

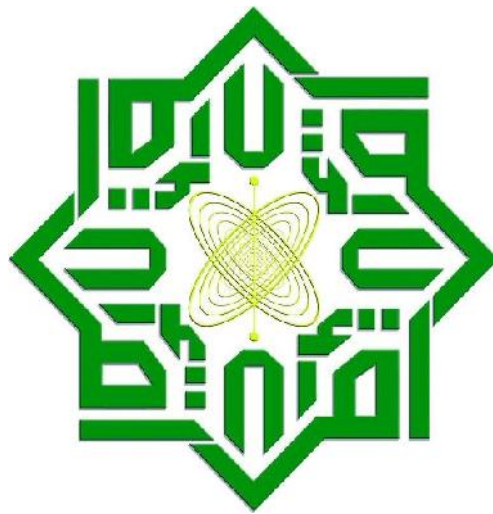
**PELABELAN SUPER SISI AJAIB PADA GRAF ULAT  
MODEL “H” DENGAN  $n$  TITIK**

**TUGAS AKHIR**

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
pada Jurusan Matematika

**Oleh :**

**SALIHIN PUTRA**  
**10654004493**



**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU  
PEKANBARU  
2012**

# PELABELAN SUPER SISI AJAIB PADA GRAF ULAT MODEL "H" DENGAN $n$ TITIK

**SALIHIN PUTRA**  
**NIM : 10654004493**

Tanggal Sidang: 23 Mei 2012  
Periode Wisuda: Juli 2012

Jurusan Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau  
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

## ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas tentang pelabelan super sisi ajaib pada suatu graf  $(V, E)$  dengan order  $q$  dan ukuran  $p$  adalah fungsi bijektif  $f$  dari  $V \rightarrow E$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$  disebut pelabelan total super sisi ajaib, sehingga untuk masing-masing sisi berlaku  $f(x) + f(x, y) + f(y) = k$  dengan  $k$  adalah konstanta. Pelabelan yang memetakan  $V$  ke himpunan  $\{1, 2, \dots, p\}$  adalah pelabelan super sisi ajaib, graf yang dapat dikenakan pelabelan disebut pelabelan super sisi ajaib. Berdasarkan perhitungan pada tugas akhir ini terlihat bahwa hasil yang diperoleh pada graf ulat model "H" dengan  $n$  titik yang mana  $n$  adalah bilangan asli genap dan ganjil adalah graf super sisi ajaib.

**Katakunci:** graf ulat, pelabelan super sisi ajaib.

## KATA PENGANTAR

*Alhamdulillah*, segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya. Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan tingkat sarjana.

Selanjutnya limpahan selawat serta salam kepada junjungan alam Nabi Besar Muhammad SAW pembawa petunjuk bagi seluruh umat manusia.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini penulis tidak terlepas dari batuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan banyak terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayah (Ali Abidin) dan ibu (Dimot) yang tidak pernah lelah dan tiada henti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi yang membuat penulis mampu untuk terus dan terus melangkah, perjalanan hidup, juga materi yang tak mungkin bisa terbalaskan dan tidak pernah meminta balasan atas jasa-jasamu yang telah berikan kepada putra dan putri mu, akan selalu kukenang hingga akhir hayatku dan semoga Allah menjadikan jasa-jasamu sebagai amalan soleh, Amin..

Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. DR. H. M. Nazir, M.A. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Yenita Morena, M. Si. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc. selaku Plt. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau sekaligus pembimbing Tugas akhir ini..
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku koordinator Tugas Akhir pada Jurusan Matematika.
5. Bapak dan Ibu dosen jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim.
6. Abang, Kakak, adik-adikku, keponakanku yang selalu memberiku semangat. Semoga kita tetap tumbuh menjadi anak-anak yang membanggakan. Dan

buat seluruh keluargaku yang telah memberikan perhatian, kasih sayang serta motivasi tiada henti untukku.

7. Tim Lintas Gayo (Bang Khalisuddin, Bang Nurul, Bang Alfajri, Bang Sahmuddin, dan seluruh staff dan kru Lintas Gayo) terimakasih atas pengertian kalian semuanya, semoga Lintas Gayo menjadi media online lebih besar dan sukses .
8. Ria Devitariska, ST. telah banyak membantu serta memberikan dorongan kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
9. Lili Wisdarni, terimakasih banyak atas bantuannya yang sudah mau direpotin kesana kemari.
10. Teman-teman seperjuangan angkatan 2006 di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
11. Sahabat Gat's (Rizal, Hendri, Fivi, Irma, Fitri, Aidil, Adri) sukses selalu buat kalian semua.
12. Seluruh pihak yang telah memberikan andil dalam proses penulisan Tugas Akhir ini sampai selesai yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Dalam penyusunan dan penulisan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin untuk menghindari kesalahan. Tapi seperti *tak ada gading yang tak retak*. Akhirnya penulis mengharapkan kepada pembaca tugas akhir ini agar memberikan saran dan kritik konstruktif. Semoga tugas akhir ini dapat memberikan kontribusi yang bermanfaat. Amin...

Pekanbaru, 23 Mei 2012

Penulis

## DAFTAR ISI

	<b>Halaman</b>
LEMBAR PERSETUJUAN.....	ii
LEMBAR PENGESAHAN .....	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL.....	iv
LEMBAR PERNYATAAN .....	v
LEMBAR PERSEMBAHAN .....	vi
ABSTRAK .....	vii
<i>ABSTRACT</i> .....	viii
KATA PENGANTAR .....	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR .....	xiii
DAFTAR LAMBANG .....	xiv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang Masalah.....	I-1
1.2 Rumusan Masalah .....	I-2
1.3 Batasan Masalah .....	I-2
1.4 Tujuan Penelitian .....	I-2
1.5 Manfaat Penelitian .....	I-2
1.6 Sistematika Penulisan .....	I-2
<b>BAB II LANDASAN TEORI</b>	
2.1 Graf .....	II-1
2.2 Jenis-jenis Graf.....	II-2
2.3 Derajat .....	II-2
2.4 Lintasan .....	II-4
2.5 Graf Terhubung.....	II-4
2.6 Graf Ulat.....	II-5
2.7 Fungsi.....	II-6
2.8 Pelabelan pada Graf .....	II-8

2.9 Pelabelan Super Sisi Ajaib .....	II-8
BAB III METODOLOGI	
BAB IV PEMBAHASAN	
4.1 Pelabelan Super Sisi Ajaib Pada Graf Ulat $H_n$ (genap)	IV-1
4.2 Pelabelan Super Sisi Ajaib Pada Graf Ulat $H_n$ (ganjil)	IV-21
BAB V PENUTUP	
5.1 Kesimpulan .....	V-1
5.2 Saran.....	V-1
DAFTAR PUSTAKA	
DAFTAR RIWAYAT HIDUP	

# BAB I

## PENDAHULUAN

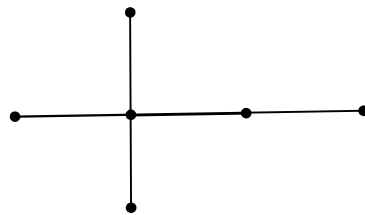
### 1.1 Latar Belakang

Secara umum graf direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli. Pelabelan graf pertama kali dikenalkan oleh Sadlã k (1964), dilanjutkan oleh Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pemanfaatan pelabelan ini sangat besar perannya dalam aplikasi kehidupan sehari-hari, terutama pada sektor transportasi, geografis, penyimpanan data komputer atau *database* dan desain jaringan komunikasi.

Beberapa jenis pelabelan, diantaranya adalah pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*), pelabelan total (*total labeling*), dan pelabelan ajaib (*magic labeling*). Pelabelan ajaib terdapat dua jenis, yaitu pelabelan total sisi ajaib (*edge magic total labeling*) dan pelabelan super sisi ajaib (*super edge magic labeling*). Jika domainnya adalah titik maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). Jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*).

Penelitian mengenai pelabelan total sisi ajaib dan pelabelan super sisi ajaib telah banyak dilakukan pada beberapa jenis graf seperti graf sikel, graf lintasan, adalah pelabelan total sisi ajaib yang mempunyai sisi genap maupun sisi ganjil. Ada beberapa macam graf yang telah ditemukan oleh ilmuwan baik itu pelabelan total sisi ajaib maupun pelabelan super sisi ajaib, salah satunya adalah pelabelan super sisi pada graf ulat.

Menurut K.A. Sugeng (2005), graf ulat adalah graf yang jika semua titik berderajat satu dibuang akan menghasilkan lintasan.



**Gambar 1.1 Contoh Graf Ulat**

Berdasarkan jurnal Abdussakir (2009), telah diuraikan tentang pelabelan super sisi ajaib pada beberapa bentuk graf ulat yang berderajat  $\{1,4\}$ . Kemudian pada skripsi Andi Irawan,(2007), telah diuraikan tentang graf ulat model “  $\rightarrow$  ” dengan panjang  $n$  titik. Oleh karena itu penulis tertarik meneliti tentang model lain yaitu **“Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Ulat Model “H” dengan  $n$  Titik.**

## **1.2 Rumusan Masalah**

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana melakukan pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat model “H”.

## **1.3 Batasan Masalah**

Batasan masalah pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Graf ulat model “H” dengan  $n$  titik adalah bilangan asli genap.
2. Graf ulat model “H” dengan  $n$  titik adalah bilangan asli ganjil.

## **1.4 Tujuan Penelitian**

Sesuai dengan rumusan masalah tujuan penelitian pada tugas akhir ini adalah mendapatkan label pada graf ulat model “H” dengan  $n$  titik.

## **1.5 Manfaat Penelitian**

Manfaat penelitian proposal tugas akhir ini sebagai berikut:

1. Secara umum, dapat menambah ilmu pengetahuan tentang teori graf.
2. Dapat memberikan penjelasan dan pemahaman tentang materi pada skripsi yang akan dibahas.
3. Diharapkan dapat menambah wawasan tentang pelabelan super sisi ajaib.

## **1.6 Sistematika Penulisan**

Dalam penulisan tugas akhir ini mencakup lima bab yaitu diantaranya adalah:



**BAB I      Pendahuluan**

Bab ini berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian.

**BAB II     Landasan Teori**

Bab ini berisi tentang teori-teori dasar mengenai penelitian yang digunakan dalam skripsi ini.

**BAB III    Metode Penelitian**

Bab ini berisi tentang metodologi penelitian yang digunakan dalam skripsi ini.

**BAB IV     Pembahasan**

Bab ini berisi tentang pembahasan mengenai pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat model "H" dengan  $n$  titik.

**BAB V      Penutup**

Bab ini berisi kesimpulan dan saran

## BAB II

### LANDASAN TEORI

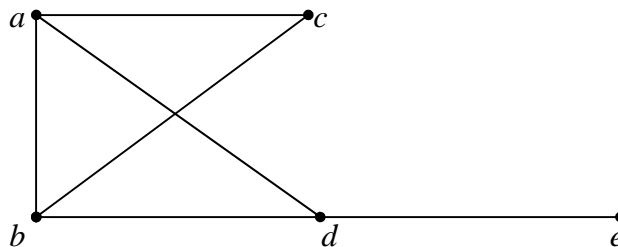
Bab ini menyajikan beberapa materi pendukung yang akan digunakan sebagai landasan teori dalam membahas tugas akhir yang berjudul ”Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Ulat Model “H” dengan  $n$  Titik”.

#### 2.1 Graf

**Definisi 2.1 (Siang, 2006)** Suatu graf  $G$  yang terdiri dari dua himpunan yang berhingga, yaitu himpunan titik-titik tidak kosong (simbol  $V(G)$ ) dan himpunan garis-garis (simbol  $E(G)$ ).

Berdasarkan definisi graf, jelas bahwa suatu graf memungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi minimal ada satu titik.

Berikut ini akan ditunjukkan graf yang memuat himpunan titik  $V$  dan himpunan sisi  $E$ , seperti gambar di bawah ini:



**Gambar 2.1 Graf**

Berdasarkan Gambar 2.1 memperlihatkan graf dengan himpunan titik  $V$  dan himpunan sisi  $E$  yaitu:

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$$

Bentuk di atas menunjukkan bahwa titik pada graf tersebut mempunyai 5 titik ( $V=5$ ) dan mempunyai 6 sisi ( $E=6$ ).

## 2.2 Jenis-jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau gelang pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf Sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak mengandung gelang atau *loop* maupun sisi ganda dinamakan graf sederhana.
2. Graf tidak sederhana (*unsimple graph*) adalah graf yang mengandung sisi ganda dan gelang dinamakan graf tidak sederhana.

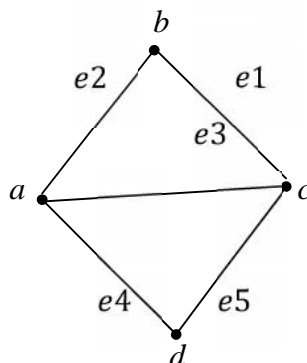
Berdasarkan definisi graf sederhana tidak boleh mempunyai sisi ganda dan *loop*. Sisi ganda adalah graf yang diwakili oleh dua pasangan sisi yang sebenarnya sama. *Loop* adalah sisi yang berpasangan yang unsurnya sama, disebut graf sederhana. Sedangkan graf yang mempunyai sisi ganda dan *loop* disebut graf tak sederhana.

## 2.3 Derajat (*Degree*)

**Definisi 2.2 (Siang,2006)** Misalkan  $v$  adalah titik dalam suatu graf  $G$ . Derajat titik  $v$  yang dinotasikan (simbol  $d(v)$ ) adalah jumlah garis yang berhubungan langsung dengan titik  $v$  dan garis suatu *loop* dihitung dua kali.

### Contoh 2.1:

Tentukan derajat pada graf sederhana berikut:



**Gambar 2.2 Graf Sederhana**

**Jawab:**

Berdasarkan Gambar 2.2 graf sederhana mempunyai himpunan titik  $V \{a,b,c,d\}$  dan himpunan sisinya  $E\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ . Maka diperoleh derajatnya

$d(b)= 2$  karena garis yang berhubungan dengan  $b$  adalah  $e_1$  dan  $e_2$

$d(d)=2$  karena garis yang berhubungan dengan  $d$  adalah  $e_4$  dan  $e_5$

$d(a)=3$  karena garis yang berhubungan dengan  $a$  adalah  $e_2$  ,  $e_3$  dan  $e_4$

$d(c)=3$  karena garis yang berhubungan dengan  $c$  adalah  $e_1$  ,  $e_3$  dan  $e_5$

Menurut Chartrand dan Lesniak (1996) titik  $a$  dan  $c$  adalah titik yang berderajat ganjil dan titik  $b$  dan  $d$  adalah titik yang berderajat genap. Jika terdapat dalam sebuah graf yang berderajat satu maka graf tersebut mempunyai titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf  $G$  dengan banyak sisi yaitu  $m$ .

$$\sum_{i=1}^n d(v) = 2m$$

**Teorema 2.1 (Chartrand and Lesniak,1996)** Banyaknya titik yang berderajat ganjil selalu genap.

**Bukti:**

Misalkan sebuah graf  $G$ ,  $V_1$  dan  $V_2$ , dimana  $V_1$  adalah titik yang berderajat genap dan  $V_2$  adalah titik yang berderajat ganjil.

$$\sum_{v \in G} d(v) = \sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = 2m$$

Karena  $V_1$  adalah himpunan titik yang genap maka  $d(v)$  bernilai genap, dan  $V_2$  himpunan titik yang  $d(v)$  ganjil haruslah bernilai genap, karena  $2m$  genap maka

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = 2m$$

Jika semua titik  $V_2$  ganjil maka  $d(v)$  adalah ganjil, maka terbukti bahwa titik ganjil di graf  $G$  adalah genap.

## 2.4 Lintasan (*path*)

**Definisi 2.3 (Munir, 2005)** Lintasan yang panjangnya  $n$  dari titik awal  $V_0$  ketitik tujuan  $V_n$  di suatu graf  $G$  yang berselang-seling titik dan sisi-sisi yang berbentuk

$G: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_n, e_n = v$  sedemikian sehingga

$e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$  adalah sisi di graf  $G$ .

Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan tertutup (*closed path*), sedangkan lintasan yang berawal dan tidak berakhir pada titik yang sama disebut lintasan terbuka (*open path*). Titik yang dilalui di dalam lintasan yang berulang dikatakan lintasan sederhana (*simple path*), sedangkan jika titik yang dilalui hanya satu kali disebut bukan lintasan sederhana.

Berdasarkan Chartrand dan leniak (1996) jika  $v_0 \neq v_n$  disebut lintasan terbuka, sedangkan  $v_0 = v_n$  disebut jalan tertutup .

### Contoh 2.2:

Perlihatkan lintasan pada Gambar 2.2

#### Jawab:

Lintasan  $a, b, c, d$ , adalah lintasan terbuka.

Lintasan  $a, b, d, c, a$ , adalah lintasan tertutup .

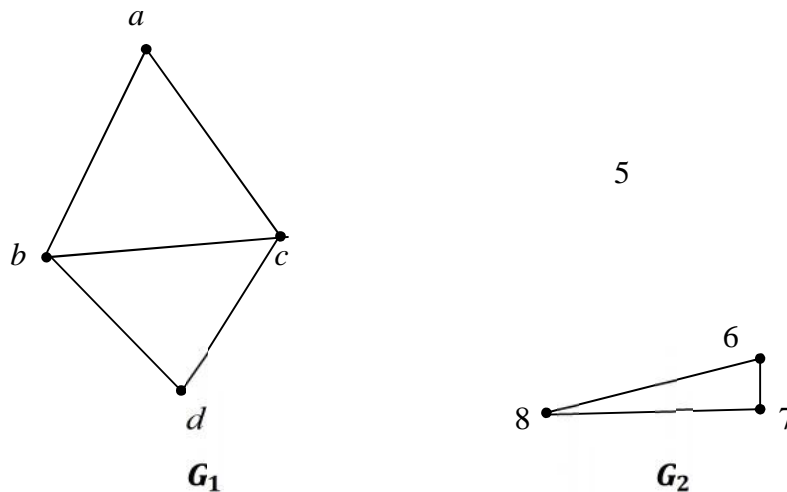
Lintasan  $a, b, d, c, b$ , bukan lintasan sederhana tetapi lintasan terbuka.

## 2.5 Graf Terhubung (*connected graph*)

Dua buah titik dalam graf  $u$  dan  $v$ , saling terhubung jika terdapat lintasan  $u$  ke  $v$  dikatakan graf terhubung. Jika graf dikatakan terhubung pasti titik  $u$  dapat dicapai ke titik  $v$ .

**Definisi 2.4 (Siang, 2006)** Graf tak berarah disebut graf terhubung jika untuk setiap pasang titik  $u$  dan  $v$  didalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $u$  ke  $v$  (berarti ada lintasan dari  $u$  ke  $v$ ). Jika tidak, maka  $G$  disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*).

Berikut ini akan diperlihatkan graf yang terhubung dan tidak terhubung.



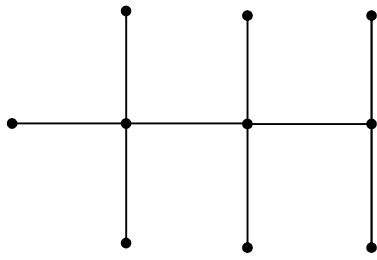
**Gambar 2.3 Graf Terhubung ( $G_1$ ) dan Tidak Terhubung ( $G_2$ )**

Graf yang hanya terdiri dari satu titik saja (tidak ada sisi) tetap dikatakan terhubung, karena titiknya terhubung dengan dirinya sendiri.

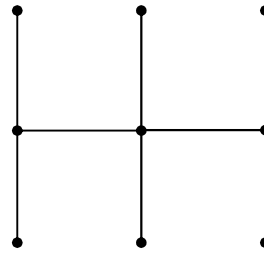
## 2.6 Graf Ulat

**Definisi 2.5 (K.A. Sugeng, 2005)** Graf ulat adalah graf yang jika semua titik berderajat satu dibuang akan menghasilkan lintasan.

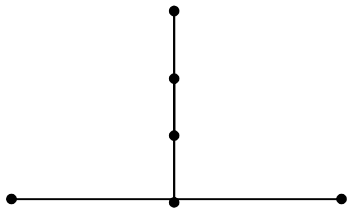
Menurut Abdussakir (2009), graf ulat (*caterpillar*) adalah jika semua titik ujungnya dibuang akan menghasilkan lintasan. Titik yang boleh dihapus adalah titik yang berderajat satu. Berikut ini beberapa bentuk graf ulat.



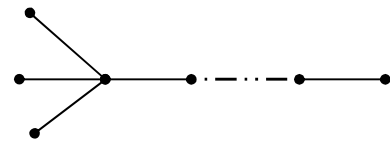
(a) Graf ulat tanpa ekor



(b) Graf ulat tanpa ekor & kepala



(c) Graf ulat model



(d) Graf ulat model  $\curvearrowright$

**Gambar 2.4** Macam-macam Bentuk Graf Ulat

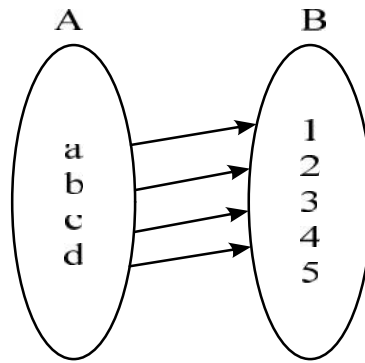
## 2.7 Fungsi

**Definisi 2.6 (Munir, 2005)** Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah himpunan. Relasi dari  $A$  ke  $B$  merupakan suatu fungsi jika setiap element di dalam  $A$  dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam  $B$ . Jika  $f$  adalah fungsi dari  $A$  ke  $B$  kita menuliskan  $f : A \rightarrow B$  yang artinya  $f$  memetakan  $A$  ke  $B$ .

Secara umum fungsi dapat dibagi menjadi tiga bagian yaitu:

- a. Fungsi satu-satu (*injektif*)

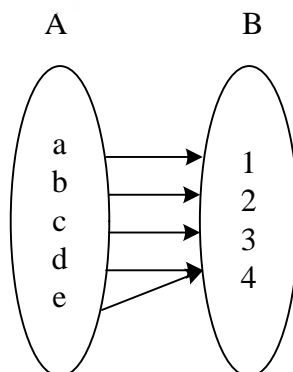
Fungsi  $f$  dikatakan satu-satu (*injektif*) jika tidak ada dua element himpunan  $A$  yang memiliki bayangan yang sama. Dengan kata lain jika  $a$  atau  $b$  adalah anggota himpunan  $A$ , maka  $f(a) \neq f(b)$  bilamana  $a \neq b$ . Jika  $f(a) = f(b)$  maka implikasinya  $a = b$ . Berikut ini mengilustrasikan fungsi satu-satu (*injektif*).



**Gambar 2.5 Pemetaan Injektif**

b. Fungsi pada (*surjektif*)

Fungsi  $f$  dikatakan pada (*surjektif*) jika setiap elemen himpunan  $B$  merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan  $A$ . Dengan kata lain seluruh elemen  $B$  merupakan jelajah dari  $f$ . Fungsi  $f$  disebut fungsi pada himpunan  $B$ . Berikut ini mengilustrasikan fungsi pada (*surjektif*).

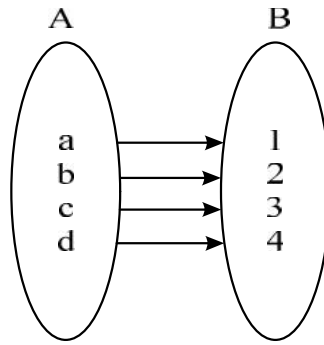


**Gambar 2.6 Pemetaan Surjektif**

c. Fungsi korespondensi satu-satu *bijektif*

Fungsi *bijektif* jika ia memenuhi fungsi *injektif* dan fungsi *surjektif*. setiap anggota  $B$  mempunyai tepat satu pra-bayangan di  $A$ . Gambar berikut ini mengilustrasikan fungsi bijektif.





**Gambar 2.7 Pemetaan Bijektif**

## 2.8 Pelabelan pada Graf

Pelabelan pada graf ini adalah sembarang pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik dan sisi). Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik. Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi. Jika pelabelannya adalah titik dan sisi, maka disebut pelabelan total.

**Definisi 2.7 (W.D Wallis, 2000)** Pelabelan pada graf  $G$  dengan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ . Pelabelan total sisi ajaib (*edge magic total labeling*) adalah suatu pemetaan pada  $V(G) \cup E(G)$  ke himpunan  $\{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  yang mempunyai sifat bahwa untuk setiap sisi  $\{x, y\}$  di  $G$  berlaku:

$$f(x) + f(\{x, y\}) + f(y) = k$$

untuk  $k$  adalah konstanta kemudian konstanta  $k$  disebut bilangan ajaib pada graf  $G$ .

## 2.9 Pelabelan Super Sisi Ajaib

Pelabelan pada graf  $G$  dengan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ . Banyaknya titik di  $G$  adalah  $p$ , banyaknya sisi di  $G$  adalah  $q$ .

Pelabelan total sisi ajaib pada graf  $G$  adalah pemetaan fungsi bijektif  $f$  dari  $V(G) \cup E(G)$  ke himpunan  $\{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  yang mempunyai sifat bahwa untuk setiap sisi  $\{x, y\}$  di  $G$  berlaku:

$$f(x) + f(y) + f(\{x, y\}) = k$$

untuk  $k$  disebut bilangan ajaib pada graf.

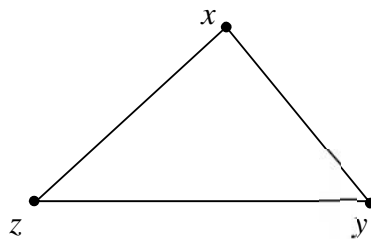
Menurut Abdussakir (2009), pelabelan total sisi ajaib yang memetakan himpunan

$$V = \{1, 2, \dots, p\}$$

disebut pelabelan super sisi ajaib (*super edge-magic labeling*), graf yang dapat dikenakan pelabelan sisi ajaib super disebut graf sisi super ajaib super.

**Contoh 2.3:**

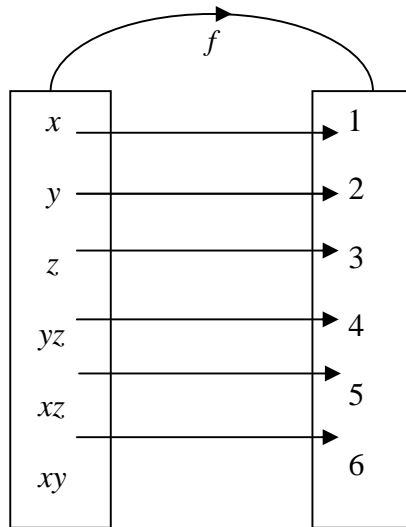
Diberikan graf  $G_1$  berikut dengan  $V(G) = \{x, y, z\}$  dan  $E(G) = \{xy, yz, xz\}$ , dengan  $|V(G)| = 3$  dan  $|E(G)| = 3$ , akan ditunjukkan apakah graf  $G_1$  adalah pelabelan total super sisi ajaib?



**Gambar 2.8 Graf  $G_1$**

**Jawab:**

Jika dipetakan fungsi  $f$  dari  $V(G) \cup E(G)$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  sebagai berikut.



**Gambar 2.9 Fungsi Pemetaan Bijektif**

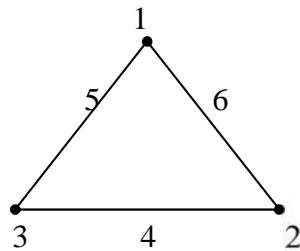
Maka diperoleh

$$f(x)+f(x,y)+f(y)=1+6+2=9$$

$$f(x)+f(x,z)+f(z)=1+5+3=9$$

$$f(y)+f(y,z)+f(z)=2+4+3=9$$

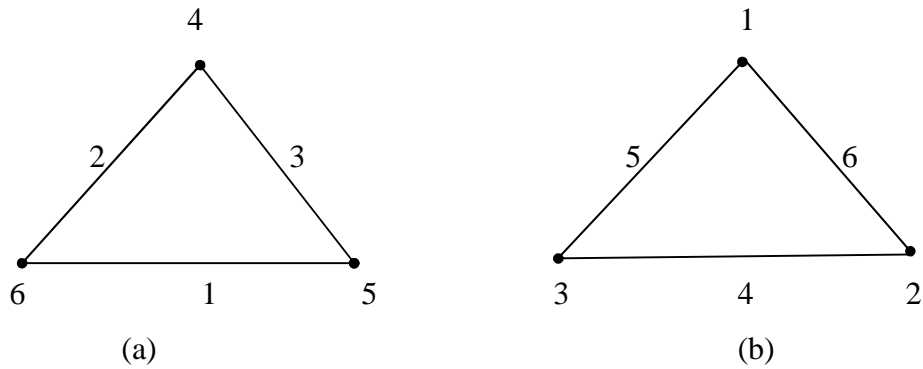
Jadi fungsi  $f$  adalah pelabelan total sisi ajaib pada graf  $H$  sehingga kita bisa membuat gambar baru di peroleh pelabelan total sisi ajaib



**Gambar 2.10 Graf  $G_2$**

**Contoh 2.4:**

Tunjukkan gambar di bawah ini adalah pelabelan total super sisi ajaib atau pelabelan super sisi ajaib?

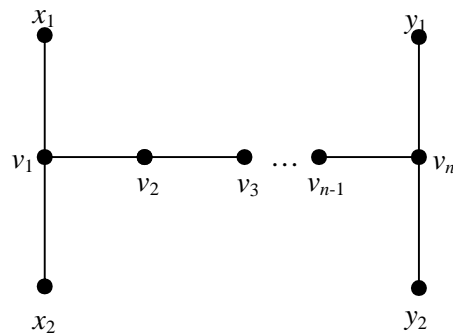


**Gambar 2.11 (a) Pelabelan Total Sisi Ajaib, (b) Pelabelan Super Sisi Ajaib.**

**Jawab:**

Gambar 2.11 (a) adalah pelabelan total sisi ajaib, karena jika dipetakan hasil konstantanya adalah 12, keadaan seperti ini disebut pelabelan total sisi ajaib (*super edge total labeling*) karena titik pemetaannya pada himpunan  $\{4,5,6\}$ , sedangkan pada gambar 2.11 (b) adalah pelabelan super sisi ajaib (*super edge-magic labeling*). Karena titik dipetakan pada himpunan  $\{1,2,3\}$ .

Menurut Abdussakir (2005), bentuk graf ulat model “H” yang mempunyai bentuk seperti gambar di bawah ini:



**Gambar 2.12 Graf Ulat Model H**

Graf ulat model “H” ini dilambangkan dengan  $H_n$ .

**Teorema 2.2 (Abdussakir, 2005)** Graf ulat  $H_n$  adalah super sisi ajaib, dengan  $n$  bilangan asli.

**Bukti :**

Misalkan himpunan titik pada graf  $H_n$  adalah

$$V(H_n) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3, \frac{1}{4}, v_{n-1}, v_n\}$$

dan

$$E(H_n) = \{x_1v_1, x_2v_1, y_1v_n, y_2v_n, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \frac{1}{4}, v_{n-1}v_n\}$$

Jadi order  $V(H_n)$  adalah  $(n + 4)$  dan ukuran  $E(H_n)$  adalah  $(n + 3)$ .

1. Untuk  $n$  genap, definisikan fungsi  $f$  dari  $V(H_n) \rightarrow E(H_n)$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \frac{1}{4}, 2n + 7\}$  sebagai berikut:

$$f(x_i) = i, \quad \text{untuk } i = 1, 2.$$

$$f(y_i) = n + 2 + i, \quad \text{untuk } i = 1, 2.$$

$$f(v_i) = \frac{n-2}{2} + 4 + \frac{i-1}{2}, \quad \text{untuk } i \text{ ganjil, } 1 \leq i \leq n.$$

$$f(v_i) = \frac{i-2}{2} + 3, \quad \text{untuk } i \text{ genap, } 1 \leq i \leq n.$$

$$f(x_i v_1) = 2n - i + 8, \quad \text{untuk } i = 1, 2.$$

$$f(y_i v_n) = n - i + 7, \quad \text{untuk } i = 1, 2.$$

$$f(v_i v_{i+1}) = 2n - i + 6, \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n - 1.$$

Dengan demikian  $f$  adalah fungsi bijektif dan memetakan  $V(H_n)$  ke himpunan titik  $\{1, 2, 3, \dots, n + 4\}$ . Selanjutnya,

- a. Untuk sisi  $x_i v_1$

$$f(x_i) + f(x_i v_1) + f(v_1) = i + (2n - i + 8) + \frac{n-2}{2} + 4 + \frac{1-1}{2}$$

$$= \frac{5n}{2} + 11.$$

b. Untuk sisi  $y_i v_1$

$$\begin{aligned} f(y_i) + f(y_i v_n) + f(v_n) &= (n + 2 + i) + (n - i + 7) + \frac{n-2}{2} + 3 \\ &= \frac{5n}{2} + 11. \end{aligned}$$

c. Untuk sisi  $v_i v_{i+1}$ ,  $i$  ganjil

$$\begin{aligned} f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) &= \left(\frac{n-2}{2} + 4 + \frac{i-1}{2}\right) + (2n - i + 6) + \frac{i+1-2}{2} + 3 \\ &= \frac{5n}{2} + 11. \end{aligned}$$

d. Untuk sisi  $v_i v_{i+1}$ ,  $i$  genap

$$\begin{aligned} f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) &= \left(\frac{i-2}{2} + 3\right) + (2n - i + 6) \\ &\quad + \left(\frac{n-2}{2} + 4 + \frac{(i+1)-1}{2}\right) \\ &= \frac{5n}{2} + 11. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa graf ulat  $H_n$  ( $n$  bilangan asli genap) adalah super sisi ajaib, dengan bilangan ajaib

$$k = \frac{5n}{2} + 11.$$

2. Untuk  $n$  ganjil, definisikan fungsi  $f$  dari  $V(H_n) \cup E(H_n)$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, 2n + 7\}$  sebagai berikut:

$$f(x_i) = i, \quad \text{untuk } i = 1, 2.$$

$$f(y_i) = \frac{n-1}{2} + 2 + i \quad \text{untuk } i = 1, 2.$$

$$f(v_i) = \frac{n-3}{2} + 6 + \frac{i-1}{2}, \quad \text{untuk } i \text{ ganjil, } 1 \leq i \leq n.$$

$$f(v_i) = \frac{i-2}{2} + 3, \quad \text{untuk } i \text{ genap, } 1 \leq i \leq n.$$

$$f(x_i v_1) = 2n - i + 8, \quad \text{untuk } i = 1, 2.$$

$$f(y_i v_n) = n - i + 7, \quad \text{untuk } i = 1, 2.$$

$$f(v_i v_{i+1}) = 2n - i + 6, \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n - 1.$$

Dengan demikian  $f$  adalah fungsi bijektif dan memetakan  $V(H_n)$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, n + 4\}$ . Selanjutnya,

a. Untuk sisi  $x_i v_1$

$$\begin{aligned} f(x_i) + f(x_i v_1) + f(v_1) &= i + (2n - i + 8) + \frac{n-3}{2} + 6 + \frac{1-1}{2} \\ &= \frac{5(n-1)}{2} + 15. \end{aligned}$$

b. Untuk sisi  $y_i v_n$

$$\begin{aligned} f(y_i) + f(y_i v_n) + f(v_n) &= \left(\frac{n-1}{2} + 2 + i\right) + (n - i + 7) + \frac{n-3}{2} + 6 + \frac{n-1}{2} \\ &= \frac{5(n-1)}{2} + 15. \end{aligned}$$

c. Untuk sisi  $v_i v_{i+1}$ ,  $i$  ganjil

$$\begin{aligned} f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) &= \left(\frac{n-3}{2} + 6 + \frac{i-1}{2}\right) + (2n - i + 6) + \\ &\quad \frac{i+1-2}{2} + 3 \\ &= \frac{5(n-1)}{2} + 15. \end{aligned}$$

d. Untuk sisi  $v_i v_{i+1}$ ,  $i$  genap

$$\begin{aligned} f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) &= \left(\frac{i-2}{2} + 3\right) + (2n - i + 6) \\ &+ \left(\frac{n-3}{2} + 6 + \frac{(i+1)-1}{2}\right) \\ &= \frac{5(n-1)}{2} + 15. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa graf ulat  $H_n$ , ( $n$  bilangan asli ganjil) adalah super sisi ajaib, dengan bilangan ajaib

$$k = \frac{5(n-1)}{2} + 15.$$



## **BAB III**

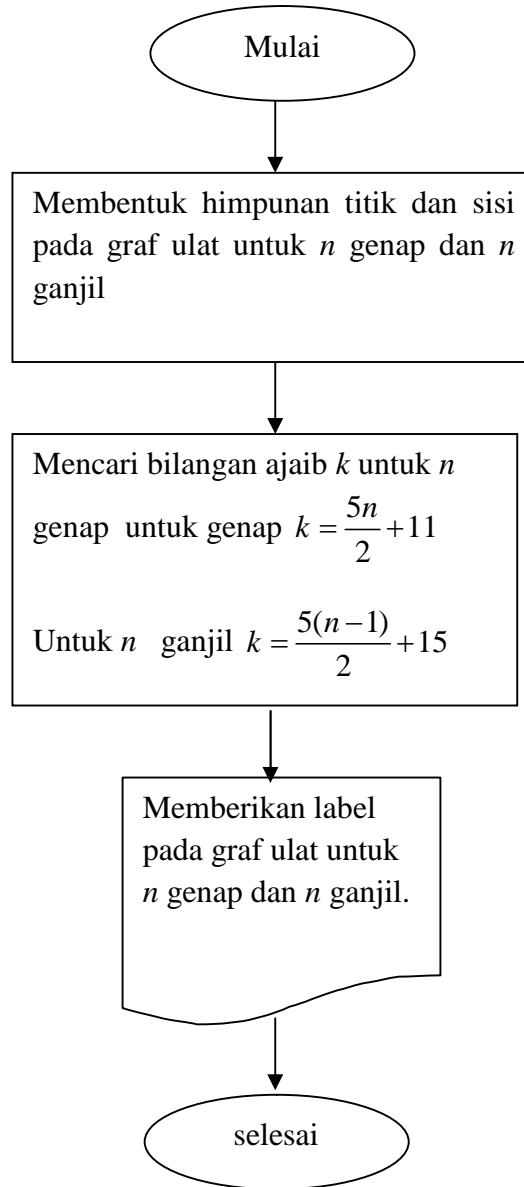
### **METODOLOGI PENELITIAN**

#### **3.1 Metodologi Pelabelan Super Sisi Ajaib**

Metode penelitian yang digunakan pada tugas akhir ini adalah studi pustaka dengan mempelajari *literature-literature* yang berhubungan dengan pokok permasalahan yang akan dibahas pada tugas akhir ini. Adapun langkah-langkah penulis pada tugas akhir ini untuk mencapai tujuan seperti yang diinginkan adalah sebagai berikut:

1. Memahami terminologi graf.
2. Memahami pelabelan super sisi ajaib beserta contoh-contohnya.
3. Membentuk himpunan titik dan sisi pada graf ulat model “H” untuk  $n$  genap dan  $n$  ganjil
4. Menentukan bilangan ajaib  $k$  graf ulat model “H”  $n$  genap dan  $n$  ganjil
5. Memberikan label graf ulat model “H” dengan  $n$  titik,
6. Mendapatkan hasil dari graf model “H ” yang telah dilabeli.

Langkah-langkah metodologi penelitian di atas dapat digambarkan dalam *flowchart* sebagai berikut:



**Gambar 3.1** Flowchart Metode Penelitian

## BAB IV PEMBAHASAN DAN HASIL

Bab ini akan membahas tentang bagaimana melakukan pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat model “H” dengan  $n$  titik, dimana  $n$  adalah bilangan asli genap dan bilangan asli ganjil adalah pelabelan super sisi ajaib. Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, graf ulat model “H” dengan panjang  $n$  ditulis dengan  $H_n$ .

### 4.1 Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Ulat $H_n$ , ( $n$ Bilangan Asli Genap)

Graf ulat model  $H_n$  dengan  $n$  bilangan asli genap mempunyai order  $(n+2)$  dan ukuran  $(n+1)$ , jadi himpunan titik pada graf  $H_n$  seperti pada Gambar 2.12.

Mempunya himpunan titik yaitu

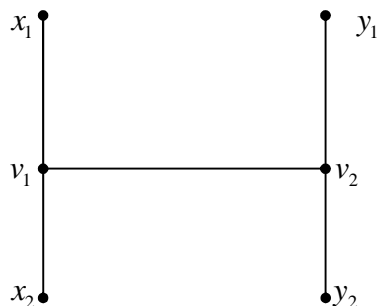
$$V(H_n) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

Himpunan sisinya adalah

$$E(H_n) = \{(x_1, v_1), (x_2, v_1), (y_1, v_n), (y_2, v_n), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \dots, (v_n, -1v_n)\}$$

#### 1. Untuk $n = 2$

Pelabelan super sisi ajaib pada graph ulat  $H_2$ , dengan anggota himpunan titik  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 6 menyatakan banyaknya titik, akan diperlihatkan pada gambar berikut:



**Gambar 4.1 Graf ulat Model  $H_2$**

Diketahui himpunan titik dan sisi dari graf ulat model “H” dengan  $n = 2$

$$V(H_2) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2\} \text{ dan}$$

$$E(H_2) = \{(x_1, v_1), (x_2, v_1), (y_1, v_2), (y_2, v_2), (v_1, v_2)\}$$

Kemudian mendapatkan bilangan angka ajaib graf ulat model “H” untuk  $n = 2$  dengan persamaan:

$$k = \frac{5n}{2} + 11$$

maka :

$$k = \frac{5(2)}{2} + 11.$$

$$k = 16$$

Jika pelabelan super sisi ajaib tersebut adalah fungsi  $f$ , maka diperoleh bahwa:

a. Titik  $f(x_i)$ , untuk  $i = 1, 2$

Sehingga diperoleh:

$$f(x_1) = 1$$

$$f(x_2) = 2$$

b. Titik  $f(y_i)$ , untuk  $i = 1, 2$ . dengan ketentuan

$$f(y_i) = n + 2 + i$$

Akan didapat :

$$f(y_1) = 2 + 2 + 1 = 5$$

$$f(y_2) = 2 + 2 + 2 = 6$$

c. Titik  $f(v_i)$ , untuk  $i$  ganjil,  $1 \leq i \leq n$  dengan ketentuan

$$f(v_i) = \frac{n-2}{2} + 4 + \frac{i-1}{2}$$

maka diperoleh:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \frac{2-2}{2} + 4 + \frac{1-1}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

- d. Titik  $f(v_i)$ , untuk  $i$  genap,  $1 \leq i \leq n$  dengan ketentuan  
Sehingga untuk  $f(v_i)$  diperoleh:

$$\begin{aligned} f(v_i) &= \frac{i-2}{2} + 3 \\ f(v_2) &= \frac{2-2}{2} + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

- e. Sisi  $f(x_i, v_i)$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(x_i, v_i) = 2n - i + 8$$

Sehingga diperoleh :

$$f(x_1, v_1) = (2(2) - 1) + 8 = 11$$

$$f(x_2, v_1) = (2(2) - 2) + 8 = 10$$

- f. Sisi  $f(v_i, v_{i+1})$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(v_i, v_{i+1}) = 2n - i + 6$$

Maka diperoleh:

$$f(v_1, v_2) = (2(2) - 1) + 6 = 9$$

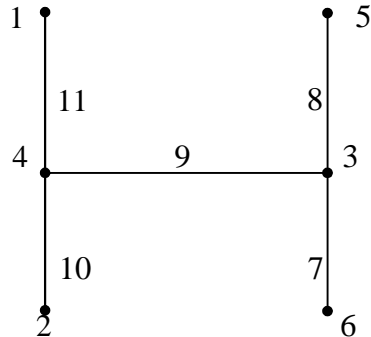
- g. Sisi  $f(y_i, v_n)$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(y_i, v_n) = n - i + 7$$

$$f(y_1, v_2) = (2 - 1) + 7 = 8$$

$$f(y_2, v_2) = (2 - 2) + 7 = 7$$

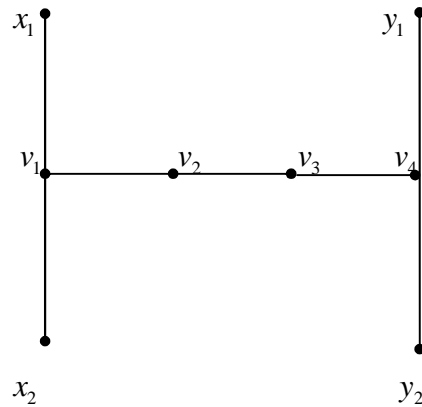
Dengan demikian setiap titik dan sisi telah didapat pelabelannya pada graf ulat model “H” dengan  $n = 2$ , akan diperlihatkan seperti gambar 4.2 di bawah ini.



**Gambar 4.2 Graf ulat Model  $H_2$  dengan  $k = 16$**

## 2. Untuk $n = 4$

Pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat  $H_4$  dengan himpunan titik  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , 8 menyatakan banyaknya titik, seperti pada Gambar 4.3 berikut:



**Gambar 4.3 Graf Ulat Model  $H_4$**

Diketahui himpunan titik dan sisi pada graf ulat model “H” dengan  $n = 4$

$$V(H_4) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3, v_4\} \text{ dan}$$

$$E(H_4) = \{(x_1, v_1), (x_2, v_1), (y_1, v_4), (y_2, v_4), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$$

Kemudian mendapatkan bilangan angka ajaib graf ulat model “H” untuk  $n = 4$ , dengan persamaan:

$$k = \frac{5n}{2} + 11$$

Maka:

$$k = \frac{5(4)}{2} + 11$$

$$k = 21$$

Jika pelabelan super sisi ajaib tersebut adalah fungsi  $f$ , maka diperoleh bahwa:

- a. Titik  $f(x_i)$ , untuk  $i = 1, 2$

Maka diperoleh:

$$f(x_1) = 1$$

$$f(x_2) = 2$$

- b. Titik  $f(y_i)$ , untuk  $i = 1, 2$ . dengan ketentuan

$$f(y_i) = n + 2 + i$$

Sehingga diperoleh:

$$f(y_1) = (4 + 2 + 1) = 7$$

$$f(y_2) = (4 + 2 + 2) = 8$$

- c. Titik  $f(v_i)$ , untuk  $i$  ganjil,  $1 \leq i \leq n$  dengan ketentuan

$$f(v_i) = \frac{n-2}{2} + 4 + \frac{i-1}{2}$$

Sehingga didapat :

$$f(v_1) = \frac{4-2}{2} + 4 + \frac{1-1}{2}$$

$$= 5$$

$$f(v_3) = \frac{4-2}{2} + 4 + \frac{3-1}{2}$$

$$= 6$$

- d. Titik  $f(v_i)$ , untuk  $i$  genap,  $1 \leq i \leq n$  dengan ketentuan

$$f(v_i) = \frac{i-2}{2} + 3$$

Sehingga didapat:

$$f(v_2) = \frac{2-2}{2} + 3$$

$$= 3$$

$$f(v_4) = \frac{4-2}{2} + 3$$

$$= 4$$

- e. Sisi  $f(x_i, v_1)$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(x_i, v_1) = 2n - i + 8$$

Maka diperoleh:

$$f(x_1, v_1) = (2(4) - 1) + 8$$

$$= 15$$

$$f(x_2, v_1) = (2(4) - 2) + 8$$

$$= 14$$



f. Sisi  $f(v_i, v_{i+1})$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(v_i, v_{i+1}) = 2n - i + 6$$

Maka diperoleh sisi:

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2) &= (2(4) - 1) + 6 \\ &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_2, v_3) &= (2(4) - 2) + 6 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_3, v_4) &= (2(4) - 3) + 6 \\ &= 11 \end{aligned}$$

g. Sisi  $f(y_i, v_n) f(y_1, v_2)$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

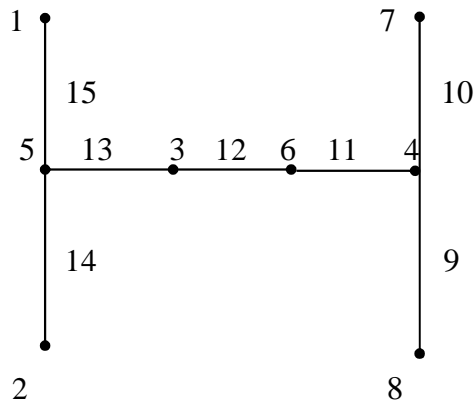
$$f(y_i, v_n) = n - i + 7$$

Maka diperoleh:

$$\begin{aligned} f(y_1, v_4) &= (4 - 1) + 7 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y_2, v_4) &= (4 - 2) + 7 \\ &= 9 \end{aligned}$$

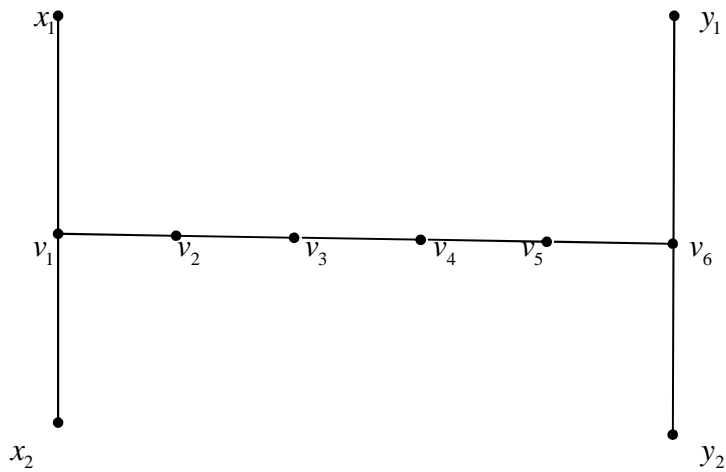
Dengan demikian setiap titik dan sisi telah didapat pelabelannya pada graf ulat model "H" dengan  $n = 4$ , akan diperlihatkan seperti Gambar 4.4 di bawah ini.



**Gambar 4.4** Graf Ulat Model  $H_4$  dengan  $k = 21$

**3. Untuk  $n = 6$**

Pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat  $H_6$  dengan himpunan titik  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , 10 menyatakan banyaknya titik, seperti pada Gambar 4.5 berikut:



**Gambar 4.5** Graf Ulat Model  $H_6$

Diketahui himpunan titik dan sisi pada graf ulat model “H” dengan  $n = 6$

$$V(H_6) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \text{ dan}$$

$$E(H_6) = \{(x_1, v_1), (x_2, v_1), (y_1, v_6), (y_2, v_6), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6)\}$$

Kemudian mendapatkan bilangan angka ajaib graf ulat model “H” untuk  $n = 6$ , dengan persamaan:

$$k = \frac{5n}{2} + 11$$

maka:

$$k = \frac{5(6)}{2} + 11$$

$$k = 26$$

Jika pelabelan super sisi ajaib tersebut adalah fungsi  $f$ , maka diperoleh bahwa:

- a. Titik  $f(x_i)$ , untuk  $i = 1, 2$

Akan didapat titik:

$$f(x_1) = 1$$

$$f(x_2) = 2$$

- b. Titik  $f(y_i)$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(y_i) = n + 2 + i$$

Akan didapat:

$$f(y_1) = (6 + 2 + 1) = 9$$

$$f(y_2) = (6 + 2 + 2) = 10$$

- c. Titik  $f(v_i)$ , untuk  $i$  ganjil,  $1 \leq i \leq n$  dengan ketentuan

$$f(v_i) = \frac{n-2}{2} + 4 + \frac{i-1}{2}$$

Sehingga diperoleh:

$$f(v_1) = \frac{6-2}{2} + 4 + \frac{1-1}{2} = 6$$

$$f(v_3) = \frac{6-2}{2} + 4 + \frac{3-1}{2}$$

$$= 7$$

$$f(v_5) = \frac{6-2}{2} + 4 + \frac{5-1}{2}$$

$$= 8$$

- d. Titik  $f(v_i)$ , untuk  $i$  genap,  $1 \leq i \leq n$  dengan ketentuan

$$f(v_i) = \frac{i-2}{2} + 3$$

Dengan demikian diperoleh:

$$f(v_2) = \frac{2-2}{2} + 3$$

$$= 3$$

$$f(v_4) = \frac{4-2}{2} + 3$$

$$= 4$$

$$f(v_6) = \frac{6-2}{2} + 3$$

$$= 5$$

- e. Sisi  $f(x_i, v_i)$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(x_i, v_i) = 2n - i + 8$$

Akan diperoleh:

$$f(x_1, v_1) = (2(6) - 1) + 8$$

$$= 19$$

$$f(x_2, v_1) = (2(6) - 2) + 8$$

$$= 18$$

f. Sisi  $f(v_i, v_{i+1})$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(v_i, v_{i+1}) = 2n - i + 6$$

Sehingga diperoleh:

$$f(v_1, v_2) = (2(6) - 1) + 6$$

$$= 17$$

$$f(v_2, v_3) = (2(6) - 2) + 6$$

$$= 16$$

$$f(v_3, v_4) = (2(6) - 3) + 6$$

$$= 15$$

$$f(v_4, v_5) = (2(6) - 4) + 6$$

$$= 14$$

$$f(v_5, v_6) = (2(6) - 5) + 6$$

$$= 13$$

g. Sisi  $f(y_i, v_i)$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(y_i, v_n) = n - i + 7$$

Sehingga diperoleh:

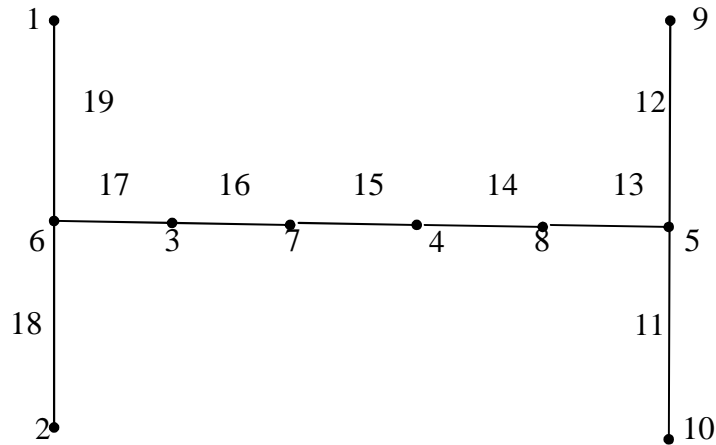
$$f(y_1, v_6) = (6 - 1) + 7$$

$$= 12$$

$$f(y_2, v_4) = (6 - 2) + 7$$

$$= 11$$

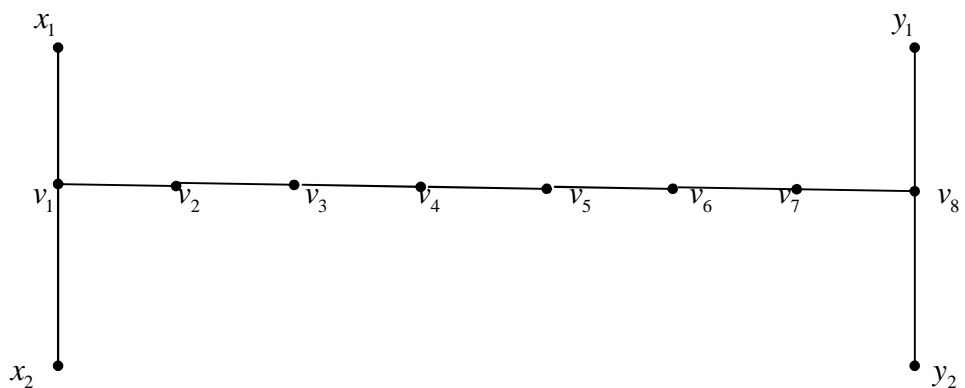
Dengan demikian setiap titik dan sisi telah didapat pelabelannya pada graf ulat model “H” dengan  $n = 6$ , akan diperlihatkan seperti Gambar 4.6 di bawah ini:



**Gambar 4.6 Graf Ulat Model  $H_6$  dengan  $k = 26$**

#### 4. Untuk $n = 8$

Pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat  $H_8$  dengan himpunan titik  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ , 12 menyatakan banyaknya titik, seperti pada Gambar 4.7 berikut:



**Gambar 4.7 Graf Ulat Model  $H_8$**

Diketahui himpunan titik dan sisi pada graf ulat model “H” dengan  $n = 8$

$$V(H_8) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

dan

$$E(H_8) = \{(x_1, v_1), (x_2, v_1), (y_1, v_8), (y_2, v_8), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_8)\}$$

Kemudian mendapatkan bilangan angka ajaib graf ulat model “H” untuk  $n = 8$ , dengan persamaan:

$$k = \frac{5n}{2} + 11$$

maka:

$$k = \frac{5(8)}{2} + 11$$

$$k = 31$$

Jika pelabelan super sisi ajaib tersebut adalah fungsi  $f$ , maka diperoleh bahwa:

- a. Titik  $f(x_i)$ , untuk  $i = 1, 2$

Maka didapat:

$$f(x_1) = 1$$

$$f(x_2) = 2$$

- b. Titik  $f(y_i)$ , untuk  $i = 1, 2$ . dengan ketentuan

$$f(y_i) = n + 2 + i$$

Maka akan diperoleh:

$$f(y_1) = (8 + 2 + 1) = 11$$

$$f(y_2) = (8 + 2 + 2) = 12$$

- c. Titik  $f(v_i)$ , untuk  $i$  ganjil,  $1 \leq i \leq n$  dengan ketentuan

$$f(v_i) = \frac{n-2}{2} + 4 + \frac{i-1}{2}$$

Akan diperoleh:

$$f(v_1) = \frac{8-2}{2} + 4 + \frac{1-1}{2}$$

$$= 7$$

$$f(v_3) = \frac{8-2}{2} + 4 + \frac{3-1}{2}$$

$$= 8$$

$$f(v_5) = \frac{8-2}{2} + 4 + \frac{5-1}{2}$$

$$= 9$$

$$f(v_7) = \frac{8-2}{2} + 4 + \frac{7-1}{2}$$

$$= 10$$

d. Titik  $f(v_i)$ , untuk  $i$  genap,  $1 \leq i \leq n$  dengan ketentuan

$$f(v_i) = \frac{i-2}{2} + 3$$

Sehingga didapat:

$$f(v_2) = \frac{2-2}{2} + 3$$

$$= 3$$

$$f(v_4) = \frac{4-2}{2} + 3$$

$$= 4$$

$$f(v_6) = \frac{6-2}{2} + 3$$

$$= 5$$



$$f(v_8) = \frac{8-2}{2} + 3$$

$$= 6$$

e. Sisi  $f(x_i, v_i)$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(x_i, v_i) = 2n - i + 8$$

Maka didapat:

$$f(x_1, v_1) = (2(8) - 1) + 8$$

$$= 23$$

$$f(x_2, v_1) = (2(8) - 2) + 8$$

$$= 22$$

f. Sisi  $f(v_i, v_{i+1})$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(v_i, v_{i+1}) = 2n - i + 6$$

akan didapat:

$$f(v_1, v_2) = (2(8) - 1) + 6$$

$$= 21$$

$$f(v_2, v_3) = (2(8) - 2) + 6$$

$$= 20$$

$$f(v_3, v_4) = (2(8) - 3) + 6$$

$$= 19$$

$$f(v_4, v_5) = (2(8) - 4) + 6$$

$$= 18$$

$$f(v_5, v_6) = (2(8) - 5) + 6$$

$$= 17$$

$$f(v_6, v_7) = (2(8) - 5) + 6$$

$$= 16$$

$$f(v_7, v_8) = (2(8) - 5) + 6$$

$$= 15$$

g. Sisi  $f(y_i, v_i)$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(y_i, v_n) = n - i + 7$$

Maka akan diperoleh:

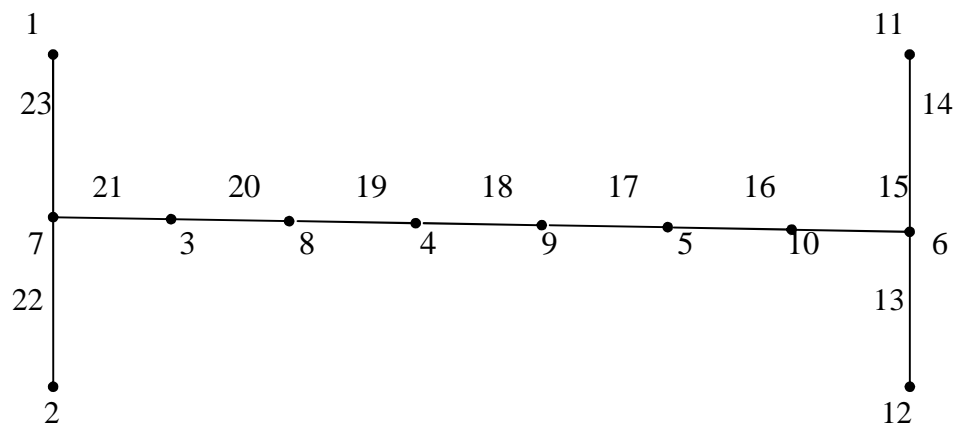
$$f(y_1, v_8) = (8 - 1) + 7$$

$$= 14$$

$$f(y_2, v_8) = (8 - 2) + 7$$

$$= 13$$

Dengan demikian setiap titik dan sisi telah didapat pelabelannya pada graf ulat model "H" dengan  $n = 8$ , akan diperlihatkan seperti Gambar 4.8 di bawah ini:



**Gambar 4.8 Graf Ulat Model  $H_8$  dengan  $k = 31$**

Dengan demikian dapat disimpulkan graf ulat model  $H$  untuk  $n$  bilangan asli genap adalah pelabelan super sisi ajaib.

### 5. Untuk $n = \text{genap}$

Pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat  $H_n$  dengan himpunan titik seperti pada gambar 2.12. Diketahui himpunan titik dan sisi pada graf ulat model “H” dengan  $n = \text{genap}$

$$V(H_n) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\}$$

dan

$$E(H_n) = \{(x_1, v_1), (x_2, v_1), (y_1, v_8), (y_2, v_8), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \dots, v_{n-1}, v_n\}$$

Kemudian mendapatkan bilangan angka ajaib graf ulat model “H” untuk  $n = \text{genap}$  adalah sebagai berikut:

$$k = \frac{5n}{2} + 11$$

Jika pelabelan super sisi ajaib tersebut adalah fungsi  $f$ , maka diperoleh bahwa:

- a. Titik  $f(x_i)$ , untuk  $i = 1, 2$

akan didapat:

$$f(x_1) = 1$$

$$f(x_2) = 2$$

- b. Titik  $f(y_i)$ , untuk  $i = 1, 2$ . dengan ketentuan

$$f(y_i) = n + 2 + i$$

Maka didapat:

$$f(y_1) = n + 2 + 1$$

$$= n + 3$$

$$\begin{aligned}
 f(y_2) &= n + 2 + 2 \\
 &= n + 4
 \end{aligned}$$

c. Titik  $f(v_i)$ , untuk  $i$  ganjil,  $1 \leq i \leq n$  dengan ketentuan

$$f(v_i) = \frac{n-2}{2} + 4 + \frac{i-1}{2}$$

Maka akan didapat:

$$f(v_1) = \frac{n-2}{2} + 4 + \frac{1-1}{2}$$

$$= \frac{n-2}{2} + 4$$

$$= \frac{n-2+8}{2}$$

$$= \frac{n+6}{2}$$

$$f(v_3) = \frac{n-2}{2} + 4 + \frac{3-1}{2}$$

$$= \frac{n-2}{2} + 4 + 1$$

$$= \frac{n+2}{2} + 5$$

$$= \frac{n+2+10}{2}$$

$$= \frac{n+8}{2}$$

$$f(v_{n-1}) = \frac{n-2}{2} + 4 + \frac{(n-1)-1}{2}$$

$$= \frac{n-2}{2} + 4 + \frac{(n-1)-1}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{2} - 1 + 4 + \frac{n}{2} - 1 \\
&= \frac{2n}{2} + 2 \\
&= n + 2
\end{aligned}$$

- d. Titik  $f(v_i)$ , untuk  $i$  genap,  $1 \leq i \leq n$  dengan ketentuan

$$f(v_i) = \frac{i-2}{2} + 3$$

Maka diperoleh:

$$f(v_2) = \frac{3-2}{2} + 3$$

$$= 3$$

$$f(v_4) = \frac{4-2}{2} + 3$$

$$= 4$$

$$f(v_n) = \frac{n-2}{2} + 3$$

$$= \frac{n}{2} - 1 + 3$$

$$= \frac{n}{2} + 2$$

- e. Sisi  $f(x_i, v_i)$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(x_i, v_i) = 2n - i + 8$$

Akan didapat:

$$f(x_1, v_1) = 2n - 1 + 8$$

$$= 2n + 7$$

$$f(x_2, v_1) = 2n - 2 + 8$$

$$= 2n + 6$$

f. Sisi  $f(v_i, v_{i+1})$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(v_i, v_{i+1}) = 2n - i + 6$$

Maka didapat:

$$f(v_1, v_2) = 2n - 1 + 6$$

$$= 2n + 5$$

$$f(v_2, v_3) = 2n - 2 + 6$$

$$= 2n + 4$$

$$f(v_3, v_4) = 2n - 3 + 6$$

$$= 2n + 3$$

$$f(v_i, v_{i+1}) = 2n - (i - 1) + 6$$

$$= 2n - i + 7$$

$$= n + 7$$

g. Sisi  $f(y_i, v_i)$ , untuk  $i = 1, 2$  dengan ketentuan

$$f(y_i, v_i) = n - i + 7$$

Maka diperoleh:

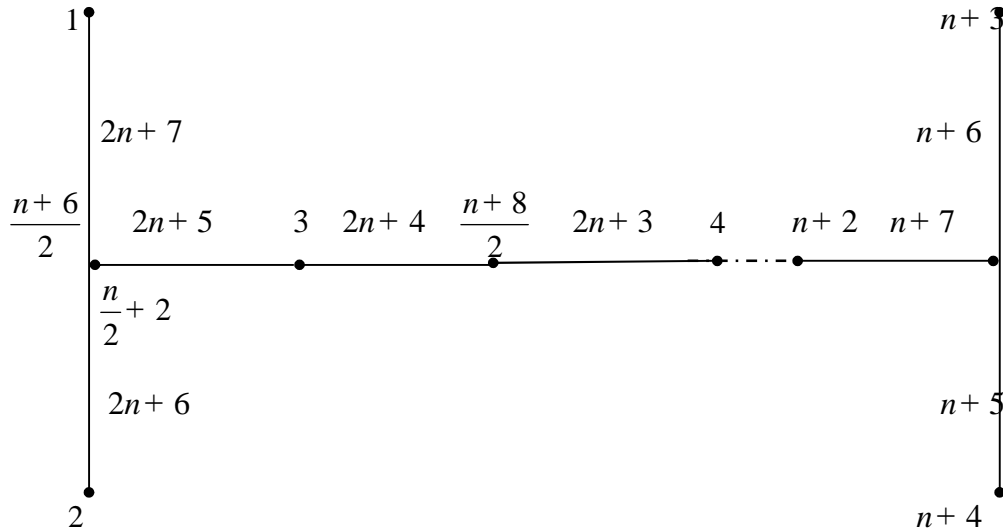
$$f(y_1, v_1) = n - 1 + 7$$

$$= n + 6$$

$$f(y_2, v_2) = n - 2 + 7$$

$$= n + 5$$

Dengan demikian setiap titik dan sisi telah didapat pelabelannya pada graf ulat model “H” dengan  $n = \text{genap}$ , akan diperlihatkan seperti Gambar 4.9 di bawah ini:



**Gambar 4.9 Graf Ulat dengan  $n = \text{genap}$**

Diketahui dari penyelesaian diatas untuk graf ulat model “H”  $n = \text{genap}$  didapat konstansta ajaib  $k = \frac{5n}{2} + 11$ . Dengan demikian graf ulat model “H” untuk  $n$  bilangan asli genap adalah pelabelan super sisi ajaib.

#### **4.2 Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Ulat $H_n$ ( $n$ Bilangan Asli Ganjil)**

Graf ulat model  $H_n$  dengan  $n$  bilangan asli ganjil mempunyai order  $(n + 2)$  dan ukuran  $(n + 1)$ , seperti pada Gambar 2.12 . Mempunya himpunan titik yaitu

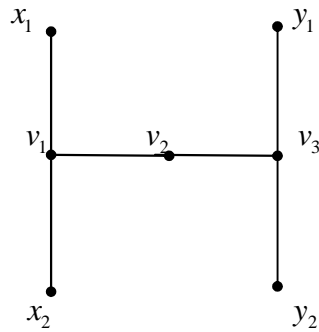
$$V(H_n) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3, \frac{1}{4}, v_n\}$$

dan himpunan sisinya yaitu

$$E(H_n) = \{(x_1, v_1), (x_2, v_1), (y_1, v_n), (y_2, v_n), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \dots, (v_n, -1v_n)\}$$

**1. Untuk  $n = 3$**

Pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat  $H_3$  dengan himpunan titik  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , 7 menyatakan banyaknya titik, seperti pada Gambar 4.12 berikut:



**Gambar 4.10 Graf ulat  $H_3$**

Diketahui himpunan titik dan sisi pada graf ulat model “H” dengan  $n = 3$

$$V(H_3) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3\}$$

dan

$$E(H_3) = \{(x_1, v_1), (x_2, v_1), (y_1, v_3), (y_2, v_3), (v_1, v_2), (v_2, v_3)\}$$

Kemudian mendapatkan bilangan angka ajaib graf ulat model “H” untuk  $n = 3$ , dengan rumusan

$$k = \frac{5(n-1)}{2} + 15$$

maka:

$$= \frac{5(3-1)}{2} + 15$$

$$= 20$$

Jika pelabelan super sisi ajaib tersebut adalah fungsi  $f$ , maka diperoleh bahwa:



- a. Titik  $f(x_i)$  , untuk  $i = 1, 2$

Maka didapat:

$$f(x_1) = 1$$

$$f(x_2) = 2$$

- b. Titik  $f(y_i)$ , untuk  $i = 1, 2$

$$f(y_i) = \frac{n-1}{2} + 2 + i$$

maka didapat:

$$f(y_1) = \frac{3-1}{2} + 2 + 1$$

$$= 4$$

$$f(y_2) = \frac{3-1}{2} + 2 + 2$$

$$= 5$$

- c. Titik  $f(v_i) = \frac{n-3}{2} + 6 + \frac{i-1}{2}$ , untuk  $i$  ganjil,  $1 \leq i \leq n$ .

Maka didapat:

$$f(v_1) = \frac{3-3}{2} + 6 + \frac{1-1}{2}$$

$$= 6$$

$$f(v_3) = \frac{3-3}{2} + 6 + \frac{3-1}{2}$$

$$= 7$$

- d. Titik  $f(v_i) = \frac{i-2}{2} + 3$ , untuk  $i$  genap,  $1 \leq i \leq n$

Maka didapat:

$$\begin{aligned} f(v_2) &= \frac{2-2}{2} + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

- e. Sisi  $f(x_i, v_1) = 2n - i + 8$ , untuk  $i = 1, 2$

Maka didapat:

$$\begin{aligned} f(x_1, v_1) &= (2(3) - 1) + 8 \\ &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_2, v_1) &= (2(3) - 2) + 8 \\ &= 12 \end{aligned}$$

- f. Sisi  $f(y_i, v_n) = n - i + 7$ , untuk  $i = 1, 2$

Maka akan didapat:

$$\begin{aligned} f(y_1, v_3) &= (3 - 1) + 7 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y_2, v_3) &= (3 - 2) + 7 \\ &= 8 \end{aligned}$$

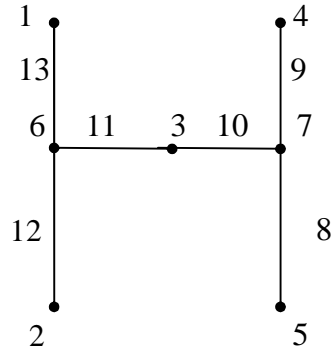
- g. Sisi  $f(v_i v_{i+1}) = 2n - i + 6$ , untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

Akan diperoleh:

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2) &= (2(3) - 1) + 6 \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_2, v_3) &= (2(3) - 2) + 6 \\ &= 10 \end{aligned}$$

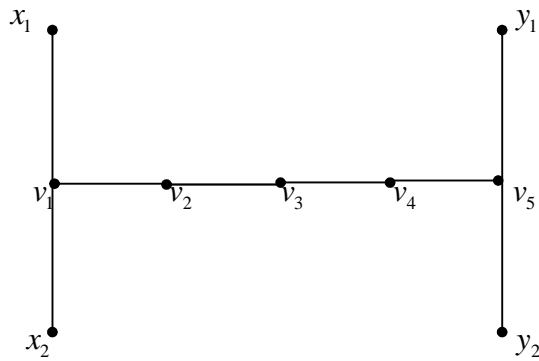
Dengan demikian setiap titik dan sisi telah didapat pelabelannya pada graf ulat model “H” dengan  $n = 3$ , akan diperlihatkan seperti Gambar 4.13 di bawah ini



**Gambar 4.11 Graf ulat Model  $H_3$  dengan  $k = 21$**

**2. Untuk  $n = 5$**

Pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat  $H_5$  dengan himpunan titik  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , 9 menyatakan banyaknya titik, seperti pada Gambar 4.14 berikut:



**Gambar 4.12 Graf ulat Model  $H_5$**

Diketahui himpunan titik dan sisi pada graf ulat model “H” dengan  $n = 5$

$$V(H_5) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

dan

$$E(H_5) = \{(x_1, v_1), (x_2, v_1), (y_1, v_5), (y_2, v_5), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5)\}$$

Kemudian mendapatkan bilangan angka ajaib graf ulat model “H” untuk  $n = 5$ , dengan persamaan:

$$k = \frac{5(n-1)}{2} + 15$$

maka:

$$\begin{aligned} k &= \frac{5(5-1)}{2} + 15 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Jika pelabelan super sisi ajaib tersebut adalah fungsi  $f$ , maka diperoleh bahwa:

a. Titik  $f(x_i)$ , untuk  $i = 1, 2$

Maka diperoleh:

$$f(x_1) = 1$$

$$f(x_2) = 2$$

b. Titik  $f(y_i)$ , untuk  $i = 1, 2$

Maka diperoleh:

$$f(y_i) = \frac{n-1}{2} + 2 + i$$

$$\begin{aligned} f(y_1) &= \frac{5-1}{2} + 2 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y_2) &= \frac{5-1}{2} + 2 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

c. Titik  $f(v_i) = \frac{n-3}{2} + 6 + \frac{i-1}{2}$ , untuk  $i$  ganjil,  $1 \leq i \leq n$ .

Maka diperoleh:

$$f(v_1) = \frac{5-3}{2} + 6 + \frac{1-1}{2}$$

$$= 7$$

$$f(v_3) = \frac{5-3}{2} + 6 + \frac{3-1}{2}$$

$$= 8$$

$$f(v_5) = \frac{5-3}{2} + 6 + \frac{5-1}{2}$$

$$= 9$$

- d. Titik  $f(v_i) = \frac{i-2}{2} + 3$ , untuk  $i$  genap,  $1 \leq i \leq n$

Maka didapatkan:

$$f(v_2) = \frac{2-2}{2} + 3$$

$$= 3$$

$$f(v_4) = \frac{4-2}{2} + 3$$

$$= 4$$

- e. Sisi  $f(x_i, v_1) = 2n - i + 8$ , untuk  $i = 1, 2$

Maka diperoleh:

$$f(x_1, v_1) = (2(5) - 1) + 8$$

$$= 17$$

$$f(x_2, v_1) = (2(5) - 2) + 8$$

$$= 16$$

- f. Sisi  $f(y_i, v_n) = n - i + 7$ , untuk  $i = 1, 2$

Maka akan didapatkan:

$$\begin{aligned} f(y_1, v_5) &= (5-1) + 7 \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y_2, v_5) &= (5-2) + 7 \\ &= 10 \end{aligned}$$

- g. Sisi  $f(v_i, v_{i+1}) = 2n - i + 6$ , untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

Sehingga diperoleh:

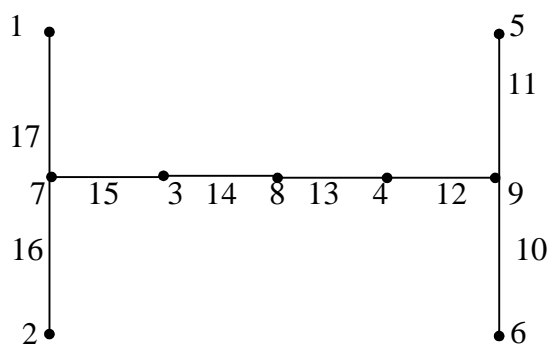
$$\begin{aligned} f(v_1, v_2) &= (2(5) - 1) + 6 \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_2, v_3) &= (2(5) - 2) + 6 \\ &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_3, v_4) &= (2(5) - 3) + 6 \\ &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_4, v_5) &= (2(5) - 4) + 6 \\ &= 12 \end{aligned}$$

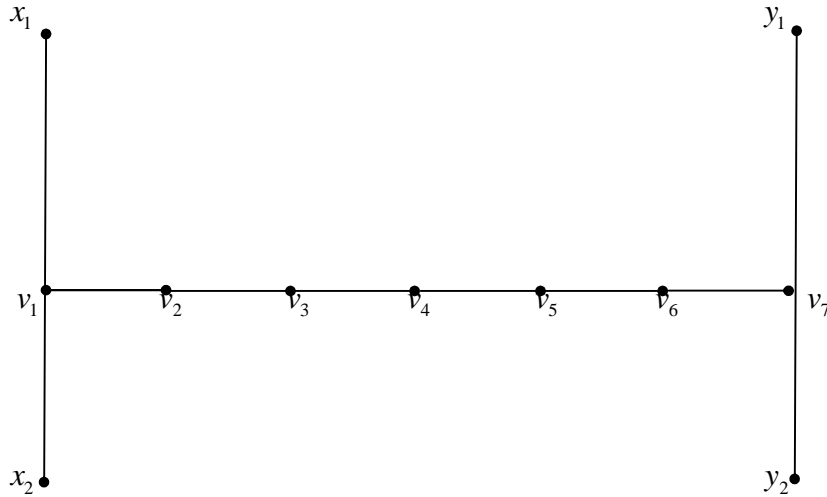
Dengan demikian setiap titik dan sisi telah didapat pelabelannya pada graf ulat model "H" dengan  $n = 5$ , akan diperlihatkan seperti Gambar 4.15 di bawah ini.



**Gambar 4.13** Graf ulat Model  $H_5$  dengan  $k = 25$

### 3. Untuk $n = 7$

Pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat  $H_7$  dengan himpunan titik  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ , 11 menyatakan banyaknya titik, seperti pada Gambar 4.16 berikut:



**Gambar 4.14 Graf Ulat Model  $H_7$**

Diketahui himpunan titik dan sisi pada graf ulat model “H” dengan  $n = 7$

$$V(H_7) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

dan

$$E(H_7) = \{(x_1, v_1), (x_2, v_1), (y_1, v_7), (y_2, v_7), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7)\}$$

Kemudian mendapatkan bilangan angka ajaib graf ulat model “H” untuk  $n = 7$ , dengan persamaan:

$$k = \frac{5(n-1)}{2} + 15$$

maka:

$$k = \frac{5(7-1)}{2} + 15$$

$$k = 30$$

Jika pelabelan super sisi ajaib tersebut adalah fungsi  $f$ , maka diperoleh bahwa:

- a. Titik  $f(x_i)$  , untuk  $i=1,2$

Sehingga diperoleh:

$$f(x_1) = 1$$

$$f(x_2) = 2$$

- b. Titik  $f(y_i)$ , untuk  $i=1,2$

Akan didapatkan:

$$f(y_i) = \frac{n-1}{2} + 2 + i$$

$$\begin{aligned} f(y_1) &= \frac{7-1}{2} + 2 + 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y_2) &= \frac{7-1}{2} + 2 + 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

- c. Titik  $f(v_i) = \frac{n-3}{2} + 6 + \frac{i-1}{2}$ , untuk  $i$  ganjil,  $1 \leq i \leq n$ .

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \frac{7-3}{2} + 6 + \frac{1-1}{2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_3) &= \frac{7-3}{2} + 6 + \frac{3-1}{2} \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_5) &= \frac{7-3}{2} + 6 + \frac{5-1}{2} \\ &= 10 \end{aligned}$$



$$f(v_7) = \frac{7-3}{2} + 6 + \frac{7-1}{2}$$

$$= 11$$

- d. Titik  $f(v_i) = \frac{i-2}{2} + 3$ , untuk  $i$  genap,  $1 \leq i \leq n$

Sehingga diperoleh:

$$f(v_2) = \frac{2-2}{2} + 3$$

$$= 3$$

$$f(v_4) = \frac{4-2}{2} + 3$$

$$= 4$$

$$f(v_6) = \frac{6-2}{2} + 3$$

$$= 5$$

- e. Sisi  $f(x_i, v_1) = 2n - i + 8$ , untuk  $i = 1, 2$

Sehingga didapatkan:

$$f(x_1, v_1) = (2(7) - 1) + 8$$

$$= 21$$

$$f(x_2, v_1) = (2(7) - 2) + 8$$

$$= 20$$

- f. Sisi  $f(y_i, v_n) = n - i + 7$ , untuk  $i = 1, 2$

Sehingga didapatkan:

$$f(y_1, v_7) = (7 - 1) + 7$$

$$= 13$$

$$f(y_2, v_7) = (7-2) + 7$$

$$= 12$$

- g. Sisi  $f(v_i v_{i+1}) = 2n - i + 6$ , untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$

Akan didapatkan:

$$f(v_1, v_2) = (2(7) - 1) + 6$$

$$= 19$$

$$f(v_2, v_3) = (2(7) - 2) + 6$$

$$= 18$$

$$f(v_3, v_4) = (2(7) - 3) + 6$$

$$= 17$$

$$f(v_4, v_5) = (2(7) - 4) + 6$$

$$= 16$$

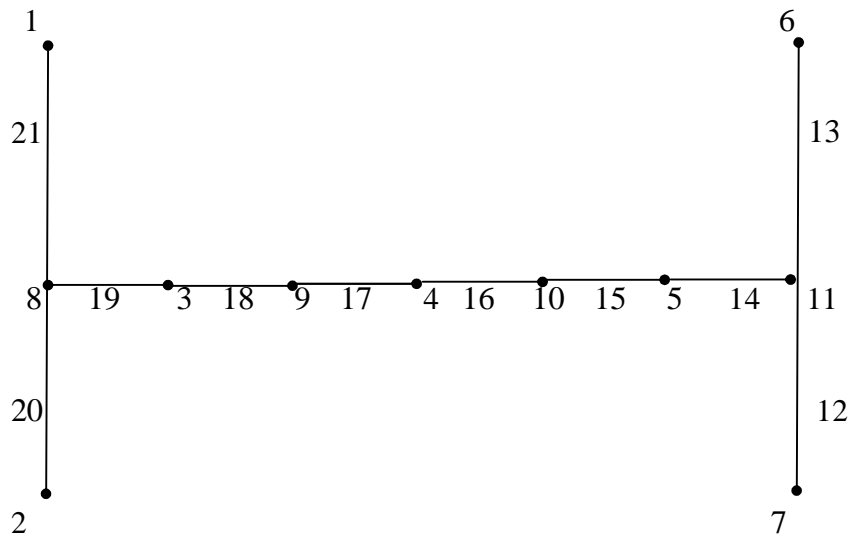
$$f(v_5, v_6) = (2(7) - 5) + 6$$

$$= 15$$

$$f(v_6, v_7) = (2(7) - 6) + 6$$

$$= 14$$

Dengan demikian setiap titik dan sisi telah didapat pelabelannya pada graf ulat model "H" dengan  $n = 7$ , akan diperlihatkan seperti Gambar 4.17 di bawah ini:



**Gambar 4.15 Graf ulat Model  $H_7$  dengan  $k = 30$**

#### 4. Untuk $n = \text{ganjil}$

Pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat  $H_n$  dengan himpunan titik seperti pada gambar 2.12. Diketahui himpunan titik dan sisi pada graf ulat model “H” dengan  $n = \text{ganjil}$

$$V(H_n) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\}$$

dan

$$E(H_n) = \{(x_1, v_1), (x_2, v_1), (y_1, v_8), (y_2, v_8), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \dots, v_{n-1}, v_n\}$$

Kemudian mendapatkan bilangan angka ajaib graf ulat model “H” untuk  $n = \text{ganjil}$  adalah sebagai berikut

$$k = \frac{5(n-1)}{2} + 15$$

Jika pelabelan super sisi ajaib tersebut adalah fungsi  $f$ , maka diperoleh bahwa:

- a. Titik  $f(x_i)$  , untuk  $i = 1, 2$

Maka:

$$f(x_1) = 1$$

$$f(x_2) = 2$$

b. Titik  $f(y_i)$ , untuk  $i = 1, 2$

Maka diperoleh:

$$f(y_i) = \frac{n-1}{2} + 2 + i$$

$$f(y_1) = \frac{n-1}{2} + 2 + 1$$

$$= \frac{n-1}{2} + 3$$

$$= \frac{n+5}{2}$$

$$f(y_2) = \frac{n-1}{2} + 2 + 2$$

$$= \frac{n+7}{2}$$

c. Titik  $f(v_i) = \frac{n-3}{2} + 6 + \frac{i-1}{2}$ , untuk  $i$  ganjil,  $1 \leq i \leq n$ .

Maka didapat:

$$f(v_1) = \frac{n-3}{2} + 6 + \frac{1-1}{2}$$

$$= \frac{n-3}{2} + 6$$

$$= \frac{n-3+12}{2}$$

$$= \frac{n+9}{2}$$

$$f(v_3) = \frac{n-3}{2} + 6 + \frac{3-1}{2}$$

$$= \frac{n-3}{2} + 7$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n-3+14}{2} \\
&= \frac{n+11}{2} \\
f(v_n) &= \frac{n-3}{2} + 6 + \frac{i-1}{2} \\
&= \frac{n-3}{2} + 6 + \frac{n-1}{2} \\
&= \frac{2n-4}{2} + 6 \\
&= n-2+6 \\
&= n+4
\end{aligned}$$

- d. Titik  $f(v_i) = \frac{i-2}{2} + 3$ , untuk  $i$  genap,  $1 \leq i \leq n$

Sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}
f(v_2) &= \frac{2-2}{2} + 3 \\
&= 3 \\
f(v_4) &= \frac{4-2}{2} + 3 \\
&= 4 \\
f(v_{n-1}) &= \frac{(n-1)-2}{2} + 3 \\
&= \frac{n-3}{2} + 3 \\
&= \frac{n+3}{2}
\end{aligned}$$

- e. Sisi  $f(x, v_i) = 2n - i + 8$ , untuk  $i = 1, 2$

Maka didapat:

$$f(x_1, v_1) = 2n - 1 + 8$$

$$= 2n + 7$$

$$f(x_2, v_1) = 2n - 2 + 8$$

$$= 2n + 6$$

f. Sisi  $f(y_i, v_n) = n - i + 7$ , untuk  $i = 1, 2$

Maka akan diperoleh:

$$f(y_1, v_7) = n - 1 + 7$$

$$= n + 6$$

$$f(y_2, v_7) = n - 2 + 7$$

$$= n + 5$$

g. Sisi  $f(v_i, v_{i+1}) = 2n - i + 6$ , untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

Maka diperoleh:

$$f(v_1, v_2) = 2n - 1 + 6$$

$$= 2n + 5$$

$$f(v_2, v_3) = 2n - 2 + 6$$

$$= 2n + 4$$

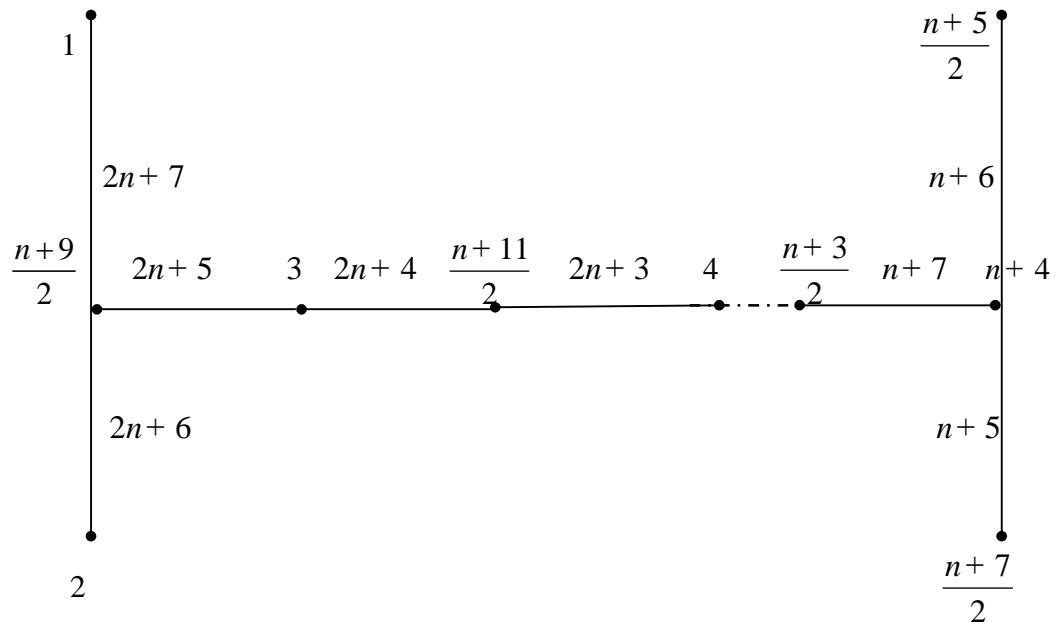
$$f(v_3, v_4) = 2n - 3 + 6$$

$$= 2n + 3$$

$$f(v_i, v_{i+1}) = 2n - (i - 1) + 6$$

$$= n + 7$$

Dengan demikian setiap titik dan sisi telah didapat pelabelannya pada graf ulat model “H” dengan  $n = \text{ganjil}$ , akan diperlihatkan seperti Gambar 4.18 di bawah ini.



**Gambar 4.16 Graf Ulat dengan  $n = \text{ganjil}$**

Diketahui dari penyelesaian di atas untuk graf ulat model “H”  $n = \text{ganjil}$  didapat konstansta ajaib  $k = \frac{5(n-1)}{2} + 15$ . Dengan demikian graf ulat model “H” untuk  $n$  bilangan asli ganjil adalah pelabelan super sisi ajaib.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab IV maka dapat diambil kesimpulan bahwa graf ulat model “H” dengan  $n$  titik, mempunyai himpunan titik  $(n + 4)$  dan himpunan sisi  $(n + 3)$ . Selanjutnya melabeli graf ulat model “H” yang telah didapatkan konstanta ajaibnya dan himpunan titik dan sisinya. Konstanta ajaib graf ulat model “H” dengan  $n$  titik adalah sebagai berikut:

- a. Graf ulat model “H” dengan  $n$  genap mempunyai konstanta ajaib

$$k = \frac{5n}{2} + 11$$

Graf ulat model “H” untuk  $n = 2$  mempunyai konstanta ajaib  $k = 16$ ,  $n = 4$  mempunyai konstanta ajaib  $k = 21$ ,  $n = 6$  mempunyai konstanta ajaib  $k = 26$ , dan  $n = 8$  mempunyai konstanta ajaib  $k = 31$ .

- b. Konstanta ajaib untuk  $n$  ganjil

$$k = \frac{5(n-1)}{2} + 15$$

Graf ulat model “H” untuk  $n = 3$  mempunyai konstanta ajaib  $k = 21$ ,  $n = 5$  mempunyai konstanta ajaib  $k = 25$ ,  $n = 7$  mempunyai konstanta ajaib  $k = 30$ .

Dengan demikian graf ulat model “H” dengan  $n$  titik dapat dilabeli dan graf ulat model “H” adalah pelabelan super sisi ajaib.



## **5.2 Saran**

Tugas akhir ini membahas tentang pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat model “H”. kepada pembaca khususnya jurusan matematika yang tertarik melanjutkan tugas akhir ini, penulis sarankan membahas pelabelan super sisi pada graf ulat model lainnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Munir, Rinaldi, *Matematika Diskrit*, Informatika, Bandung, 2000.
- Abdussakir. *Super Edge-Magic Labeling pada Graf Ulat dengan Himpunan Derajat {1,4} dan n Titik Berderajat 4*, 2009
- Abdussakir. *Super Edge-Magic Labeling pada Beberapa Graf Ulat*, 2005
- Siang,J.J. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*, Yogyakarta,2002.
- Chartrand,G & Lesniak,L. *Graph and Diagraph 2<sup>nd</sup> Edition*, California,wardworth,Inc.1986.
- Kotzig, Anton. & Rossa, Alexander, *Magic Valuations. Canada, Math, Bull*,Voll.13(4),1970.
- Gallian,J.A. *A Dynamic Survey of Graph Labeling, Electronic Journal Combinatorics*.2007.
- Park,Yeon, Choi,Hyuk Jin. & Bae,Jae-Hyeong, *on Super Edge-Magic Labeling of Some Graph*, Bull.Korean Math,Soc.45(2008).
- Bondy.J.A, *Graph Theory*, Springer, 2007.
- Irawan. Andy, *Tugas Akhir. Super Edge Magic Labeling pada Graph Ulat Model "  $\rightarrow$  " dengan Panjang n Titik*, UIN Malang, Malang, 2007.