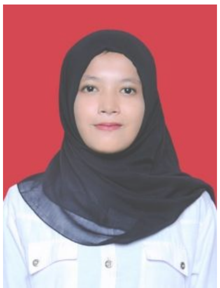
TRACE MATRIKS ANTISIMETRIS 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

RISDA MARPAUNG
11654200258



FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2023

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS ANTISIMETRIS 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

oleh:

RISDA MARPAUNG
11654200258

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 17 Juli 2023

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	**NIP. 19770913 200604 2 002**

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS ANTISIMETRIS 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

oleh:

RISDA MARPAUNG
11654200258

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 17 Juli 2023

Pekanbaru, 17 Juli 2023
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI:

Ketua	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si.**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota I	**: Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**
Anggota II	**: Ade Novia Rahma, M.Mat.**

Lampiran Surat :
Nomor : Nomor 25/2021
Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Risda Marpaung
NIM : 11654200258
Tempat/Tgl. Lahir : Sei Apung / 16 September 1997
Fakultas/Pascasarjana : Sains & Teknologi
Prodi : Matematika
Judul ~~Disertasi~~/~~Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~*:
Trace Matriks Antisimetris 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan ~~Disertasi~~/~~Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~* dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu ~~Disertasi~~/~~Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~* saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan ~~Disertasi~~/~~Thesis~~/Skripsi/(~~Karya Ilmiah lainnya~~)* saya tersebut, maka saya besedia menerima sanksi sesua peraturan perundang-undangan.

Demikianlah Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 24 Juli 2023
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
10000
SEPULUH RIBU RUPIAH
CBC47AKX552082173

Risda Marpaung
NIM : 11654200258

*pilih salah satu sasuai jenis karya tulis

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini tercatat dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penduplikatan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memdapat izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang telah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan1saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh pihak lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 17 Juli 2023
Yang membuat pernyataan,

RISDA MARPAUNG
11654200258

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

"Allah tidak mempersulit hambanya melainkan sesuai dengan kesanggupannya..."
(QS. Al-Baqarah: 286).

Alhamdulillahirabbil'alamiin. Segala puji bagi Allah SWT yang melimpahkan rahmat dan nikmat-Nya, atas karunia serta kemudaan yang diberikan-Nya sehingga diriku
dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam tak lupa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW serta keluarga
dan para sahabatnya, semoga kita mendapat syafa'atnya
di akhirat kelak.

Dengan ini kupersembahkan skripsi ini kepada:
(ALM Ayah)Junaihin Marpaung, (ALMH Ibu)Fauziah Panjaitan, (ALMH Nenek)Hindun, Atok, ayah, Ibuk, Paman, Kakak, Abang serta adek yang selalu memberikan dukungan, ridho dan cinta kasih sayang yang tiada tara yang tidak dapat ku balaskan hanya dengan secarik kertas yang tertuliskan kata pesembahan.

Kepada Ibu Fitri Aryani, M,Sc selaku dosen pembimbing saya.
Terima kasih atas kesabaran dan kesediaan ibu untuk membimbing dan mendidik saya dari awal hingga penyelesaian skripsi ini.

TRACE MATRIKS ANTISIMETRIS 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

RISDA MAPAUNG
11654200258

Tanggal Sidang : 17 Juli 2023
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Trace matriks adalah jumlah seluruh entri pada diagonal utama dari matriks antisimetis dan dilambangkan dengan $tr(A)$. Penelitian ini bertujuan untuk mencari bentuk umum dari $tr(A_3)^n$. Pada awal penelitian akan di lakukan perpangkatkan matriks antisimetis ordo 3×3dimulai dari $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{10}$, kemudian menduga bentuk umum matriks $(A_3)^n$ dan dibuktikan menggunakan induksi matematika. Selanjutnya akan ditentukan bentuk umum $tr(A_3)^n$ menggunakan definisi *trace* matriks, dan mengaplikasikan beberapa contoh soal.

Kata kunci: Induksi matemtika, matriks antisimetris, perpangkatan matriks, *trace* matriks.

TRACE MATRIKS ANTISIMETRIS 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

RISDA MARPAUNG
11654200258

Date of Final Exam : 17 July 2023
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

Trace matrix is the number of entries on the main diagonal of the antisymmetric matrix and is denoted by $tr(A)$. *In this study aims to find the general form of* $tr(A_3)^n$. *At the beginning of the study, the order antisymmetries matrix will be raised to the rank of order* 3×3 *starting from* $(A_3)^2$ *until* $(A_3)^{10}$, *then the general form of the matrix is assumed* $(A_3)^n$ *and proved using mathematical induction. Then the general form will be determined* $tr(A_3)^n$ *using the definition of a trace matrix, and apply some examples of questions.*

Keywords: *Mathematical induction, antisymmetric matrices, exponential matrices, trace matrices.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pujian syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis telah dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul "*Trace* Matriks Antisimetris 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif", yang merupakan salah satu persyaratan untuk menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Program Studi Matematika, *Fakultas* Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Shalawat nabi serta salam tak lupa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW beserta keluarga dan para sahabatnya, semoga kita mendapat syafa'atnya di akhirat kelak.

Dalam melaksanakan penyusunan tugas akhir ini, penulis sangat sadar akan adanya beberapa hambatan serta keterbatasan ilmu pengetahuan atau informasi yang dimiliki, namun dengan memperoleh arahan, masukan dan dukungan dari banyaknya pihak baik langsung maupun tidak langsung. Oleh karenanya penulis mengucnapkan terimakasih khususnya kepada kedua orang tua tercinta alm. Ayah Junaihin Marpaung, almh. Ibu Fauziah Panjaitan almh. Nenek Hindun, Atok Amiruddin Panjaitan, Ayah Syahizal Sitorus, Ibuk Hanim Panjaitan, Paman Hanan Panjaitan, Kakak Risna Marpaung, serta Adikku tersayang yang senantiasa selalu memberikan do'a, memberi kasih sayang, perhatian, dan materi yang tak terhingga. Selain itu, penulis juga mengucapkan ribuan terimakasih dengan hati tulus ikhlas tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan

Syarif Kasim Riau

5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, penjelasan serta petunjuk kepada penulis sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan.
6. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc dan Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat, selaku Penguji I dan Penguji II yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
7. Semua Dosen-dosem beserta staf-staf Program Studi Matematika Fakultas Sains Teknologi Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau.
8. Keluarga tercinta yang tak henti hentinya memberi motivasi, dukungan, semangat, do'a, materi serta kasih sayang yang sangat tulus kepada penulis.
9. Teman-teman Angkatan 2016 prodi Matematika Universitas Sultan Syarif Kasim Riau yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu namanya.
10. Mayang Nurul Ihda, Fitria Agustini, Masroh, Ari Pradina, S.H yang telah memberi motivasi dan semangat dalam tugas akhir.

Tugas Akhir ini sudah disusun semaksimal mungkin oleh penulis. Namun, tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan dalam menuliskan maupun dalam menyajikan materi. Oleh karena itu, kritik dan saran dari berbagai pihak mungkin masih sangat diharapkan oleh penulis demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 17 Juli 2023

Risda Marpaung

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matriks memiliki peran yang cukup penting dalam ilmu khususnya ilmu matematika. Biasanya matriks banyak ditemukan diberbagai perkara yang berkaitan dengan angka, contohnya dalam bidang aljabar, statistik, dan lain-lain. Matriks memiiki beberapa jenis diantaranya adalah matriks simetris [1], matiks segitiga [2], matiks bujursangkar, matiks antisimeris, dan lain sebagainya. Diperoleh beberapa opsi pada matiks yaitu sepeti penjumlahan, pengurangan, perkalian, determinan, serta invers [3] dan *trace* matiks [4] dan lain sebagainya.

Pembahasan tentang *trace* matriks berpangkat sudah banyak diteliti oleh beberapa peneliti seperti, pada penelitian [5] dengan bentuk matriks tridiagonal sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}, b \neq 0, c \neq 0, \forall a, b, c \in R.$$

Dalam penelitiannya mendapatkan bentuk umum dari $(A_3)^n$ dan $tr(A_3)^n$, dengan n untuk berpangkat ganjil dan genap sebagai berikut:

$$tr(A_3)^n = \begin{cases} 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r, n = bil.ganjil \\ 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r, n = bil, genap \end{cases}$$

Kemudian [6] meneliti mengenai *trace* matriks berpangkat juga, dimana dalam penelitiannya menggunakan bentuk matriks sebagai betikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall a, b, c \in R.$$

dan diperoleh bentuk umum *trace* matriks 3×3 berpangkat bilangan bulat dengan menerapkan definisi *trace* matriks sebagai berikut:

$tr(A_3)^n = (a+b+c)^n$ dengan $n \in Z^+$.

Selanjutnya [7] melaksanakan penelitian yaitu masih mengenai *trace* matriks berpangkat dimana pada penelitiannya menggunakan matriks $FLDcirc_r$ dengan bentuk matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, n \geq 2.$$

dengan hasil akhir penelitiannya, diperoleh:

a) $tr(A_8)^2 = \underbrace{0+0+0+0+\cdots+0+0+0+0}_{n\ faktor}$

$= 0$

b) $tr(A_8)^3 = \underbrace{0+0+0+0+\cdots+0+0+0+0}_{n\ faktor}$

$= 0$

c) $tr(A_8)^4 = \underbrace{0+0+0+0+\cdots+0+0+0+0}_{n\ faktor}$

$= 0$

Kemudian penelitian selanjutnya [8],peneitian ini akan ditentukan bentuk umum dari Matriks $FLDcirc_r$ yang mana akan dibuktikan menggunakan induksi matematika dengan bentuk matriks sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n \geq 2 \text{ dengan } x, r \in R.$$

Sehingga didapatkan bentuk $tr(A_n)^{-2}, tr(A_n)^{-3}$, dan $tr(A_n)^{-4}$ yang dibuktikan dengan pembuktikan langsung sebagai berikut:

a) $tr(A_n)^{-2} = x^{-2}$
b) $tr(A_n)^{-3} = x^{-3}$
c) $tr(A_n)^{-4} = x^{-4}$

Kemudian [9] melaksanakan penelitian masih mengenai *trace* matriks berpangkat dengan bentuk matriks sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \forall a, b, c \in R.$$

Pada penelitiannya didapatkan bentuk umum dari *trace* matriks untuk pangkat ganjil dan genap sebagai berikut:

$$tr(A^n) = \begin{cases} a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i, n = bil, ganjil, n > 0, n \in Z. \\ a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i, n = bil, genap, n \geq 0, n \in Z. \end{cases}$$

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, penulis tertarik melakukan penelitian yang berjudul "*Trace* Matriks Antisimetris 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, dengan bentuk matriks sebagai berikut".

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1)}$$

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diterangkan sebelumnya oleh penulis, maka rumusan masalah dalam tugas akhir ini ialah "Bagaimana bentuk umum *trace* matriks antisimetris 3×3 pada Persamaan (1.1) berpangkat bilangan bulat positif?".

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah sebelumnya, batasan masalah pada penelitian ini yaitu menggunakan bentuk matriks antisimetris 3×3 pada Persamaan (1.1).

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh bentuk umum *trace* matriks antisimertis 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

1.5 Manfaat Penelitian

Beberapa manfaat dari penelitian yaitu:

1. Menambah wawasan dan ilmu bagi penulis tentang matriks dan *Trace* matriks.
2. Dapat dijadikan sebagai refrensi dari pihak yang membutuhkan.

1.6 Sistematika Penelitian

Adapun sistematika pada saat penulisan tugas akhir ini yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini berisi mnegenai penjelasan latar belakang , rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini berisi mengenai teori-teori dan materi yang berkaitan tentang matriks, matriks antisimetris, perpangkatan matriks, induksi matematika, dan *trace* yang berisikan definisi, teorema, beserta contoh.

BAB III METODELOGI PENELITIAN

Pada bab ini berisi mengenai penjelasan dalam menentukan bentuk umum dari *trac* matriks antisimetris 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai teori-teori yang berkaitan mengenai penelitian yang akan dibahas. Berikut diantaranya:

2.1 Matriks Antisimetris

Definisi 2.1 [10] Matriks antisimetris adalah matriks yang jika ditranposenya adalah akan menjadi negative matriksnya. Dengan perkataan lain bila $A^T = -A$ atau $a_{ij} = -a_{ji}$ untuk semua i dan j. mudah dipahami bahwa semua elemen diagonal utama matriks antisimetris adalah = 0

Contoh 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 0 & 5 \\ -6 & 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & -6 \\ -4 & 0 & -5 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & -5 \\ 6 & -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 Perkalian Matriks

Definisi 2.2 [11] Jika A merupakan matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $m \times n$, maka hasil kali AB merupakan matriks $m \times n$ yang elemen-elemennya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari elemen pada baris i dan kolom $j$dari AB, pisahkanlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan elemen – elemen yang bersesuaian dari baris dan kolomter sebut dan kemudian jumlahkan hasil kali yang diperoleh.

Contoh 2.2 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, maka hitunglah nilai AB!

Penyelesaian:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat hasil kali $AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

2.3 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.3 [11] Jika A merupakan matriks bujursangkar maka pengertian pangkat bilangan bulat nonnegatif dari matriks adalah:

$$A^0 = 1, A^n = \underbrace{AA \ldots A}_{n\,faktor}, (n > 0)$$

Kemudian, Jika A dapat dibalik, Maka pengertian pangkat bilangan negative adalah:

$$A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n\,faktor}, (n < 0).$$

Contoh 2.3 Jika diberikan $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ sehingga untuk

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 900 & 900 & 900 \\ 1125 & 1125 & 1125 \\ 1350 & 1350 & 1350 \end{bmatrix}$$

2.4 Trace Matriks

Definisi 2.4 [11] Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar , maka *Trace* A dinotasikan $tr(A)$, Didefenisikan sebagai jumlah seluruh elemen pada diagonal utama A. Jika A bukan merupakan matriks persegi $(n \times n)$ maka $tr(A)$ tidak dapat didefinisikan.

Teorema 2.1 [12] Misalkan $A = (A_{ij})$ sebuah matriks persegi berukuran $n \times n$, maka *trace* dari A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen – elemen diagonal A dan dapt dinyatakan dengan $tr(A)$,yaitu$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$. Beberapa sifat dari *trace* matriks diantarany adalah sebagai berikut:

1. $tr(kA) = k(tr(A)$
2. $tr(A + B) = tr(B + A)$
3. $tr(A^T) = tr(A)$

Dengan k adalah sebarang skalar, sedangkan A dan B adalah matriks berukuran $n \times n$.

Bukti:

1. Akan dibuktikan bahwa untuk $Tr(kA) = k\, Tr(A)$.

   Maka akan diambil sebarang matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ dan k merupakan skalar.

$$tr(kA) = tr\left(k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

$$= ka_{11} + ka_{22} + \ldots + ka_{nn}$$

$$= k(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$$

$$= k\, tr(A)$$

2. Akan dibuktikan bahwa untuk $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

Kemudian akan diambil sebarang matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$.

Maka

$$tr(A+B) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + \ldots + (a_{nn}+b_{nn})$$

$$= (a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}) + (b_{11}+b_{22}+\ldots+b_{nn})$$

$$= tr(A) + tr(B)$$

3. Akan dibuktikan bahwa untuk $tr(A^T) = tr(A)$

Diambil sebarang matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ maka

$$tr(A^T) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^T\right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

$$= tr(A).$$

Contoh 2.4 Diberikan dua buah matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka hitunglah:

1. $tr(A)$.
2. $tr(3A)$.
3. $tr(A + B)$.

Penyelesaian:

1. $tr(A) = a + d$
2. $tr(3A) = 3(a + d) = 3a + 3d$
3. $tr(A + B) = tr\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$
   $= tr\left(\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}\right)$
   $= 2a + 2d.$

2.5 Trace Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Positif.

Penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif telah banyak dibahas [5] Berikut merupakan langkah dalam mendapatkan bentruk umum *trace* matriks Toeplitz bentuk khusus tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

1. Diberikan matrikks $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}, b \neq 0, c \neq 0, \forall a, b, c \in R.$
2. Menentukan pangkat $(A_3)^2$ hingga $(A_3)^{10}$ yang terdapat pada halaman 40, kemudian diduga bentuk umum dari $(A_3)^n$ yang dinyatakan pada teorema berikut:

Teorema 2.2 Jika diberikan sebuah matriks $A_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}, b \neq 0, c \neq 0, \forall a, b, c \in R.$ Maka untuk

$$(A_3)^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r & na^{n-1}b + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^{r+1} c^r & \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r+1} c^{r-1} \\ na^{n-1}c + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^r c^{r+1} & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^r a^{n-2r} b^r c^r & na^{n-1}b + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^{r+1} c^r \\ \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r-1} c^{r+1} & na^{n-1}c + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^r c^{r+1} & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r \end{bmatrix}, Ganjil \\ \begin{bmatrix} a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r & \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r-1} 2^{r-1} a^{n-2r+1} b^r c^{r-1} & \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r+1} c^{r-1} \\ \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r-1} 2^{r-1} a^{n-2r+1} b^{r-1} c^r & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^r a^{n-2r} b^r c^r & \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r-1} 2^{r-1} a^{n-2r+1} b^r c^{r-1} \\ \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r-1} c^{r+1} & \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r-1} 2^{r-1} a^{n-2r+1} b^{r-1} c^r & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r \end{bmatrix}, Genap \end{cases}$$

Bukti: Teorema 2.2 dibuktikan menggunakan induksi matematika dan telah dibuktikan pada jurnal halaman 44.

3. Menentuksn bentuk umum $tr(A_3)^n$, kemudia diduga bentuk umum dari $tr(A_3)^n$ yang kemudian dinyatakan dalam bentuk teorema berikut.

Teorema 2.3 Jika diberikan sebuah matriks $A_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}, b \neq 0, c \neq 0, \forall a, b, c \in R.$ Maka untuk

$$tr(A_3)^n = \begin{cases} 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r, n = bil.ganjil \\ 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r, n = bil, genap \end{cases}$$

Bukti: Teorema 2.3 dibuktikan menggunakan pembuktian langsung dan telah dibuktikan pada jurnal halaman 47.

2.6 Induksi Matematika

Definisi 2.5[13] Induksi matematika adalah sebuah teknik pembuktian yang ba ku didalam ilmu matematika. Melalui induksi dapat mengurangi langkah dalm membuktian setiap bilangan integer termasuk ke dalam sebuah himpunan kebenaran dengan beberapa langkah terbatas. Induksi matematika digunakan untuk membuktikan suatu pernyataan benar atau salah.

Prinsip induksi matematika sederhana sebagai berikut:

Misalkan $p(n)$ merupakan proposisi perihal bilangan integer positif dimana kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan proposisi tersebut, kita dapat menunjukkan bahwa:

1) $P(1)$ benar.
2) Jika $P(n)$ benar, maka akan dibuiktikan $P(n+1)$ juga benar untuk setiap bilangan $n \geq 1$ dimana n adalah bilangan bulat positif n.

Contoh 2.5:

Buktikan bahwa $1 + 4 + 10 + \cdots + n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$.

Penyelesaian:

1) Misalkan $P(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$

   Akan dibuktikan terlebih dahulu untuk $n = 1$, $\frac{n(n+1)(n+2)}{3!} = 1$

   $P(1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{6} = \frac{6}{6} = 1.$

   Maka terbukti bahwa $P(1)$ bernilai benar.

2) Asumsikan untuk $P(n)$ Benar. Maka buktikan untuk $P(n + 1)$ juga bernilai benar.

   Bukti:

$$1 + 4 + 10 + \cdots + n + \frac{n(n+1)}{2!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}$$

$$[1 + 4 + 10 + \cdots + k] + \frac{n(n+1)}{2!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + \frac{(n+1)(n+2)}{2!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}$$

Sehingga untuk $P(k+1)$ juga bernilai benar.

BAB III
METODE PENELITIAN

Metode penelitian ialah suatu proses yang dilakukan oleh penulis dalam pengejaan tugas akhir ini. Dalam proses ini penulis memperoleh beberapa refrensi. Langkah-langkah yang dilakukan oleh penulis yaitu untuk menentukan bentuk umum dari *trace* matriks antisimetris 3×3 berpangkat bilangan bulat positif sebagai berikut:

1. Diberikan matriks antisimetris $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \forall a \neq 0$.
2. Melakukan perpangkatan dari $(A_3)^2$ hingga $(A_3)^{10}$.
3. Menduga bentuk umum matriks antisimetris $(A_3)^n$ dengan n merupakan bilangan bulat positif.
4. Melakukan pembuktian bentuk umum $(A_3)^n$ dengan menggunakan induksi matematika.
5. Menentukan bentuk umum $tr(A_3)^n$ menggunakan definisi *trace* matriks.
6. Mengaplikasikan $tr(A_3)^n$ dalam beberapa bentuk contoh soal.

BAB V
KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Dapat diperhatikan hasil peneitian di atas dapat disimpulkan bahwa bentuk umum matriks antisimmetris bentuk khusus ordo 3×3 berpangkan bilangan bulat positif sebagai berikut:

$$(A_3)^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -(-2)^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 \\ (-2)^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 & -(-2)^{\frac{n-1}{2}} a^n \\ 0 & (-2)^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 \end{bmatrix} & untuk \quad n = bilangan \quad bulat \quad ganjil \\ \begin{bmatrix} -(-2)^{\frac{n-2}{2}} a^n & 0 & (-2)^{\frac{n-2}{2}} a^n \\ 0 & (-2)^{\frac{n}{2}} a^n & 0 \\ (-2)^{\frac{n-2}{2}} a^n & 0 & -(-2)^{\frac{n-2}{2}} a^n \end{bmatrix} & untuk \quad n = bilangan \quad bulat \quad genap \end{cases}$$

Kemudian bentuk umum dari *trace* matriks antisimetris bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

$$tr(A_3)^n = \begin{cases} 0 & untuk \quad n = bilangan \quad bulat \quad ganjil \\ -(-2)^{\frac{n+2}{2}} a^n & untuk \quad n = bilangan \quad bulat \quad genap \end{cases}$$

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini dapat dikembangkan untuk menentukan bentuk umum *trace* matriks antisimetris bentuk khusus ordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif.

DAFTAR PUSTAKA

[1] F. Aryani, F. Bayu Cenia, Y. Muda, and Zukrianto, "Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus Orde 3 Berpangkat Bilangan Bulat," *Semin. Nas. Teknol. Komun. dan Ind. 13*, no. November, pp. 300–310, 2021, [Online]. Available: http://ejournal.uin-suska.ac.id/index.php/SNTIKI/article/view/14363%0Ahttp://ejournal.uin-suska.ac.id/index.php/SNTIKI/article/download/14363/7253

[2] F. Aryani, M. Zawarnii, K. Susilowati, Y. Muda, C. C. Marzuki, and Rahmawati, "Trace Matriks Segitiga 4x4 Berpangkat Bilangan Bulat," *Semin. Nas. Teknol. Komun. dan Ind. 12*, pp. 651–661, 2020.

[3] A. Azizah, T. Thresye, and N. Huda, "Invers Dari Matriks Sirkulan Simetris Atas Skew Field," *J. Mat. Murni Dan Terap. Epsil.*, vol. 12, no. 1, p. 31, 2018, doi: 10.20527/epsilon.v12i1.203.

[4] F. Aryani and M. Solihin, "Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 3, no. 2, pp. 16–23, 2017, [Online]. Available:http://ejournal.uin-suska.ac.id/index.php/JSMS/article/download/4473/2759

[5] F. Aryani and N. Husna, "Trace Matriks Toeplitz Tridiagonal 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *J. Ilmu Mat. dan Terap.*, vol. 5, no. 1, pp. 41–49, 2019, doi: 10.30598/barekengvol15iss3pp441-452.

[6] F. Aryani and R. Taslim, "Trace Matriks 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 7, no. 1, p. 1, 2021, doi: 10.24014/jsms.v7i1.12434.

[7] D. Pratiwi, "Trace Martiks FLDcirc Berbentuk Bilangan Bulat Positif," 2022.

[8] D. Andriani, "Trace Matriks FLDcircr, Berbentuk Khusus Berpangkat Negatif Dua, Tiga, Dan Empat," 2021.

[9] I. R. Olii, R. Resmawan, and L. Yahya, "Trace Matriks Toeplitz 2-Tridiagonal 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *BAREKENG J. Ilmu*

Mat. dan Terap., vol. 15, no. 3, pp. 441–452, 2021, doi: 10.30598/barekengvol15iss3pp441-452.

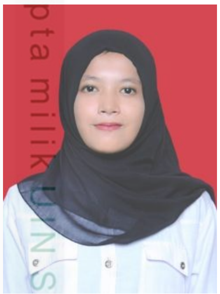
[10] I. G. P. Tenaya, “Aljabar Linear,” 2016.

[11] Anton and Rorres, *Elementary Linear Algebra*. America College of Radiology Network, 2004.

[12] Gentle, *Matrix Algebra*. New York: Springer, 2007.

[13] R. Munir, *Matematika Diskrit Edisi 3*, Revisi ke. Bandung: Informatika Bandung, 2010.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan pada tanggal 16 September 1997 di Sei.Apung Tanjungbalai Sumatera Utara. Sebagai anak kedua dari dua bersaudara dari pasangan Ayah Junaihin Marpung dan Ibu Fauziah Panjaitan. Penulis menyelesaikan pendidikan formal di SDN010006 Desa Sei.Apung Tanjungbalai Sumatera Utara pada tahun 2010, pada tahun 2013 penulis menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di MTS Sei.Apung Tanjungbalai Sumatra Utara dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas di MAN Tanjungbalai Sumata Utara pada tahun 2016 dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA). Pada tahun 2016 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau pada Fakultas Sains dan Teknologi dengan Program Studi Matematika.

Pada tahun 2019, penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata di Desa Pelangko, Kecamatan Kelayang, Kabupaten Indragiri Hulu, Povinsi Riau. Selanjutnya pada tahun 2020, tepatnya semester VIII penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di RSJ (Rumah Sakit Jiwa Tampan), Kota Pekanbaru dengan judul "Analisis Deskriptif Jumlah Pasien Rawat Jalan dan Pasien Kunjungan IGD pada tahun 2019" yang dibimbing oleh Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si dari tanggal 6 Januari sampai 6 Februari 2020 dan diseminarkan pada Selasa, 29 Juni 2021. Penulis dinyatakan lulus pada Bulan Juli 2023 dalam ujian sarjana dengan judul tugas akhir "Trace Matriks Antisimetis 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif" dibawah bimbingan IBU Fitri Ayani, M.Sc.