sama halnya dengan mencari nilai pada $u_2(x,t)$, maka akan ditentukan A_2 sebagai berikut :

$$A_2 = 36x^2 + 480x^2 t + 1200x^2 t^2$$

Perhatikan kembali persamaan $u_2(x,t)$, ganti t menjadi s, sehingga menjadi $u_2(x,t) = x^2 + 34x^2 s + 240x^2 s^2$, dan diperoleh :

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) + \int_0^t \lambda \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial s} - (A_0 + A_1 + A_2) + 2x^2 \right\} ds$$

$$= x^2 + 14x^2 t + 40x^2 t^2 + 8x(2x + 20xt)t + 2x^2(2 + 20t)t$$

$$+ \int_0^t \lambda \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial s} - (A_0 + A_1 + A_2) + 2x^2 \right\} ds$$

$$= x^2 + 70x^2 t + 720x^2 t^2 + 1200x^2 t^3$$

Analog cara diatas, maka akan dieroleh :

$$u_5(x,t) = x^2 + 178x^2 t + 9024x^2 t^2 + 169056x^2 t^3 + 1261440x^2 t^4$$

$$+ 3052800x^2 t^5$$

$$u_7(x,t) = x^2 + 334x^2 t + 34704x^2 t^2 + 1550160x^2 t^3 + 33533568x^2 t^4$$

$$+ 366494976x^2 t^5 + 1914071040x^2 t^6 + 3669580800x^2 t^7$$

$$\vdots$$

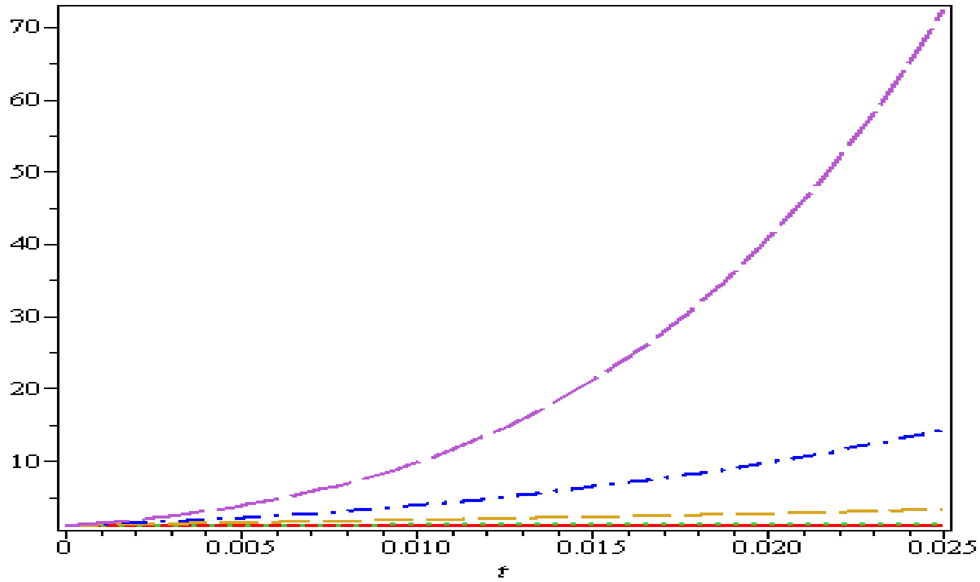
$$u_n(x,t)$$

sehingga akan didapat hampiran dari solusi eksaknya, dan solusi eksak yaitu:

$$u(x,t) = x^2$$

akurasi penyelesaian dari persamaan (4.9) bergantung banyak iterasi yang dilibatkan.

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi



Gambar 4.3 Hampiran penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier nonhomogen pada persamaan 4.9 dengan $u(x,0)=x^2$ **pada** $0 \le t \le 0.025$ **untuk beberapa iterasi.**

Tabel 4.3 Galat persamaan (4.9) dari masing-masing iterasi dengan $x = 0.1$

t	E_1	E_3	E_5	E_7
0.005	0.00050	0.00368150000	0.01137529940	0.02753503971
0.015	0.00150	0.01216050000	0.05337142620	0.2004856345
0.025	0.00250	0.02218750000	0.1325406250	0.7142905234

Berdasarkan pada gambar 4.3, dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentuk oleh $u_7(x,t)$ menjauh dari persamaan eksaknya.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari Tugas akhir ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

a) Modifikasi metode iterasi variasi dapat menyelesaikan persamaan diferensial parabolik nonlinier $u_t - u_{xx} = \phi(u) + g(x,t)$ yang homogen $g(x,t) = 0$ maupun yang nonhomogen $g(x,t) \neq 0$ berdasarkan masalah nilai awal $u(0,t) = u(1,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$.

b) Hasil yang diperoleh bahwa hampiran penyelesaian persamaan diferensial parsial parabolik nonlinier $u_t - u_{xx} = \phi(u) + g(x,t)$ yang homogen $g(x,t) = 0$ maupun yang nonhomogen $g(x,t) \neq 0$ berdasarkan masalah nilai awal $u(0,t) = u(1,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$, menjauhi nilai eksaknya.

5.2 Saran

Tugas akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonliner $u_t - u_{xx} = \phi(u) + g(x,t)$, baik yang homogen $g(x,t) = 0$ maupun yang nonhomogen $g(x,t) \neq 0$ berdasarkan nilai awal $u(0,t) = u(1,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan Tugas akhir ini, penulis sarankan membahas tentang penyelesaian persamaan delay menggunakan modifikasi metode iterasi variasi, dll.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank, *Persamaan Diferensial dalam satuan SI metric*, Erlangga, Jakarta, 1999.

Ghotbi Abdoul R, Dkk, Aplication of Variatioanl Iteration Method to Parabolic Problem, *applied mathematical sciences* Vol.3,No. 19, 927-934,2009.

Jafari, Hossein, Solving Fractional Diffusion and Wave Equations by Modified Homotopy Perturbation Method, *Physics Letter A*, No.388-396, 2007.

Jin Lin, Homotopy Perturbation Method for Solving Partial Differential Equation with Variable Coefficients, *Int J Contemp Math Sciences*, Vol.3, No. 28, 1395-1407, 2008.

Mohyud-Din, Syed Tauseef, Dkk. Modified Variational Iteration for Solving Sine-Gordon Equations, *World Applied Sciences Journal*, No. 999-1004, 2009.

Ugurlu, Yavuz, Dkk.Analytic Solutions of Some Partial Differential Equations by Using Homotopy Perturbation Method. *World Applied Sciences Journal*, No. 2135-2139, 2011.

Purcell, Edwin, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Edisi empat. Erlangga, Jakarta, 1984.

P Stavroulakis Ioannis, Stepan A tersian, *Partial defferantial equatuion an introduction with matematica and maple*, word scientificm publishing, 2004.

Souyane A, M, Boulamlf, Solution of Linear and Nonlinear Parabolik Equation by Decomposition Method, *applied mathematic and computation* Vol. 162,No. 687-693, 2005.

Wartono, Kamairoh Bakri, Penyelesaian Persamaan Diferensial Parabolic Nonlinier Dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian, *Sains, Teknologi dan Industri, Vol 8 no.1, 1-57*, 2010.