TRACE MATRIKS *ANTISYMMETRIC* BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

ALVINA
11950420087

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2023

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS *ANTISYMMETRIC* BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

oleh :

ALVINA
11950420087

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 13 Juni 2023

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIP. 19770913 200604 2 002

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS *ANTISYMMETRIC* BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

Oleh :

ALVINA
11950420087

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarief Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 13 Juni 2023

Pekanbaru, 13 Juni 2023
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	NIP. 19730818 200604 1 003

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Wartono, M.Sc.**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota I	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si.**
Anggota II	**: Ade Novia Rahma, M.Mat.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, teteapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Isalam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 13 Juni 2023
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL

ALVINA
11950420087

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Orang lain tidak akan ingin tau masa sulit yang kamu lalui, yang mereka ingin hanya bagian indah dari stories hidupmu. Jadi berjuanglah untuk dirimu meskipun tidak ada yang memberikan support. Suatu saat kita akan bangga dengan apa yang sedang kita perjuangkan sekarang.

Maka tetap semangat yaa..

PENELITIAN TUGAS AKHIR INI KU PERSEMBAHKAN KEPADA ORANG-ORANG YANG TERSAYANGI

Oncu Hasmita yang Sangat Saya Sayangi

Karya kecil ini alvi persembahkan Untuk oncu as yang sangat vina sayang…maaf alvi tidak bisa sukses sebelum oncu pergi untuk selamanya. Terimakasih untuk perhatian dan kasih sayang yang tak terhingga oncu beri ke alvi selama 20th. Oncu as adalah orang yang sangat berharga dalam hidup alvii.

Terimakasih banyak onccu telah hadir didalam hidup alvii ☺

Ummi dan Abah ku Tersayang

Alvi persembahkan karya kecil ini untuk ummi (Hikmah) dan abah (Zamhar) sebagai tanda terimakasih karena telah memberikan kasih sayang yang tak terhingga dan selalu mendukung apapun yang ingin alvi mau. Maaf alvi belum bisa membahagiakan ummi sama abah sampai saat ini, semoga dengan ini menjadi langkah awal alvi untuk membahagiakan ummi sama abah. Untuk ummi sama abah semoga sehat selalu, bahagia, dan kita selalu bersama sama.. terimakasih ummi dan terimakasih abah.

Abang dan Adik ku Tercinta

Untuk abangku (M.Aldi Riswanda) dan adikku (Irwan nova sama Muhammad Nurrashid) terimakasih telah banyak menolong dan membantu.

Saudaraku Tercinta

Aku persembahkan karya Tugas Akhir ini untuk saudara ku (Nurul.J, Aiman, Aimin, Nurul.S dan kx Dibah) terimakasih telah satu frekuensi dgn aku dan telah menghibur juga..

Keluarga

Karya kecil ini alvi persembahkan untuk keluarga ummi yang selalu ada untuk kami (uwo oji dan uwo pasau (alm.Hj.Ropi'ah Yaasin), Etek eli dan apak imi, Maktuo cumi, Mamak Agus, oncu rizka dll) terimakasih banyak kalien keluarga yang takakan alvi lupakan, terimakasih sudah mau membantu ummi dan abah alvi yaa…

Dosen Pembimbing dan Penguji Tugas Akhir

Karya kecil ini saya persembahkan untuk dosen pembimbing yang saya sayangi (Ibu Fitri Aryani, M.Sc) Dosen penguji yang saya sayangi (Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si dan Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat) terimakasih banyak atas bimbingan dari ibu dosen hingga alvi bisa menyelesaikan Penelitian Tugas Akhir ini. Maaf ibu penelitian ini masih banyak kurangnya dan Maafkan alvi jika selama bimbingan dengan ibu ada perbuatan yang tidak ibu suka atau kata-kata alvi yang menyinggun perasaan ibu. Sekali lagi terimakasih banyak ibu ☺

TRACE MATRIKS *ANTISYMMETRIC* BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT

ALVINA
11950420087

Tanggal Sidang : 13 Juni 2023
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat. Untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat yaitu mencari perpangkatan matriks dari pangkat 2 sampai pangkat 10 dan pangkat -2 sampai pangkat -10. Setelah itu diduga bentuk umum matriks *antisymmetric* berpangkat n dan dilakukan pembuktian menggunakan induksi matematika. Selanjutnya diproleh bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* dengan menggunakan definisi *trace* matriks. Kemudian mengaplikasikan bentuk umum perpangkatan matriks dan *trace* matriks *antisymmetric* dalam contoh soal.

Kata Kunci : Induksi matematika, matriks *antisymmetric*, matriks *antisymmetric* bentuk khusus, perpangkatan matriks, *trace* matriks.

TRACE OF INTEGER POWERS OF ANTISYMMETRIC SPECIAL MATRIX

ALVINA
11950420087

Date of Final Exam : June, 13th 2023
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

The purpose of this research is to obtain the general form of the antisymmetric trace matrix, the special from of the integer power. To get the general form of a trace matrix with an integer power are to find the exponents of matrices from the power of 2 to the until power of 10 and the power of -2 to the until power -10. After that, the general form of an antisymmetric matrix of the power of n is assumed and the proof is carried out using mathematical induction. Furthermore, the general form of the trace matrix antisymmetric is obtained by using the definition of the trace matrix. Then apply the general form of exponential matrices and antisymmetric trace matrices in the example questions.

Keywords *: Antisymmetric matrix, exponential matrix, mathematical induction, matrix trace, special antisymmetric matrix.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Puji beserta syukur penulis ucapkan kepada Allah S.W.T zat yang maha pencipta dan atas segala rahmat, karunia serta hidayahnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian Tugas Akhir dengan judul penelitian **"***Trace* Matriks *Antisymmetric* Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat**"**. Salawat dan salam semoga terlimpah kepada junjungan alam yakni Nabi besar kita Nabi Muhammad SAW, dengan lafaz *Allahumma sholli ala Muhammad wa ala ali Muhammad*. Penelitian Tugas Akhir ini disusun sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan kuliah di program studi Matematika .

Penelitian Tugas Akhir ini tentu saja melibatkan banyak pihak yang telah memberikan membantu, semangat, arahan, serta memberi dukungan moril maupun materil dalam penyelesaian penelitian Tugas Akhir ini. Untuk itu pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktunya untuk berkonsultasi dalam penyelesaian Penelitian Tugas Akhir.
6. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si. dan Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat. selaku dosen penguji yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk menguji dan memberikan saran dalam Penelitian Tugas Akhir.

7. Bapak Zukrianto, M.Si. selaku Koordinator Tugas Akhir Program Studi Matematika.
8. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
9. Adik-adik aku yang tersayang yaitu Nurul Jannah, Rashid, Aimin, dan Aiman terimakasih telah menghibur penulis selama menyelsaikan Penelitian Tugas Akhir ini.
10. Teman satu bimbingan saya Fitri Wafiq Azizah yang selalu memberikan bantuan selama menyelasaikan Penelitian Tugas Akhir.
11. Teman-teman KKN Desa Teluk Rhu yaitu Sri Zuliana, Fitri Nurwijiawati, Happy Harry Lovita Lady yang selalu semangat menanyakan kapan jadwal sidang.
12. Terakhir untuk teman-teman Program Studi Matematika yang telah banyak membantu penulis dan tidak dapat penulis sebutkan namanya satu-persatu.

Penulis menyadari dalam Penelitian Tugas Akhir ini masih banyak terdapat kekurangan dan kesalahan, untuk itu penulis mengharapkan adanya masukan berupa kritik ataupun saran dari berbagai pihak untuk kesempurnaan Penelitian Tugas Akhir ini, dan kepada semua pihak yang telah memberikan dorongan serta bantuan penulis hanya dapat mengucapkan terimakasih, semoga bantuan bimbingan dan dukungan yang diberikan mendapatkan balasan dari Allah SWT.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakathu

Pekanbaru, 13 Juni 2023

Alvina
11950420087

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar linear merupakan bagian ilmu matematika yang membahas tentang matriks. Ada banyak kegunaan matriks dalam keseharian yang dapat dijumpai. Salah satu contoh kegunaan matriks dalam bidang ekonomi yaitu untuk meminimumkan biaya trasportasi dan memaksimumkan keuntungan.

Matriks mempunyai bermacam-macam jenis yaitu matriks segitiga, matriks identitas, matriks *circulant*, matriks *Toeplitz*, matriks simetris, matriks *antisymmetric*, dan masih banyak jenis matriks lainnya. Pada penelitian ini akan menggunakan matriks *antisymmetric*. Berikut bentuk umum matriks *antisymmetric* ordo 3 berdasarkan [1] :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Matriks *antisymmetric* bentuk khusus yang digunakan dalam penelitian ini yaitu :

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Penelitian ini membahas tentang perhitungan *trace* matriks berpangkat bilangan bulat. *Trace* matriks adalah jumlah entri-entri pada diagonal utama dari matriks bujursangkar [2]. Sedangkan untuk mendapatkan *trace* matriks berpangkat terlebih dahulu harus dilakukan perpangkatan matriks yaitu dengan cara perkalian matriks. Setelah itu maka dapat dicari bentuk *trace* matriks berpangkat. Namun untuk menentukan *trace* dari matriks yang berpangkat lebih besar akan membutuhkan waktu yang sangat lama. Sehingga diperlukan bentuk umum matriks berpangkat n, dengan adanya bentuk umum matriks berpangkat n akan mempermudah mendapatkan *trace* matriks berpangkat yaitu dengan cara mensubstitusikan entri-entri matriks ke dalam bentuk umum yang diperoleh.

Penelitian tentang *trace* matriks sudah banyak dibahas oleh peneliti sebelumnya. Penelitian yang dilakukan oleh [3] pada tahun 2022 dengan matriks FLD_{circ_r} berbentuk khusus yang digunakan yaitu :

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, n \geq 2.$$

Hasil dari penelitiannya adalah bentuk umum *trace* matriks FLD_{circ_r} berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif dari dua sampai empat berikut hasil yang diperoleh dalam penelitiannya : $tr(A_n)^2 = tr(A_n)^3 = tr(A_n)^4 = 0.$

Berdasarkan peneliti [4] pada tahun 2021 dengan hasil akhir dari penelitian yaitu bentuk umum *trace* matriks *toeplitz 2-tridiagonal* 3x3 berpangkat bilangan bulat positif. Berikut bentuk matriks yang digunakan dalam penelitiannya :

$A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \forall a, b, c \in \mathbb{R}$, dan bentuk umum *trace* matriks *toeplitz 2-tridiagonal* 3x3 sebagai berikut :

$$tr(A^n) = \begin{cases} a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i, & n \ ganjil, n > 0, n \in \mathbb{Z} \\ a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i, & n \ ganjil, n \geq 0, n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Penelitian lain yang juga dijadikan acuan yaitu penelitian yang dilakukan oleh [5] pada tahun 2022 dengan hasil penelitian yaitu bentuk umum *trace* matriks Hessenberg bentuk khusus berpangkat tiga sebagai berikut : $tr(H_{nxn}^3) = tr(H_n^3) = (10n - 12)a^3$.

Menurut [6] pada tahun 2021 dengan matriks khusus yang digunakan yaitu :

$$A_n = \begin{bmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{bmatrix}, \text{dengan } a \in \mathbb{R}.$$

Hasil penelitian adalah bentuk umum matriks berpangkat bilangan bulat positif sebagai berikut :

$$A_n^m = \begin{bmatrix} n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \cdots & n^{m-1}a^m \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \cdots & n^{m-1}a^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \cdots & n^{m-1}a^m \end{bmatrix}, \text{dengan } m \in \mathbb{Z}.$$

Serta rumus umum *trace* matriks berpangkat yaitu $tr(A_n^m) = (na)^m$.

Penelitian [7] tahun 2021 dengan hasil penelitian yaitu rumus umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus berordo 3x3 serta rumus umum *trace* perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus berordo 3x3 yaitu:

Rumus umum perpangkatan matriks simetris berpangkat bilangan bulat positif :

$$A_3^n = [c_{ij}] = \begin{cases} \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3} b^n; & untuk\ i = j \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3} b^n; & untuk\ i \neq j \end{cases}.$$

Rumus umum *trace* matriks simetris berpangkat bilangan bulat positif yaitu :

$$tr(A_3^n) = 3\left(\frac{(2^n-(-1)^{n+1}2)}{3} b^n\right).$$

Rumus umum perpangkatan matriks simetris berpangkat bilangan bulat negatif :

$$A_3^{-n} = [d_{ij}] = \begin{cases} \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n b^n}; & \text{untuk } i = j \\ \frac{(-1)^{n+1} 2^n+1}{3.2^n b^n}; & \text{untuk } i \neq j \end{cases}.$$

Rumus umum *trace* matriks simetris berpangkat bilangan bulat negatif yaitu :

$$tr(A_3^{-n}) = 3\left(\frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n b^n}\right).$$

Pada tahun yang sama juga dilakukan penelitian oleh [8] dengan hasil penelitian memperoleh rumus umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus 4x4 dan rumus umum *trace* matriks simetris berbentuk khusus 4x4 berpangkat bilangan bulat sebagai berikut :

Rumus umum matriks simetris 4x4 dan rumus umum *trace* matriks simetris 4x4 berpangkat bilangan bulat positif :

$$A_4^n = [a_{ij}] = \begin{cases} \left(\frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4} b^n\right); & i = j \\ \left(\frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4} b^n\right); & i \neq j \end{cases}.$$

$$tr(A_4^n) = (3^n - (-3)^{n+1}) b^n.$$

Rumus umum matriks simetris 4x4 dan rumus umum *trace* matriks simetris 4x4 berpangkat bilangan bulat negatif :

$$A_4^{-n} = [b_{ij}] = \begin{cases} \left(\frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n}\right) & i = j \\ \left(\frac{(-1)^{n+1} 3^n+1}{4.3^n b^n}\right) & i \neq j \end{cases}.$$

$$tr(A_4^{-n}) = \left(\frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{3^n b^n}\right).$$

Selanjutnya menurut [9] tahun 2021 dengan hasil dari penelitian ini yaitu bentuk umum matriks simetris 5x5 berpangkat bilangan bulat positif dan negatif serta bentuk umum *trace* matriks simetris 5x5 berpangkat bilangan bulat positif dan negatif sebagai berikut :

Bentuk umum matriks simetris 5x5 berpangkat bilangan bulat positif :

$$A_5^n = [c_{ij}] = \begin{cases} \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right) b^n, & i=j \\ \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}4}{5}\right) b^n, & i \neq j \end{cases}.$$

Bentuk umum matriks simetris 5x5 berpangkat bilangan bulat negatif :

$$A_5^{-n} = [d_{ij}] = \begin{cases} \left(\frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\,.4^n b^n}\right), & i=j \\ \left(\frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\,.\,4^n b^n}\right) b^n, & i \neq j \end{cases}.$$

Bentuk umum *trace* matriks simetris 5x5 berpangkat bilangan bulat positif :

$$tr(A_5^n) = (4^n - (-1)^{n+1}4)b^n\ .$$

Bentuk umum *trace* matriks simetris 5x5 berpangkat bilangan bulat negatif :

$$tr(A_5^{-n}) = \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{4^n b^n}\ .$$

Berdasarkan pemaparan hasil penelitian sebelumnya, maka peneliti tertarik untuk mencari bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* dengan judul kajian pada tugas akhir yaitu "***Trace* Matriks *Antisymmetric* Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, maka rumusan masalah yang peneliti angkat pada tugas akhir ini yaitu :

1. Bagaimana bentuk umum perpangkatan matriks *antisymmetric* berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif dan negatif ?
2. Bagaimana bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* berpangkat bilangan bulat positif dan negatif ?

1.3 Batasan Masalah

Untuk mendapatkan hasil penelitian, maka harus dibentuk batasan masalah pada penelitian. Berikut beberapa batasan masalah dalam penelitian tentang *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat yaitu :

1. Matriks *antisymmetric* ordo 5x5 bentuk khusus pada Persamaan (1.2)
2. Perpangkatan matriks hanya untuk bilangan bulat positif dan negatif.

1.4 Tujuan Masalah

Adapun tujuan dari penelitian *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat yaitu :

1. Untuk memperoleh bentuk umum perpangkatan matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif dan negatif.
2. Untuk memperoleh bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif dan negatif.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun beberapa manfaat dari penelitian ini sebagai berikut :

1. Mengaplikasikan ilmu yang telah diperoleh selama melaksanakan studi di program studi matematika.
2. Mendapatkan wawasan baru tentang submateri matriks.
3. Sebagai referensi untuk peneliti selanjutnya.

1.6 Sistematika Penelitian

Adapun beberapa sistematika dalam penulisan laporan tugas akhir tentang *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab I yaitu berisikan latar belakang diangkatnya penelitian *trace* matriks *antisymmetric* berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat, penelitian terdahulu yang dijadikan acuan untuk penelitian *trace* matriks *antisymmetric*, tujuan dilakukan penelitian tentang *trace* matriks *antisymmetric*, manfaat dari penelitian *trace* matriks *antisymmetric*, dan sistematika yang dilaksanakan untuk membuat laporan penelitian tentang *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat.

BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab II yaitu berisikan beberapa teori pendukung yang akan digunakan untuk penyelesaian *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat yaitu matriks *antisymmetric*, perkalian matriks, perpangkatan matriks, *trace* matriks, dan *trace* matriks berpangkat bilangan bulat serta induksi matematika.

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab III yaitu berisikan tahapan atau langkah-langkah yang akan peneliti lakukan dalam penyelesaian penelitian tentang *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab IV berisikan hasil dari penelitian yaitu bentuk umum perpangkatan matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif, bentuk umum perpangkatan matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif, bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif, bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif, dan beberapa contoh soal.

BAB V PENUTUP

Pada bab V berisikan kesimpulan yang diperoleh dari hasil bab IV, serta saran dari peneliti untuk pembaca ataupun peneliti selanjutnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bagian bab 2 ini berisikan beberapa teori pendukung dalam penelitian yang akan digunakan untuk penyelesaian permasalahan.

2.1 Matriks *Antisymmetric*

Definisi 2.1 Pengertian Matriks [10] Matriks ialah susunan bilangan-bilangan yang terletak di dalam segiempat siku-siku. Bilangan-bilangan yang berada di dalam susunan tersebut dinamakan entri matriks. Matriks yang jumlah kolom dan baris nya sama dinamakan matriks bujursangkar atau persegi.

Definisi 2.2 Pengertian Matriks *Antisymmetric* [11] Matriks *antisymmetric* merupakan matriks yang transposenya adalah negatifnya, dengan perkataan lain bila $A^T = -A$ atau $a_{ij} = -a_{ji}$ untuk semua i dan j, dengan semua elemen diagonal utama matriks *antisymmetric* adalah nol.

Contoh 2.1 Berikut diberikan contoh matriks *antisymmetric* :

Misalkan matriks $= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, maka :

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-A = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2 Perkalian Matriks

2.2.1 Perkalian Matriks dengan Skalar

Definisi 2.3 [12] Jika A merupakan matriks sebarang serta k merupakan skalar sebarang, maka perkalian kA adalah mengalikan setiap elemen dalam matriks A dengan bilangan k.

Contoh 2.2 Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 8 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 10 & 1 \\ 3 & 11 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $k = 2$, maka perkalian matriks dengan skalar yaitu :

$$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 8 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 10 & 1 \\ 3 & 11 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 12 & 18 \\ 6 & 8 & 2 & 16 & 8 \\ 10 & 4 & 4 & 12 & 6 \\ 14 & 12 & 10 & 20 & 2 \\ 6 & 22 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Perkalian Dua Matriks

Perkalian dua matriks [12] Operasi perkalian matriks dapat dilakukan pada dua matriks (A dan B) jika banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris pada matriks B. [11] Pandang $A = (a_{ij})$ berukuran $(p\ x\ q)$ dan $B = (b_{ij})$ berukuran $(q\ x\ r)$, maka perkalian AB adalah $C = (c_{ij})$ berukuran $(p\ x\ r)$.

Contoh 2.3 Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 9 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 8 & 5 \\ 6 & 9 & 0 & 2 & 5 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 8 & 6 & 9 \\ 2 & 9 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 6 & 4 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, hasil dari AB ?

Penyelesaian :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 9 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 8 & 5 \\ 6 & 9 & 0 & 2 & 5 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 & 0 & 8 & 6 & 9 \\ 2 & 9 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 6 & 4 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 117 & 138 & 64 & 60 & 123 \\ 88 & 104 & 30 & 31 & 93 \\ 72 & 117 & 76 & 53 & 127 \\ 110 & 96 & 96 & 64 & 106 \\ 56 & 63 & 56 & 41 & 39 \end{bmatrix}.$$

2.2.3 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.4 Perpangkatan Matriks [3] Misalkan A merupakan matriks bujursangkar. Pangkat dari A dapat didefinisikan yaitu :

$$A^2 = A.A,\ A^3 = A^2.A,\ A, \dots, A^{n+1} = A^n.A \text{ dan } A^0 = 1. \tag{2.1}$$

Teorema 2.1 Sifat-Sifat Perpangkatan [10] Jika A merupakan matriks kuadrat serta r dan s adalah bilangan bulat, maka berlaku :

1. $A^r A^s = A^{r+s}$. (2.2)
2. $(A^r)^s = A^{rs}$. (2.3)

Contoh 2.4 Jika diberikan suatu matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 6 & 8 & 2 \\ -7 & 0 & 9 & 2 & 8 \\ -6 & -9 & 0 & 9 & 2 \\ -8 & -2 & -9 & 0 & 6 \\ -2 & -8 & -2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan hasil dari A^2 dan A^3 !

Penyelesaian :

$A^2 = A.A$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 7 & 6 & 8 & 2 \\ -7 & 0 & 9 & 2 & 8 \\ -6 & -9 & 0 & 9 & 2 \\ -8 & -2 & -9 & 0 & 6 \\ -2 & -8 & -2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 6 & 8 & 2 \\ -7 & 0 & 9 & 2 & 8 \\ -6 & -9 & 0 & 9 & 2 \\ -8 & -2 & -9 & 0 & 6 \\ -2 & -8 & -2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -153 & -86 & -13 & 56 & 116 \\ -86 & -198 & -76 & -23 & 16 \\ -13 & -76 & -202 & -78 & -30 \\ 56 & -23 & -78 & -185 & -50 \\ 116 & 16 & -30 & -50 & -108 \end{bmatrix}.$$

dan

$A^3 = A^2.A$

$$= \begin{bmatrix} -153 & -86 & -13 & 56 & 116 \\ -86 & -198 & -76 & -23 & 16 \\ -13 & -76 & -202 & -78 & -30 \\ 56 & -23 & -78 & -185 & -50 \\ 116 & 16 & -30 & -50 & -108 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 6 & 8 & 2 \\ -7 & 0 & 9 & 2 & 8 \\ -6 & -9 & 0 & 9 & 2 \\ -8 & -2 & -9 & 0 & 6 \\ -2 & -8 & -2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1994 & -2428 & -2209 & -684 \\ 1994 & 0 & -2123 & -1864 & -2046 \\ 2428 & 2123 & 0 & -1894 & -1506 \\ 2209 & 1864 & 1894 & 0 & -1338 \\ 684 & 2046 & 1506 & 1338 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.3 Determinan Matriks dan Invers Matriks

Definisi 2.5 Determinan Matriks [10] Jika A merupakan matriks bujursangkar, fungsi determinan dapat dinyatakan oleh det, atau dapat didefinisikan dengan $\det(A)$ untuk semua hasil kali element dari matriks A.

Rumus untuk mendapatkan determinan suatu matriks dapat menggunakan ekspansi kofaktor menurut [13] determinan dari matriks A, $n \, x \, n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali- hasil kali yang diperoleh untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq i \leq n$ sebagai berikut :

a. Menghitung $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} .$$

b. Menghitung $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \tag{2.4}$$

dengan kofaktor atau $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, dan M_{ij} atau minor-ij yaitu determinan matriks A dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j matriks A.

Teorema 2.2 Sifat-Sifat Determinan [10] Jika A merupakan sebarang matriks kuadrat dengan ordo $n \, x \, n$ serta k merupakan sebarang skalar, maka berlaku :

1. $\det(A) = \det(A^t)$.
2. $\det(k\,A) = k^n \det(A^t)$.
3. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Definisi 2.6 Invers Matriks [14] Misalkan A merupakan matriks dengan ordo $n \, x \, n$ serta misalkan ada matriks B dengan ordo $n \, x \, n$ sedemikian sehingga $AB = BA = I$ dengan I merupakan matriks identitas berordo $n \, x \, n$, maka matriks A dinamakan matriks non singular atau *invertible* serta matriks A adalah invers dari B atau B adalah invers dari A.

Invers suatu matriks dapat dilihat dari determinant matriks. Jika $\det(A) = 0$ maka matriks A merupakan matriks singular artinya matriks A tidak memilik invers. Sedangkan, jika $\det(A) \neq 0$ maka matriks A merupakan matriks non singular artinya matriks A memiliki invers.

Teorema 2.3 [10] Suatu matriks kuadrat A dapat dibalik jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Teorema 2.4 [14] Jika A merupakan suatu matriks yang dapat dibalik, maka $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$.

2.4 *Trace* Matriks

Definisi 2.7 *Trace* Matriks [15] Misalkan $A = [a_{ij}]$ suatu matriks bujursangkar berordo $n \, x \, n$, maka *trace* dari matriks A adalah penjumlahan dari elemen diagonal matriks A dan dilambangkan dengan $tr(A)$.

Definisi 2.8 [5] Jika A merupakan suatu matriks, maka *trace* A dapat disimbolkan dalam bentuk $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama. *trace* A tidak terdefinisi jika A bukan matriks persegi. Berikut rumus yang digunakan untuk mencari *trace* pada matriks :

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \,. \tag{2.5}$$

Contoh 2.5 Diberikan dua matriks A serta B sebagai berikut. Maka dapat dicari $tr(A)$ dan $tr(B)$.

$$A = \begin{bmatrix} 29 & 9 & 6 & -1 & 2 & 5 \\ -9 & 26 & -8 & 10 & 11 & -4 \\ -6 & 9 & 28 & -13 & 16 & -3 \\ 1 & -10 & 13 & 26 & -7 & -8 \\ -2 & -11 & -16 & 7 & 28 & -12 \\ -5 & 4 & 3 & 8 & 12 & 29 \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 20 & 2 & 14 \\ 6 & 12 & 10 & 3 & 16 \\ 28 & 9 & 26 & 6 & 11 \\ 8 & 29 & 1 & 13 & 5 \\ 23 & 6 & 7 & 11 & 30 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian :

$tr(A) = 29 + 26 + 28 + 26 + 28 + 29 = 166.$

$tr(B) = 10 + 12 + 26 + 13 + 30 = 91.$

Teorema 2.5 Sifat-Sifat *Trace* Matriks [5] Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ merupakan matriks-matriks kuadrat n dan k merupakan suatu skalar, maka berlaku beberapa sifat dari *trace* matriks sebagai berikut :

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.
2. $tr(A^T) = tr(A)$.
3. $tr(kA) = k \, tr(A)$.
4. $tr(AB) = tr(BA)$.

Pembuktian Teorema :

Diberikan matriks A dan B :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Maka di peroleh :

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}. \tag{2.6}$$

$$tr(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33} + \cdots + b_{nn}. \tag{2.7}$$

1) Akan dibuktikan bahwa $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$. Berdasarkan matriks A dan B maka :

$$(A + B) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & \cdots & a_{3n} + b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & a_{n3} + b_{n3} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix}.$$

trace $(A + B)$ yaitu :

$$tr(A + B) = (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + (a_{33} + b_{33}) + \cdots + (a_{nn} + b_{nn}).$$

$$= (a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + b_{33} + \cdots + b_{nn}).$$

Dengan menggunakan Persamaan (2.5) dan (2.6) di peroleh :

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B). \tag{2.8}$$

Jadi terbukti bahwa $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

2) Akan dibuktikan bahwa $tr(A^T) = tr(A)$. Diperoleh *transpose* dari matriks A sebagai berikut :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Maka diperoleh $tr(A^T)$ yaitu :

$$tr(A^T) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn} = tr(A). \tag{2.9}$$

Jadi terbukti bahwa $tr(A^T) = tr(A)$.

3) Akan dibuktikan bahwa $tr(kA) = k\,tr(A)$. Misalkan ambil sebarang k skalar diperoleh k dikali dengan matriks A sebagai berikut:

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}.$$

Maka *trace* matriks kA yaitu :

$$tr(kA) = ka_{11} + ka_{22} + ka_{33} + \cdots + ka_{nn}$$
$$= k(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}).$$

Dengan mengggunakan Persamaan (2.6) maka di peroleh :

$$tr(kA) = k\,tr(A). \tag{2.10}$$

Jadi terbukti bahwa $tr(kA) = k\,tr(A)$.

4) Akan dibuktikan bahwa $tr(AB) = tr(BA)$, dari matriks A dan B yang di berikan diperoleh (AB) sebagai berikut :

$$(AB) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + \cdots + a_{1n}b_{n3} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + \cdots + a_{2n}b_{n3} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + \cdots + a_{3n}b_{n1} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + \cdots + a_{3n}b_{n2} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + \cdots + a_{3n}b_{n3} & \cdots & a_{31}b_{1n} + a_{32}b_{2n} + \cdots + a_{3n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{n2} & a_{n1}b_{13} + a_{n2}b_{23} + \cdots + a_{nn}b_{n3} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Maka *trace* (AB) yaitu :

$$tr(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) + (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + \cdots + a_{3n}b_{n3}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}). \quad (2.11)$$

untuk matriks (BA) diperoleh sebagai berikut :

$$(BA) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \cdots + b_{1n}a_{n2} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + \cdots + b_{1n}a_{n3} & \cdots & b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1n}a_{nn} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2n}a_{n1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + \cdots + b_{2n}a_{n3} & \cdots & b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \cdots + b_{2n}a_{nn} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + \cdots + b_{3n}a_{n1} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + \cdots + b_{3n}a_{n2} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + \cdots + b_{3n}a_{n3} & \cdots & b_{31}a_{1n} + b_{32}a_{2n} + \cdots + b_{3n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11} + b_{n2}a_{21} + \cdots + b_{nn}a_{n1} & b_{n1}a_{12} + b_{n2}a_{22} + \cdots + b_{nn}a_{n2} & b_{n1}a_{13} + b_{n2}a_{23} + \cdots + b_{nn}a_{n3} & \cdots & b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Maka *trace* (BA) yaitu :

$$tr(BA) = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) + (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + \cdots + b_{3n}a_{n3}) + \cdots + (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}). \quad (2.12)$$

Sehingga :

$$\begin{aligned} tr(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) + (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + \cdots + a_{3n}b_{n3}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) . \\ &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) + (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + \cdots + b_{3n}a_{n3}) + \cdots + (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) . \\ &= tr(BA) . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Jadi terbukti bahwa $tr(AB) = tr(BA)$.

2.5 *Trace* Matriks Berpangkat Bilangan Bulat

Menurut [5] Jika suatu matriks merupakan matriks dengan pangkat n, maka untuk menghitung *trace* matriks tersebut harus dilakukan perkalian matriks sebanyak n kali. Setelah dilakukan perkalian maka dapat ditentukan *trace*-nya. *Trace* matriks simetris dengan ordo 5x5 berpangkat bilangan bulat sebelumnya telah dibahas oleh [9] dengan hasil penelitian yang diperoleh adalah bentuk umum *trace* matriks simetris berbentuk khusus 5x5 berpangkat bilangan bulat positif. Berikut beberapa teorema yang digunakan dalam penelitian [9] :

Teorema 2.6 Diberikan matriks simetris berbentuk khusus 5x5 yaitu :

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R, b \neq 0. \qquad (2.14)$$

Diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks sebagai berikut :

$$A_5^n = [c_{ij}] = \begin{cases} \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right) b^n, & i = j \\ \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right) b^n & i \neq j \end{cases}.$$

Teorema 2.7 Diberikan matriks $A_5^n = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R, b \neq 0,$ maka $tr(A_5^n) = (4^n - (-1)^{n+1}4)b^n$, dengan n bilangan bulat positif.

2.6 Induksi Matematika

Definisi 2.9 [16] Induksi matematika merupakam cara yang dapat dilakukan untuk membuktikan bahwa suatu pernyataan tertentu benar untuk setiap bilangan asli. Adapun tahapan-tahapan pembuktian menggunakan induksi matematika menurut [17].

Misalkan $p(n)$ merupakan proposisi yang ingin dibuktikan benar untuk setiap n. Maka tahapan-tahapan pembuktian menggunakan induksi matematika berdasarkan [17] sebagai berikut :

1. Tunjukkan bahwa $p(1)$ benar.
2. Asumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli n serta tunjukkan $p(k+1)$ juga benar.

Contoh 2.6 Berikut diberikan pembuktian Teorema 2.6 menggunakan induksi matematika berdasarkan penelitian [9]. Jika diketahui matriks simetris A_5 pada Persamaan (2.14), maka diperoleh bentuk perpangkatan matriks simetris 5 x 5 sebagai berikut :

$$p(n):\ A_5^n = \begin{bmatrix} \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n \\ \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n \\ \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n \\ \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n \\ \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n & \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

1. Langkah pertama akan dibuktikan $n = 1,$ maka tunjukkan $p(1)$ benar

$$p(1):\ A_5^1 = \begin{bmatrix} \left(\frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 \\ \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 \\ \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 \\ \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 \\ \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}\right)b^1 & \left(\frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}\right)b^1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}.$$

dengan melihat Persamaan (2.14) maka $p(1)$ benar.

2. Langkah selanjutnya dengan mengasumsikan untuk $n = k$ maka $p(k)$ benar.

$$p(k)\ := A_5^k = \begin{bmatrix} \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \\ \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \\ \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \\ \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \\ \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

selanjutnya akan ditunjukkan untuk $p(k+1)$ juga benar.

$$p(k+1) : A_5^{k+1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} \\ \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} \\ \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} \\ \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} \\ \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}\right)b^{k+1} \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

dengan menggunakan Teorema 2.1 bagian 1 pada Persamaan (2.2) diperoleh :

$$A_5^{k+1} = A_5^k\ A_5^1 = \begin{bmatrix} \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \\ \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \\ \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \\ \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \\ \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k & \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}.$$

akan dibuktikan untuk $i = j$ terlebih dahulu :

$$a_{11} = \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^{k+1}-(-1)(-1)^{k+1}4}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5} b^{k+1}.$$

$$a_{22} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^{k+1}-(-1)(-1)^{k+1}4}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5} b^{k+1}.$$

$$a_{33} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^{k+1}-(-1)(-1)^{k+1}4}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5} b^{k+1}.$$

$$a_{44} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^{k+1}-(-1)(-1)^{k+1}4}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5} b^{k+1}.$$

$$a_{55} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.0$$

$$= \frac{4^{k+1}-(-1)(-1)^{k+1}4}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5} b^{k+1}.$$

selanjutnya akan dibuktikan untuk $i \neq j$

$$a_{12} = \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5} b^{k+1}.$$

$$a_{13} = \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5} b^{k+1}.$$

$$a_{14} = \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1}.$$

$$a_{15} = \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.0$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1}.$$

$$a_{21} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.0 + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1}.$$

$$a_{23} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1}.$$

$$a_{24} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1}.$$

$$a_{25} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.0$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1}.$$

$$a_{31} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1}.$$

$$a_{32} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.0 + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5} b^{k+1}\,.$$

$$a_{34} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5} b^{k+1}\,.$$

$$a_{35} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.0$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5} b^{k+1}\,.$$

$$a_{41} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5} b^{k+1}\,.$$

$$a_{42} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5} b^{k+1}\,.$$

$$a_{43} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5} b^{k+1}\,.$$

$$a_{45} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.0$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5} b^{k+1}\,.$$

$$a_{51} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5} b^{k+1}\,.$$

$$a_{52} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5} b^{k+1}.$$

$$a_{53} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5} b^{k+1}.$$

$$a_{54} = \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right) b^k.0 + \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right) b^k.b$$

$$= \frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3.4^k+3(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5} b^{k+1}.$$

diperoleh bentuk matriks A_5^{k+1} sebagai berikut :

$$A_5^{k+1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} \\ \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} \\ \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} \\ \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} \\ \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right) b^{k+1} & \left(\frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}\right) b^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Jadi hasil matriks A_5^{k+1} sama dengan Persamaan (2.18), maka Teorema 2.6 terbukti.

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode penelitian dalam penelitian tugas akhir menggunakan metode studi literatur yaitu menggunakan referensi dari jurnal-jurnal penelitian serta buku-buku terkait pada penelitian. Berikut beberapa tahapan yang harus dilakukan dalam penyelesaian penelitian tugas akhir ini :

1. Diberikan matriks *antisymmetric* bentuk khusus yang terdapat dalam Persamaan (1.2).
2. Menentukan bentuk perpangkatan matriks *antisymmetric* dari (A_5^2) sampai (A_5^{10}).
3. Menduga bentuk umum matriks *antisymmetric* bentuk khusus (A_5^n) dengan n bilangan bulat positif.
4. Membuktikan bentuk umum matriks *antisymmetric* (A_5^n) untuk n bilangan bulat positif dengan menggunakan pembuktian induksi matematika.
5. Menentukan determinan matriks *antisymmetric* bentuk khusus.
6. Jika $\det A_5 \neq 0$ maka bentuk umum matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif dapat ditentukan, dengan langkah sebagai berikut :
   a. Menentukan bentuk perpangkatan matriks *antisymmetric* dari (A_5^{-2}) sampai (A_5^{-10}).
   b. Menduga bentuk umum matriks antisymmetric bentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif.
   c. Membuktikan (A_5^{-n}) menggunakan aturan invers $(A_5^{n})\,(A_5^{-n}) = (A_5^{-n})\,(A_5^{n}) =$ I
7. Jika $\det(A_5) = 0$ maka bentuk umum matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif tidak dapat ditentukan, sebab tidak memiliki invers matriks.
8. Mendapatkan bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus $(tr(A_5^n))$ untuk n bilangan bulat, dengan menggunakan definisi *trace* matriks.
9. Mengaplikasikan bentuk umum perpangkatan matriks dan bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* dalam bentuk contoh soal.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan bab IV, maka dapat diambil kesimpulan tentang bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berpangkat bilangan bulat sebagai berikut :

1. Untuk matriks *antisymmetric* berpangkat bilangan bulat positif diperoleh :

   Bentuk umum perpangkatan matriks *antisymmetric* yaitu :

$$A_5^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{n-1} \\ 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & (-1)^{\frac{n-1}{2}}a^n(2)^{n-1} \\ 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 \end{bmatrix}, n\ ganjil \\ \begin{bmatrix} (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n-2}{2}}a^n(2)^{n-1} \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n\left(2^{\frac{n-2}{2}}+2^{n-1}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n\left(2^{n-1}-2^{\frac{n-2}{2}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2)^{\frac{n}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n\left(2^{n-1}-2^{\frac{n-2}{2}}\right) & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n\left(2^{\frac{n-2}{2}}+2^{n-1}\right) & 0 \\ (-1)^{\frac{n-2}{2}}a^n(2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2)^{n-1} \end{bmatrix}, n\ genap \end{cases}.$$

   dan bentuk umum *trace* matriks *antisymmetric* yaitu :

$$tr(A_5{}^n) = \begin{cases} 0 & ;\text{untuk } n\ ganjil \\ 2\left((-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2)^{n-1}\right) + 2\left((-1)^{\frac{n}{2}}a^n\left(2^{\frac{n-2}{2}}+2^{n-1}\right)\right) + \left((-1)^{\frac{n}{2}}a^n(2)^{\frac{n}{2}}\right) & ;\text{untuk } n\ genap \end{cases}.$$

2. Untuk matriks *antisymmetric* berpangkat bilangan bulat negatif tidak diperoleh bentuk umum *trace* matriks dikarenakan tidak memiliki invers matriks.

5.2 Saran

Pada penelitian ini telah membahsa tentang *trace* matriks *antisymmetric* bentuk khusus berordo 5x5 berpangkat bilangan bulat. Bagi pembaca atau peneliti selanjutnya yang tertarik membahsa tantang materi ini maka dapat menggunakan bentuk matriks yang berbeda atau menggunakan matriks *antisymmetric* dengan ordo yang lebih besar.

DAFTAR PUSTAKA

[1] E. Weisstein, “Antisymmetric Matrix,” *Wolfram MathWorld*, 2000. https://mathworld.wolfram.com/AntisymmetricMatrix.html (accessed Dec. 21, 2022).

[2] E. S. Rahmadani, "Trace Matriks *Toeplitz Heptadiagonal* Simetris Berpangkat Dua Sampai Empat," Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, 2021.

[3] D. L. Pratiwi, "Trace Matriks $FLDcirc_r$ Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, 2022.

[4] R. O. Isran, Resmawan, Lailany, Yahya, "Trace Matriks Teoplitz 2-Tridiagonal 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 15, no. 3, pp. 441–452, 2021.

[5] N. D. Rambe, "Trace Matriks Hessenberg Bentuk Khusus Berpangkat Tiga," Universitas Islam Nergeri Sultan Syarif Kasim Riau, 2022.

[6] C. C. Marzuki, F. Aryani, and Rahmawati, "Trace Matriks n x n Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol.7, no.1, pp.28-37, 2021.

[7] F. Aryani, F. B. Cenia, Y. Muda, and Zukrianto “Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus Orde 3 Berpangkat Bilangan Bulat,” *Seminar Nasional Teknologi Informasi dan Industri*, pp. 300–310, 2021.

[8] F. Aryani, Hernita, Y. Muda, and Zukrianto, “Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus 4x4 Berpangkat Bilangan Bulat,” *Seminar Nasional Teknologi Informasi dan Industri*, pp. 311–321, 2021.

[9] F. Aryani, S. P. Alfianov, C. C. Marzuki, and A. N. Rahma, “Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus 5x5 Berpangkat Bilangan Bulat,” *Seminar Nasional Teknologi Informasi dan Industri*, pp. 322–333, 2021.

[10] F. Aryani, "Trace Matriks 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat," Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, 2018.

[11] I. N. P. Tenaya, “Diktat Aljabar Linear,” pp. 1–73, 2016.

[12] Syarifuddin, Mikrayanti, Muslim, "Aljabar Linear," no.35, pp.1-128, 2016.

[13] H. A. C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer*, Kedelapan. Jakarta: Erlangga, 2004.

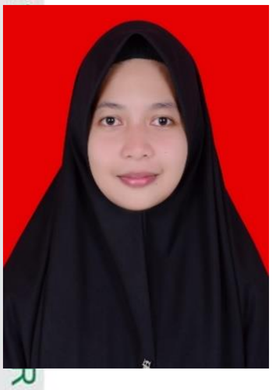
[14] F. Aryani and C. C. Marzuki, “Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin,” Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, 2017.

[15] F. Aryani, R. Andesta, and C. C. Marzuki, “Trace Matriks Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif,” vol. 6, no. 1, pp. 40–49, 2020.

[16] A. Thariq and D. Apviano, “Efek Domino pada Induksi Matematika,” vol. 1, no.2, pp. 60–68, 2020.

[17] Sukirman, “Induksi Matematika dan Teorema Binomial,” pp. 1–43.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis lahir di Dusun Pulau Balai pada tanggal 26 Juni 2001. Penulis merupakan anak kedua dari pasangan Bapak Zamhar dan Ibu Hikma, serta memiliki 2 orang saudara laki-laki. Jenjang pendidikan formal pertama yang telah penulis tempuh pada tahun 2005 di Taman Kanak-Kanak ‘Aisyiyah Bustanul Athfal, dan menyelesaikannya pada tahun 2007. Kemudian pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan di SDN 001 Empat Balai sampai tahun 2013. Selanjutnya di tahun 2013 penulis masuk ke SMP N 1 Kuok untuk melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Pertama hingga selesai pada tahun 2016. Untuk pendidikan Sekolah Menengah Atas penulis melanjutkan nya di MAN 1 Kampar dari tahun 2016 hingga 2019. Pada bulan April 2019 penulis di terima masuk ke Perguruan Tinggi Negeri Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau lewat jalur pertama yaitu SNMPTN dengan Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi merupakan pilihan pertama yang penulis ambil.

Pada 15 Februari hingga 30 Maret 2022 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Kampar dengan judul penelitian yang penulis ambil yaitu “**Analisi Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Tingkat Kemiskinan Di Kabupaten Kampar**” yang di bimbing oleh ibu Rahmadeni, M.Si dan seminar pada tanggal 24 Juni 2022. Kemudian pada bulan Juli sampai Agustus 2022 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Teluk Rhu, Kecamatan Rupat Utara, Kabupaten Bengkalis.