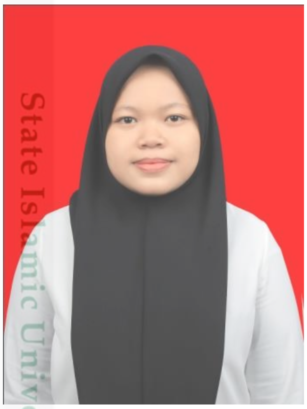
TRACE MATRIKS HANKEL BENTUK KHUSUS BERORDO GANJIL BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

DYAN ELVITA SARI
11850422351



FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2023

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS HANKEL BENTUK KHUSUS BERORDO GANJIL BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

oleh:

DYAN ELVITA SARI
11850422351

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 7 Juli 2023

Pekanbaru, 7 Juli 2023
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua : **Wartono, M.Sc**

Sekretaris : **Rahmawati, M.Sc**

Anggota I : **Fitri Aryani, M.Sc**

Anggota II : **Ade Novia Rahma, M.Mat**

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS HANKEL BENTUK KHUSUS BERORDO GANJIL BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

oleh:

DYAN ELVITA SARI
11850422351

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 7 Juli 2023

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Rahmawati, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIK. 130 517 046

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan dibawah ini:

Nama	: Dyan Elvita Sari
NIM	: 11850422351
Tempat/Tgl. Lahir	: P.Brandan/6 Mei 2000
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Tugas Akhir	: *Trace* Matriks Hankel Bentuk Khusus Berordo Ganjil Berpangkat Bilangan Positif

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa:

1. Penulisan Skripsi ini dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu Skripsi saya ini, saya menyatakan bebas plagiat.
4. Apabila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan Skripsi saya tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan perundang-undangan.

Demikianlah Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 7 Juli 2023
Yang membuat pernyataan

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 5C7AKX552660185

Dyan Elvita Sari
NIM. 11850422351

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 7 Juli 2023
Yang membuat pernyataan,

DYAN ELVITA SARI
11850422351

LEMBAR PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim

Alhamdulillahirabbil 'alamin, bersyukur kepada Allah SWT yang telah memberikan kemudahan dan kelancaran kepada saya dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Tugas Akhir ini merupakan persembahan istimewa untuk orang yang saya cintai.

Untuk kedua orang tua saya.

Terimakasih untuk ayahanda (Hartono) dan ibunda (Nuryanti) yang selalu mendoakan saya. Terimakasih atas restu, kasih sayang dan pengorbanan yang telah diberikan sampai saat ini. Terimakasih telah menjadi sosok panutan dalam membimbing anak-anaknya yang *insyaallah* akan sukses dunia dan akhirat.

Untuk abang, kakak dan adik-adik saya.

Terimakasih untuk abang (Rozali), kakak (Dyan Hartika), adik (Dyan Novia Uzna, Dyan Novia Azni), keponakan (Ashima Meicha Dinillah) yang selalu mendoakan saya. Terimakasih karena selalu memberikan semangat pantang menyerah untuk saya selama masa perkuliahan ini.

" Sungguh atas kehendak Allah semua ini terwujud, tiada kekuatan kecuali dengan pertolongan Allah " (Q.S. Al Kahfi : 39)

TRACE MATRIKS HANKEL BENTUK KHUSUS BERORDO GANJIL BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

DYAN ELVITA SARI
11850422351

Tanggal Sidang : 7 Juli 2023
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Matriks Hankel ke-n merupakan matriks berordo $(n+1)\times(n+1)$ yang entri-entrinya $a_{i,j} = a_{i+j}$. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum *trace* Matriks Hankel bentuk khusus berordo ganjil yang dinotasikan $tr(A_{n+1})^m$ dengan m bilangan bulat positif. Untuk mendapatkan bentuk umum *trace* tersebut, terlebih dahulu melakukan perpangkatan matriks $(A_{n+1})^2$ sampai $(A_{n+1})^8$ berordo ganjil dengan $n = 2,4,6,8$. Setelah itu dapat diduga bentuk umum $(A_{n+1})^m$ dan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika. Selanjutnya diperoleh bentuk umum $tr(A_{n+1})^m$ menggunakan definisi *trace* matriks. Lebih lanjut diberikan contoh pengaplikasian dari $(A_{n+1})^m$ dan $tr(A_{n+1})^m$ pada beberapa contoh soal.

Kata Kunci : definisi *trace* matriks, induksi matematika, Matriks Hankel, *trace* matriks.

TRACE THE SPECIAL FORM HANKEL MATRIX OF ODD ORDER OF POSITIVE INTEGER POWER

DYAN ELVITA SARI
11850422351

Date of Final Exam : July 7th, 2023
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 PekanbaruIndonesia

ABSTRACT

The n-th Hankel Matrix is a matrix of order $(n+1)\times(n+1)$ that entries $a_{i,j}=a_{i+j}$. The aim of this study is to obtain the general form of trace the special form Hankel Matrix of the odd order denoted by $tr(A_{n+1})^m$ of m the positive integer.To get the general form of trace, first do matrix exponential $(A_{n+1})^2$ until $(A_{n+1})^8$ the odd order for $n=2,4,6,8$.. After that it can be assumed the general form $(A_{n+})^m$ and proved by mathematical induction. Then the general form $tr(A_{n+1})^m$ is obtained using the definition of the trace matrix. Furthermore, an application example of $(A_{n+1})^m$ and $tr(A_{n+1})^m$ are given.

***Keywords** : definition of trace matrix, mathematical induction, Hankel Matrix, trace matrix.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamduillahirobbil 'alamin. Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT karena atas rahmat, karunia, nikmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"*Trace* Matriks Hankel Bentuk Khusus Berordo Ganjil Berpangkat Bilangan Bulat Positif"**. Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw, semoga kita semua mendapakan syafaat-nya. Penulisan Tugas Akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Dalam penulisan tugas akhir ini penulis banyak sekali mendapatkan bimbingan, arah dan masukan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Ibu Rahmawati, M.Sc selaku Pembimbing Akademik dan Pembimbing Tugas Akhir yang senantiasa meluangkan waktu, pikiran dan juga tenaga untuk membimbing, memberikan nasehat, memotivasi dan saran dari permasalahan yang dihadapi selama perkuliahan. Serta memberikan bimbingan dan semangat kepada penulis untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.

6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc., selaku penguji I dan Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat selaku penguji II yang telah memberikan motivasi, kritik dan saran dalam perbaikan dan penulisan Tugas Akhir ini.
7. Bapak Zukrianto, M.Si selaku Koordinator Tugas Akhir yang telah banyak membantu dalam memperlancar jalannya penyelesaian Tugas Akhir ini.
8. Seluruh dosen program studi Matematika UIN Suska Riau yang telah memberikan banyak ilmu pengetahuan, wawasan, dan pola pikir yang bermanfaat bagi penulis.
9. Kedua orang tua penulis Bapak Hartono dan Ibu Nuryanti, kakak, abang dan adik penulis Dyan Hartika, Rozali, Dyan Novia Uzna, Dyan Novia Azni dan Ashima Meicha Dinillah yang selalu mencurahkan do'a, semangat, kasih sayang dan harapan serta dukungan kepada penulis.
10. Sahabat *kost* Nia Irmala Yuli, Alaychiyah Yulia Rachman, Syurani Syuraya yang selalu menemani dan memberikan semangat kepada penulis dalam penulisan Tugas Akhir ini.
11. Teman-teman seperjuangan kelas C angkatan 2018 yang telah memberikan motivasi.
12. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal penyusunan Tugas Akhir hingga selesai yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tugas Akhir ini masih terdapat kesalahan dan juga kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan juga saran dari semua pihak demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua. *Aamiin ya Robbal 'alamiin.*

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Pekanbaru, 7 Juli 2023

DYAN ELVITA SARI
1185042351

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penerapan matriks sangat luas digunakan dalam bidang matematika. Matriks memiliki peran yang penting seperti pada persamaan linier, analisis vektor dan lain sebagainya. Dalam persamaan linier, matriks digunakan untuk merepresentasikan koefisien variabel-variabel dalam sistem persamaan linier. Begitu juga dalam analisis vektor, matriks digunakan untuk merepresentasikan dan memanipulasi vektor dalam ruang. Terdapat beberapa jenis matriks yang umum digunakan diantaranya matriks diagonal, matriks identitas, matriks skalar dan matriks simetris dan lain-lain [1]. Jenis-jenis matriks terus bertambah seiring dengan perkembangan aljabar seperti ditemukannya Matriks Hankel. Adapun bentuk umum dari Matriks Hankel tersebut sebagai berikut :

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}_{n+1} \tag{1.1}$$

Peneliti terdahulu telah banyak melakukan penelitian tentang Matriks Hankel meliputi determinan, invers dan juga *trace* Matriks Hankel. Diantaranya [2] melakukan penelitian mengenai determinan Matriks Hankel dari eksponensial polinomial dengan bentuk $e_n(x) = \sum_x x^{|x|}$ menghasilkan bentuk determinan $det\left(e_{i=j}(x)\right)_{0\leq i,j\leq n} = x^{(n+1)n/2} \cdot \prod_{i=0}^{n} i!$. Selanjutnya pada tahun 2021, [3] melakukan penelitian berjudul determinan Matriks Hankel bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dengan bentuk matriksnya yaitu :

$A_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dengan $a \in \mathbb{R}$ menghasilkan bentuk umum determinan matriks: $|A^n| = (-1)^n a^{3n}, n \geq 1$.

Kemudian peneliti [4] melanjutkan penelitiannya mengenai invers Matriks Hankel bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Adapun bentuk khusus matriks yang digunakan sama dengan penelitian sebelumnya sehingga didapat bentuk umum invers matriks berikut ini :

$$({A_3}^n)^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^n \left(\frac{\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \right)}{a^n} \right) & 0 & (-1)^{n+1} \left(\frac{\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \right)}{a^n} \right) \\ 0 & \frac{1}{a^n} & 0 \\ (-1)^{n+1} \left(\frac{\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \right)}{a^n} \right) & 0 & (-1)^n \left(\frac{\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right)}{a^n} \right) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya [5] melakukan penelitian yang merumuskan bentuk umum invers Matriks Hankel $n \times n$ untuk setiap $n \in N$ berbentuk khusus $H_{ij} = \frac{1}{(i+j-1)!}$ dengan $i, j \in \{1, \dots, n\}$ yang menghasilkan rumus eksplisit untuk invers Matriks Hankel berikut :

$$M_{ij} = (-1)^{n+i+j+1}(i-1)!\,j! \binom{n-1}{i-1} \binom{n+j-1}{j} \sum_{k=0}^{i=1} \binom{n-i+k}{j-1} \binom{n+k-1}{k}$$

untuk setiap $n \in N$.

Tahun 2022, terdapat penelitian berjudul invers Matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1) \times (n+1)$ menggunakan metode adjoin [6]. Bentuk khusus yang digunakan yaitu :$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dengan $a \in \mathbb{R}$. Hasil yang didapat bentuk umum invers Matriks Hankel ordo $(n+1) \times (n+1)$ berikut:

$$(A_{n+1})^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Kemudian [7] melakukan penelitian mengenai invers Matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1)\times(n+1)$, $n \geq 3$ dengan matriks blok 2×2. Matriks bentuk khusus yang digunakan berupa

$$H_{n+1} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{dengan } a, b \in \mathbb{R} \text{ untuk } a, b \neq 0$$

Adapun hasil yang didapat yakni :

$$(H_{n+1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{b} & -\frac{a}{b^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{b} & -\frac{a}{b^2} & \frac{a^2}{b^3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & \cdots & \frac{(-a)^{n-4}}{b^{n-3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & -\frac{a}{b^2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & -\frac{a}{b^2} & \frac{a^2}{b^3} & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Terdapat beberapa penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat pada tahun 2022. Diantaranya [8] membahas *trace* Matriks Hankel pangkat tiga dengan bentuk umum pada Persamaan (1.1) menghasilkan bentuk umum $tr({A_n}^3)$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} tr({A_n}^3) = &\sum_{r=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_{21}{a_{r+l}}^2 \\ &+ 2\left(\sum_{r=0}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_l a_r a_{r+l} + \sum_{r=0}^{n}\sum_{l=2}^{n} a_{l+} a_{r+1} a_{r+l} + \sum_{r=0}^{n}\sum_{l=3}^{n} a_{l+2} a_{r+2} a_{r+l}\right. \\ &+ \cdots \\ &+ \sum_{r=0}^{n}\sum_{l=n-2}^{n} a_{l+(n-3)} a_{r+(n-3)} a_{r+l} + \sum_{r=0}^{n}\sum_{l=n-1}^{n} a_{l+(n-2)} a_{r+(n-2)} a_{r+l} \\ &\left. + \sum_{r=0}^{n}\sum_{l=n}^{n} a_{l+(n-1)} a_{r+(n-1)} a_{r+l}\right) \end{aligned}$$

Selanjutnya [9] membahas *trace* matriks berpangkat dengan Matriks Hankel bentuk khusus :

$$A_n = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n+1} \quad \text{dengan } a \in \mathbb{R} \text{ dan } n \geq 3$$

berpangkat bilangan bulat positif menghasilkan bentuk umum *trace* Matriks Hankel sebagai berikut :

$$tr(A_n)^m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m(\sqrt{5}) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m(-\sqrt{5})\right)a^m, & \text{untuk } n \text{ ganjil, } m \text{ ganjil} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m(\sqrt{5}) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m(-\sqrt{5})\right)a^m + a^m, & \text{untuk } n \text{ genap, } m \text{ ganjil} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m(\sqrt{5}) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m(-\sqrt{5})\right)a^m + (n-1)a^m, & \text{untuk } n \text{ ganjil, } m \text{ genap, untuk } n \text{ genap, } m \text{ genap} \end{cases}$$

Kemudian peneliti [10] membahas *trace* Matriks Hankel bentuk khusus yang sama dengan penelitian sebelumnya berpangkat bilangan bulat negatif. Hasil yang diperoleh yaitu :

$$tr(A_n)^{-m} = \begin{cases} (-1)^m\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m}{a^m}\right) + \frac{1}{a^m}, & \text{untuk } n \text{ genap, } m \text{ ganjil} \\ (-1)^m\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m}{a^m}\right), & \text{untuk } n \text{ ganjil, } m \text{ ganjil} \\ (-1)^m\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m}{a^m}\right) + \frac{(n-1)}{a^m}, & \text{untuk } n \text{ ganjil, } m \text{ genap, untuk } n \text{ genap, } m \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (1.1) dan mengganti $a_{ij} = a_{i+j} = a$ untuk $i + j$ genap maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian yang berjudul **"*Trace* Matriks Hankel Bentuk Khusus Berordo Ganjil Berpangkat Bilangan Bulat Positif"** dengan bentuk khusus berikut :

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \qquad (1.2)$$

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu "Bagaimana bentuk umum *trace* Matriks Hankel bentuk khusus berordo ganjil berpangkat bilangan bulat positif pada Persamaan (1.2) ?".

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini yaitu pada Matriks Hankel bentuk khusus pada Persamaan (1.2) berordo ganjil $(n + 1)$, $(n + 1) \geq 3$ dengan n bilangan genap.

1.4 Tujuan Masalah

Tujuan penelitian ini yaitu memperoleh bentuk umum *trace* Matriks Hankel bentuk khusus berordo ganjil berpangkat bilangan bulat positif pada Persamaan (1.2).

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Memperluas dan mengembangkan ilmu matematika khususnya kajian matriks.
2. Mengetahui dan memperluas pengetahuan lebih banyak tentang mendapatkan nilai *trace* dari Matriks Hankel.
3. Sebagai saran informasi untuk para pembaca dan bahan referensi untuk pihak yang memerlukan.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dari penelitiaan ini terdiri dari tiga bab, yaitu :

BAB I PENDAHULUAN

Bab pertama memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab kedua memuat kajian-kajian pendukung yang digunakan dalam penelitian seperti Matriks Hankel, perkalian dan perpangkatan matriks, induksi matematika, dan *trace* matriks berpangkat.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ketiga memuat metode yang digunakan dalam menentukan bentuk umum *trace* Matriks Hankel.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab keempat memuat pembahasan untuk mendapatkan bentuk umum *trace* Matriks Hankel bentuk khusus berordo ganjil berpangkat bilangan bulat positif.

BAB V PENUTUP

Bab kelima memuat kesimpulan dari penelitian yang dilakukan dan saran bagi para pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas teori-teori pendukung yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini.

2.1 Matriks Hankel

Definisi 2.1 [11] Matriks Hankel ke-n, $n \geq 0$ adalah matriks $(n+1) \times (n+1)$ yang entri (i,j) adalah a_{i+j} dengan $i = 0,1,2,\dots,n$ dan $j = 0,1,2,\dots,n$.

Matriks Hankel merupakan matriks bujursangkar dimana setiap diagonal miring naik dari kiri ke kanan adalah konstan. Adapun bentuk umum Matriks Hankel sebagai berikut :

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}_{n+1}$$

Contoh 2.1 Diberikan contoh berikut :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix}_{2+1}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}_{3+1}$$

Berdasarkan Definisi 2.2 dapat dikatakan matriks A merupakan Matriks Hankel.

2.2 Perkalian Matriks dan Perpangkatan Matriks

Definisi 2.2 [12] Jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan c. Matriks cA disebut sebagai kelipatan/perkalian skalar dari A. Dalam notasi matriks jika $A = [a_{ij}]$, maka $(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$.

Contoh 2.2 Jika diberi matriks A, B dan C berikut ini :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix}, (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -8 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \tfrac{1}{2}C = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3 [12] Apabila A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkanlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut lalu tambahkan hasilnya.

Contoh 2.3 Jika diberi matriks A dan B berikut ini :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

maka

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 11 & 31 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4 [12] Apabila A merupakan matriks bujursangkar, sehingga definisi dari pangkat integer taknegatif dari A adalah

$$A^0 = I, A^m = \underbrace{A\,A \dots A}_{m\ faktor}\ (m > 0)$$

Lalu apabila A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat integer negatif dari A adalah

$$A^{-m} = (A^{-1})^m = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{m\ faktor}$$

Contoh 2.4 Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ tentukanlah nilai B^3!

Diketahui bahwa $B^3 = B \cdot B \cdot B$

sehingga

$$B^3 = B \cdot B \cdot B$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 359 & 454 & 456 \\ 380 & 488 & 473 \\ 202 & 217 & 194 \end{bmatrix}$$

2.3 Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan salah satu metode matematika yang digunakan untuk membuktikan bahwa sebuah pernyataan matematika benar untuk semua bilangan bulat positif.

Definisi 2.5 [13] Misalkan $p(n)$ merupakan suatu pernyataan bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ tersebut benar untuk semua bilangan bulat positif n. Adapun langkah yang digunakan untuk membuktikan pernyataan ini yaitu :

1. Ditunjukkan bahwa $p(1)$ benar.
2. Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan ditunjukkan $p(k+1)$ benar.

Apabila langkah-langkah 1 dan 2 berhasil ditunjukkan kebenarannya maka dapat disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilngan bulat n. Langkah 1 di atas dikatakan basis (dasar) induksi, dan langkah 2 dikatakan langkah induksi.

Contoh 2.5 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa $A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$ untuk n genap dengan induksi matematika

Penyelesaian :

Misalkan $p(n) : A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$

1. Basis induksi

   Akan ditunjukkan untuk $n = 2$, $p(2)$ benar, yaitu :

$$p(2) : A^2 = \begin{bmatrix} a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{2}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{2}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$$

sehingga $p(2)$ benar.

2. Langkah induksi

Akan diasumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar

$$p(k) : A^k = \begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix}$$

Lalu akan ditunjukkan $n = k + 2$, $p(k + 2)$ juga benar

$$p(k+2) : A^{k+2} = \begin{bmatrix} a^{\frac{k+2}{2}}b^{\frac{k+2}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k+2}{2}}b^{\frac{k+2}{2}} \end{bmatrix}$$

Bukti :

$$\begin{aligned} A^{k+2} &= A^k . A^2 \\ &= A^k . A . A \\ &= \begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ab\left(a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}}\right) & 0 \\ 0 & ab\left(a^{\frac{k+2}{2}}b^{\frac{k+2}{2}}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^{\frac{k+2}{2}}b^{\frac{k+2}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k+2}{2}}b^{\frac{k+2}{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oleh karena langkah 1 dan 2 sudah ditunjukkan benar, maka terbukti

$$A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ genap.} \qquad \blacksquare$$

2.4 *Trace* Matriks Berpangkat

Definisi *trace* matriks akan dibahas terlebih dahulu sebelum membahas mengenai *trace* matriks berpangkat.

Definisi 2.6 [14] Apabila A adalah sebuah matriks bujursangkar maka *trace* dari A yang dinyatakan $tr(A)$ didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujursangkar.

Jika

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

maka

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Contoh 2.6 Apabila diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ maka $tr(A) = 3 + 6 + 9 = 18$

Pembahasan mengenai *trace* matriks berpangkat sebelumnya sudah dibahas oleh Novia Arda Putri pada tahun 2019 dalam penelitiannya yang berjudul "*Trace* Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif"[15]. Penelitian tersebut membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks Toeplitz simetris yang berordo 3×3 dengan pangkat bilangan bulat positif dengan bentuk matriks khusus :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in R. \tag{2.3}$$

Berikut diberikan langkah-langkahnya :

1. Diberikan matriks Toeplitz simetris bentuk khusus ordo 3×3 pada Persamaan (2.1).

2. Menduga bentuk umum $(A_3)^n$

Untuk menduga bentuk umum $(A_3)^n$ maka akan dilakukan perpangkatan matriks (A_3) sampai $(A_3)^{12}$ sebagai berikut :

$$(A_3) = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2a^3 & 0 \\ 2a^3 & 0 & 2a^3 \\ 0 & 2a^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^4 = \begin{bmatrix} 2a^4 & 0 & 2a^4 \\ 0 & 4a^2 & 0 \\ 2a^4 & 0 & 2a^4 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^5 = \begin{bmatrix} 0 & 4a^5 & 0 \\ 4a^5 & 0 & 4a^5 \\ 0 & 4a^5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^6 = \begin{bmatrix} 4a^6 & 0 & 4a^6 \\ 0 & 8a^6 & 0 \\ 4a^6 & 0 & 4a^6 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^7 = \begin{bmatrix} 0 & 8a^7 & 0 \\ 8a^7 & 0 & 8a^7 \\ 0 & 8a^7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^8 = \begin{bmatrix} 8a^8 & 0 & 8a^8 \\ 0 & 16a^8 & 0 \\ 8a^8 & 0 & 8a^8 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^9 = \begin{bmatrix} 0 & 16a^9 & 0 \\ 16a^9 & 0 & 16a^9 \\ 0 & 16a^9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^{10} = \begin{bmatrix} 16a^{10} & 0 & 16a^{10} \\ 0 & 32a^{10} & 0 \\ 16a^{10} & 0 & 16a^{10} \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 32a^{11} & 0 \\ 32a^{11} & 0 & 32a^{11} \\ 0 & 32a^{11} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^{12} = \begin{bmatrix} 32a^{12} & 0 & 32a^{12} \\ 0 & 64a^{12} & 0 \\ 32a^{12} & 0 & 32a^{12} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan diduga bentuk umum $(A_3)^n$ untuk n ganjil dan n genap yang akan dinyatakan dalam Teorema berikut :

Teorema 2.1 Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \forall a \in \mathbb{R}$ sehingga

$$(A_3)^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} 2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}}a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

3. Membuktikan bentuk umum $(A_3)^n$ dengan menggunakan induksi matematika.
   Setelah didapatkan Teorema 2.1 di atas, selanjutnya akan dibuktikan bentuk umum tersebut menggunakan induksi matematika.

   Bukti :

   Pertama-tama, akan dibuktikan bentuk umum $(A_3)^n$ untuk n ganjil.

   Misalkan $p(n): (A_3)^n = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \end{bmatrix}$.

   1) Untuk $n = 1$ maka

   $$p(1): (A_3)^1 = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{1-1}{2}}a^1 & 0 \\ 2^{\frac{1-1}{2}}a^1 & 0 & 2^{\frac{1-1}{2}}a^1 \\ 0 & 2^{\frac{1-1}{2}}a^1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \text{ benar}$$

   2) Asumsikan $n = k, p(k)$ benar, yaitu :

   $$p(k): (A_3)^k = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{k-1}{2}}a^k & 0 \\ 2^{\frac{k-1}{2}}a^k & 0 & 2^{\frac{k-1}{2}}a^k \\ 0 & 2^{\frac{k-1}{2}}a^k & 0 \end{bmatrix}$$

   Lalu akan ditunjukkan untuk $n = k + 2, p(k + 2)$ juga benar, yaitu :

   $$p(k+2): (A_3)^{k+2} = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{k+1}{2}}a^{k+2} & 0 \\ 2^{\frac{k+1}{2}}a^{k+2} & 0 & 2^{\frac{k+1}{2}}a^{k+2} \\ 0 & 2^{\frac{k+1}{2}}a^{k+2} & 0 \end{bmatrix}$$

Pembuktian :

$$(A_3)^{k+2} = (A_3)^k \cdot (A_3)^2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{k-1}{2}}a^k & 0 \\ 2^{\frac{k-1}{2}}a^k & 0 & 2^{\frac{k-1}{2}}a^k \\ 0 & 2^{\frac{k-1}{2}}a^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a^0 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{k+1}{2}}a^{k+2} & 0 \\ 2^{\frac{k+1}{2}}a^{k+2} & 0 & 2^{\frac{k+1}{2}}a^{k+2} \\ 0 & 2^{\frac{k+1}{2}}a^{k+2} & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan langkah 1 dan 2 terbukti bahwa

$$(A_3)^n = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \end{bmatrix} \text{untuk } n \text{ ganjil.}$$

Selanjutnya akan dibuktikan $(A_3)^n$ untuk n genap sebagai berikut :

$$\text{Misalkan } p(n): (A_3)^n = \begin{bmatrix} 2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}}a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n \end{bmatrix}$$

1) Untuk $n = 2$ maka

$$p(2): (A_3)^2 = \begin{bmatrix} 2^{\frac{2-2}{2}}a^2 & 0 & 2^{\frac{2-2}{2}}a^2 \\ 0 & 2^{\frac{2}{2}}a^2 & 0 \\ 2^{\frac{2-2}{2}}a^2 & 0 & 2^{\frac{2-2}{2}}a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix}, \text{ benar}$$

2) Asumsikan $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu :

$$p(k): (A_3)^k = \begin{bmatrix} 2^{\frac{k-2}{2}}a^k & 0 & 2^{\frac{k-2}{2}}a^k \\ 0 & 2^{\frac{k}{2}}a^k & 0 \\ 2^{\frac{k-2}{2}}a^k & 0 & 2^{\frac{k-2}{2}}a^k \end{bmatrix}$$

Maka akan ditunjukkan untuk $n = k + 2$, $p(k + 2)$ juga benar, yaitu :

$$p(k+2): (A_3)^{k+2} = \begin{bmatrix} 2^{\frac{k}{2}}a^{k+2} & 0 & 2^{\frac{k}{2}}a^{k+2} \\ 0 & 2^{\frac{k+2}{2}}a^{k+2} & 0 \\ 2^{\frac{k}{2}}a^{k+2} & 0 & 2^{\frac{k}{2}}a^{k+2} \end{bmatrix}$$

Pembuktian :

$$(A_3)^{k+2} = (A_3)^k \cdot (A_3)^2$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{\frac{k-2}{2}}a^k & 0 & 2^{\frac{k-2}{2}}a^k \\ 0 & 2^{\frac{k}{2}}a^k & 0 \\ 2^{\frac{k-2}{2}}a^k & 0 & 2^{\frac{k-2}{2}}a^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{\frac{k}{2}}a^{k+2} & 0 & 2^{\frac{k}{2}}a^{k+2} \\ 0 & 2^{\frac{k+2}{2}}a^{k+2} & 0 \\ 2^{\frac{k}{2}}a^{k+2} & 0 & 2^{\frac{k}{2}}a^{k+2} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan langkah 1 dan 2 maka terbukti bahwa

$$(A_3)^n = \begin{bmatrix} 2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}}a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n \end{bmatrix} \text{untuk } n \text{ genap}$$

4. Menentukan bentuk umum $tr(A_3)^n$.

   Berdasarkan Teorema 2.1akan didapatkan bentuk umum $tr(A_3)^n$ untuk n ganjil dan n genap dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.2 Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \forall a \in \mathbb{R}$, sehingga

$$tr(A_3)^n = \begin{cases} 0, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 2^{\frac{n}{2}+1}a^n, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti :

Akan dibuktikan $tr(A_3)^n = 0$ untuk n ganjil.

Berdasarkan Teorema 2.1 maka dapat dibentuk $tr(A_3)^n$ untuk n bilangan ganjil yaitu :

$$tr(A_3)^n = tr\begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \end{bmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

sehingga terbukti $tr(A_3)^n = 0$ untuk n ganjil.

Selanjutnya akan dibuktikan $tr(A_3)^n = 2^{\frac{n}{2}+1}a^n$ untuk n genap.

Berdasarkan Teorema 2.1 maka dapat ditentukan $tr(A_3)^n$ untuk n bilangan genap, yaitu :

$$tr(A_3)^n = tr\begin{bmatrix} 2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}}a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n \end{bmatrix}$$

$$= 2^{\frac{n-2}{2}}a^n + 2^{\frac{n}{2}}a^n + 2^{\frac{n-2}{2}}a^n$$

$$= 2\left(2^{\frac{n-2}{2}}a^n\right) + 2^{\frac{n}{2}}a^n$$

$$= 2^{\frac{n}{2}+1}a^n$$

Sehingga terbukti $tr(A_3)^n = 2^{\frac{n}{2}+1}a^n$ untuk n genap.

5. Mengaplikasikan bentuk umum $(A_3)^n$ dan $tr(A_3)^n$.

Contoh 2.7

Diberikan matriks Toeplitz simetris sebagai berikut :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah nilai dari $(A_3)^9$, $(A_3)^{10}$, $tr(A_3)^9$ dan $tr(A_3)^{10}$.

Penyelesaian :

Berdasarkan Persamaan (2.1) didapatkan nilai $a = 3$. Dengan menggunakan Teorema 2.1 maka diperoleh $(A_3)^9$ untuk $n = 9$ bilangan ganjil, yaitu :

$$(A_3)^9 = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{9-1}{2}}(3)^9 & 0 \\ 2^{\frac{9-1}{2}}(3)^9 & 0 & 2^{\frac{9-1}{2}}(3)^9 \\ 0 & 2^{\frac{9-1}{2}}(3)^9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^9 = \begin{bmatrix} 0 & 314.928 & 0 \\ 314.928 & 0 & 314.928 \\ 0 & 314.928 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan Teorema 2.2 diperoleh $tr(A_3)^9 = 0$.

Selanjutnya diperoleh $(A_3)^{10}$ untuk $n = 10$ bilangan genap berdasarkan Teorema 2.1 yaitu :

$$(A_3)^{10} = \begin{bmatrix} 2^{\frac{10-2}{2}}(3)^{10} & 0 & 2^{\frac{10-2}{2}}(3)^{10} \\ 0 & 2^{\frac{10}{2}}(3)^{10} & 0 \\ 2^{\frac{10-2}{2}}(3)^{10} & 0 & 2^{\frac{10-2}{2}}(3)^{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 944.784 & 0 & 944.784 \\ 0 & 1.889.568 & 0 \\ 944.784 & 0 & 944.784 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan Teorema 2.2 diperoleh :

$$tr(A_3)^{10} = 2^{\frac{10}{2}+1}(3)^{10}$$

$$= (2^6)(3^{10})$$

$$= 3.779.136$$

BAB III
METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur yang meliputi langkah-langkah sebagai berikut :

1. Diberikan Matriks Hankel (A_{n+1}) bentuk khusus pada Persamaan (1.2).
2. Menentukan perpangkatan matriks $(A_{n+1})^2$ sampai $(A_{n+1})^8$ berordo ganjil untuk $n = 2,4,6,8$.
3. Menduga bentuk umum $(A_{n+1})^m$ berordo ganjil untuk $(n+1) \geq 3$, n bilangan genap dan $m \in \mathbb{Z}^+$.
4. Membuktikan bentuk umum $(A_{n+1})^m$ berordo ganjil untuk $(n+1) \geq 3$, n bilangan genap dan $m \in \mathbb{Z}^+$ menggunakan induksi matematika.
5. Menentukan bentuk umum $tr(A_{n+1})^m$ menggunakan definisi *trace* matriks.
6. Mengaplikasikan bentuk umum $(A_{n+1})^m$ dan $tr(A_{n+1})^m$ pada beberapa contoh soal.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan uraian yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan pada penelitian ini sebagai berikut.

Jika A_{n+1} adalah suatu Matriks Hankel bentuk khusus berordo ganjil, yaitu :

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & \cdots & a & 0 & a \end{bmatrix}$$

maka

$$(A_{n+1})^m = \begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & 0 & \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & \cdots & \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & 0 & \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m \\ 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & 0 \\ \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & 0 & \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & \cdots & \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & 0 & \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & 0 & \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & \cdots & \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & 0 & \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m \\ 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & 0 \\ \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & 0 & \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & \cdots & \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & 0 & \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis dengan

$$(A_{n+1})^m = [a_{i,j}] = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m & \text{untuk } i = 0,2,..,n \text{ dan } j = 0,2,..,n \\ \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m & \text{untuk } i = 1,3,\ldots,n-1 \text{ dan } j = 1,3,\ldots,n-1 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

sehingga

$$tr(A_{n+1})^m = \left[\left(\frac{n}{2}+1\right)a\right]^m + \left[\left(\frac{n}{2}\right)a\right]^m$$

5.2 Saran

Dari uraian yang telah disampaikan pada Tugas Akhir ini, penulis membahas mengenai langkah-langkah dalam menentukan *trace* Matriks Hankel bentuk khusus berordo ganjil berpangkat bilangan bulat positif. Bagi para pembaca yang tertarik dengan topik ini, pembaca dapat melanjutkan perpangkatan negatif ataupun mencari bentuk umum *trace* Matriks Hankel untuk entri yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

[1] J. DeFranza and D. Gagliardi, *Introduction To Linear Algebra With Applications*. Higher Education, 2009.

[2] R. Ehrenborg, "The Hankel determinant of exponential polynomials," *Am. Math. Mon.*, vol. 107, no. 6, pp. 557–560, 2000, doi: 10.2307/2589352.

[3] A. N. Rahma and Z. Aqilah, "Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 7, no. 1, p. 96, 2021, doi: 10.24014/jsms.v7i1.12193.

[4] Z. Aqilah, "Invers Matriks Hankel Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Adjoin," UIN Sultan Syarif Kasim Riau, 2020.

[5] K. Habermann, "An Explicit Formula For The Inverse Of A Factorial Hankel Matrix," 2018.

[6] J. A. R. Virginia, "Invers Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo (n+1) x (n+1) Menggunakan Metode Adjoin," UIN Sultan Syarif Kasim Riau, 2022.

[7] F. Azzahra, "Invers Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo (n+1)×(n+1) ,(n≥3) dengan Matriks Blok 2×2," UIN Sultan Syarif Kasim Riau, 2022.

[8] A. De Resta, "Trace Matriks Hankel Pangkat Tiga," UIN Sultan Syarif Kasim Riau, 2022.

[9] R. Amelia, "Trace Matriks Hankel Ke-n Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," UIN Sultan Syarif Kasim Riau, 2022.

[10] K. S. Utami, "Trace Matriks Hankel Ke-n Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," UIN Sultan Syarif Kasim Riau, 2022.

[11] S. L. Yang and Y. N. Dong, "Hankel Determinants of the Generalized Factorials," *Indian J. Pure Appl. Math.*, vol. 49, no. 2, pp. 217–225, 2018, doi: 10.1007/s13226-018-0264-9.

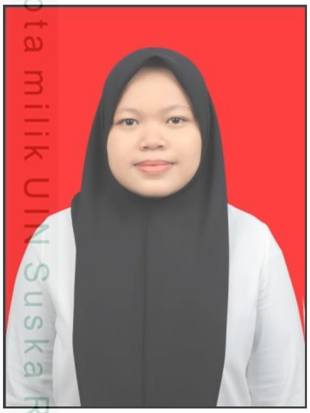
[12] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra Applications Version*, 11th editi. United States of America: Wiley, 2013.

[13] Sukirman, *Pengantar Teori Bilangan*. Yogyakarta, 2006.

[14] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi*, Delapan. Jakarta: Erlangga, 2004.

[15] N. A. Putri, "Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," UIN Sultan Syarif Kasim Riau, 2019.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis lahir pada tanggal 6 Mei 2000 di P.Brandan sebagai anak kedua dari empat bersaudara pasangan Bapak Hartono dan Ibu Nuryanti. Penulis menyelesaikan pendidikan formal di SD Negeri 056030 Bukit Sentang, Sumatera Utara tahun 2012. Pada tahun 2015 menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Pertama di SMP Negeri 1 Babalan dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas di SMA Negeri 1 Babalan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam pada tahun 2018. Pada tahun yang sama, penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Program Studi Matematika.

Pada bulan Januari 2021 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di rumah dengan judul penelitian **"Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier dengan Menggunakan Metode Dekomposisi *LU*"** yang dibimbing oleh Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat dan telah diseminarkan pada tanggal 7 Juli 2021. Pada bulan Juli-Agustus 2021 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata Dari Rumah (KKN-DR) di Desa Securai Utara, Kecamatan Babalan, Kabupaten Langkat, Sumatera Utara. Pada tahun 2023 penulis menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"*Trace* Matriks Hankel Bentuk Khusus Berordo Ganjil Berpangkat Bilangan Bulat Positif"** dibawah bimbingan Ibu Rahmawai, M.Sc.