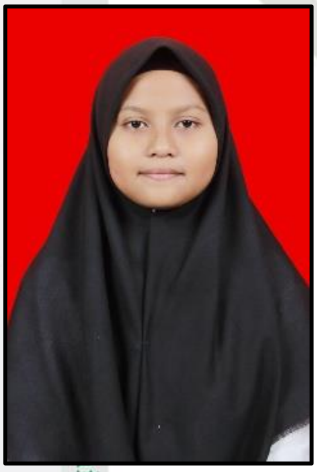
INVERS MATRIKS *SKEW-SYMMETRIC* BENTUK KHUSUS ORDO 4×4 BERPANGKAT BULAT POSITIF MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:



FITRI WAFIQ AZIZAH
11950420069

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2023

LEMBAR PERSETUJUAN

INVERS MATRIKS *SKEW-SYMMETRIC* BENTUK KHUSUS ORDO 4×4 BERPANGKAT BULAT POSITIF MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

TUGAS AKHIR

oleh:

FITRI WAFIQ AZIZAH
11950420069

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 13 Juni 2023

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIP. 19770913 200604 2 002

LEMBAR PENGESAHAN

INVERS MATRIKS *SKEW-SYMMETRIC* BENTUK KHUSUS ORDO 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

TUGAS AKHIR

oleh :

FITRI WAFIQ AZIZAH
11950420069

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Pekanbaru, pada tanggal 13 Juni 2023

Pekanbaru, 13 Juni 2023
Mengesahkan

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	NIP. 19730818 200604 1 003

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Wartono, M.Sc.**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota I	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si.**
Anggota II	**: Ade Novia Rahma, M.Mat.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 13 Juni 2023

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL

FITRI WAFIQ AZIZAH

11950420069

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Alhamdulillahirabbil'alaamiin, rasa syukur kepada Allah Subhaannahu Wata'ala atas rahmat, nikmat dan karunianya sehingga saya dapat menyelesaikan skripsi sederhana ini. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Shalallahu 'Alaihi Wasallam.

Karya sederhana ini saya persembahkan untuk:

Ayah dan Ibu Tersayang

Terimakasih kepada Ayah dan Ibu yang sudah mendidik dan membesarkan saya dengan penuh kasih sayang, juga tiada hentinya memberi semangat dan do'a sehingga saya selalu kuat menjalani setiap rintangan. Ayah dan Ibu yang selalu menanamkan dalam diri ini bahwa pendidikan itu penting dan harus selalu mengutamakan akhlak yang baik. Ya Allah berikanlah kesehatan, balasan syurga firdaus dan jauhkanlah mereka dari panasnya api nerakamu.
Untuk Ayah (Surianto) dan Ibu (Istimah Anjariatun).

Kakak dan Adik Tersayang

Kakakku (Iyus, Dewi dan Rita), abangku (Fendi, Didik dan Gigih), adikku (Reza, Ravi, dan Vivi), serta bocil-bocil kesayanganku. Terimakasih atas dukungan, do'a dan telah menjadi warna dalam hidup saya selama ini.

Dosen Pembimbing

Terimakasih kepada Ibu Fitri Aryani, M.Sc yang selalu sabar dan ikhlas dalam membimbing, hingga saya dapat menyelesaikan laporan tugas akhir ini. Terimakasih untuk kesediaan direpotkan dan memaafkan setiap kesalahan.

Terimakasih untuk semua Dosen Matematika UIN Suska Riau atas ilmu yang telah diberikan.

Sahabat-sahabatku

Windylia Saputri dan Alvina sahabat seperjuangan dalam masa kuliah, sahabatku sedari duduk di bangku Sekolah Dasar hingga sekarang Putri Utama dan Imro'atul Kholifah. Terimakasih atas semua yang kita jalani untuk tangis, tawa, nasehat, dukungan dan kebersamaannya. Semoga kita bisa meraih sukses dimasa depan bersama-sama.

INVERS MATRIKS *SKEW-SYMMETRIC* BENTUK KHUSUS ORDO 4×4 BERPANGKAT BULAT POSITIF MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

FITRI WAFIQ AZIZAH
11950420069

Tanggal Sidang : 13 Juni 2023
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan invers matriks *skew-symmetric* bentuk khusus ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan metode adjoin. Diawali dengan mendapatkan perpangkatan matriks *skew-symmetric* bentuk khusus pangkat 2 sampai pangkat 10, lalu menduga bentuk umum perpangkatan matriks hingga diperoleh bentuk umum n ganjil dan n genap serta dibuktikan menggunakan induksi matematika. Selanjutnya, mendapatkan bentuk umum determinan matriks menggunakan ekspansi kofaktor dan didapatkan bentuk umum matriks kofaktor. Terakhir, didapatkan bentuk umum invers matriks menggunakan metode adjoin. Aplikasi juga diberikan dalam bentuk contoh soal.

Kata Kunci: Determinan, ekspansi kofaktor, invers matriks, matriks kofaktor, matriks *skew-symmetric*, metode adjoin, perpangkatan matriks.

INVERSE SKEW-SYMMETRIC MATRIX OF A SPECIAL FROM OF ORDER 4×4 WITH POSITIF INTEGER USING ADJOIN METHOD

FITRI WAFIQ AZIZAH
11950420069

Date of Final Exam : June 13rd, 2023
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

This study aims to obtain the inverse of the skew-symmetric matrix of special forms of order 4×4 of the rank of positive integers using the adjoin method. Starting with obtaining the power of the skew-symmetric matrix of special forms of power 2 to power 10, then guessing the general form of matrix power until the general form of n odd and n even forms is obtained and proved using mathematical induction. Next, obtain the general form of the determinant of the matrix using the expansion of the cofactor and obtain the general form of the cofactor matrix. Finally, we get the general inverse form of the matrix using the adjoin method. Applications are also given in the form of sample questions.

Keywords: *adjoin method. determinant, exponential Matrix, cofactor expansion, cofactor Matrix, inverse Matrix, skew-symmetric matrix.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Alhamdulillahirabbil'alamiin segala puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah *Subhannahu Wata'ala* yang telah memberikan rahmat dan kemudahan sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul **"Invers Matriks *Skew-symmetric* Bentuk Khusus Ordo 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Adjoin"**. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad *Shallallahu 'Alaihi Wasallam* beserta keluarganya, para sahabat dan pengikutnya. Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana sains di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini, penulis banyak mendapat bimbingan, motivasi, semangat, nasihat dan masukan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan hati yang tulus penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc, selaku pembimbing yang selalu ada dan memberikan petunjuk serta arahan kepada penulis sehingga Tugas Akhir ini dapat diselesaikan.

6. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si. dan Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat. selaku penguji yang banyak memberikan masukan dan saran dalam penulisan Tugas Akhir ini.
7. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc. selaku Pembimbing Akademik yang memberi arahan dan nasihat kepada penulis dari awal perkuliahan.
8. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
9. Kedua orang tua tersayang Ayahanda Surianto dan Ibunda Istimah Anjariatun yang memberikan bantuan material dan do'a, semangat, motivasi dan nasihat.
10. Kakak dan adik tersayang, Gustiana, Fendi Ismawanto, Dewi Susmita Sari dan Gigih Setyaji, Reza Abdullah, Ravi Ramadhani dan Novita yang selalu memberi semangat dan motivasi.
11. Sahabat seperjuangan dalam masa perkuliahan Windylia Saputri, Putri Utama, Imro'atul Kholifah dan Alvina.
12. Teman-teman seangkatan tahun 2019 serta kakak-kakak Program Studi Matematika.

Semoga semua kebaikan yang telah diberikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat pahala dari Allah. Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan Tugas Akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun. Akhir kata penulis ucapkan terimakasih, semoga dengan adanya Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua, aamiin.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 13 Juni 2023

FITRI WAFIQ AZIZAH
11950420069

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam matematika, aljabar linier merupakan salah satu bidang yang mempelajari sistem persamaan linier dan solusinya. Matriks dan operasinya merupakan hal yang berkaitan erat dengan bidang aljabar linier sebagai salah satu cara dalam menyelesaikan sistem persamaan linier [1]. Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini, matriks dapat digunakan dalam kehidupan sehari-hari seperti dalam bidang pertanian, teknologi, industri dan lain sebagainya [2].

Matriks adalah suatu bilangan-bilangan yang disusun dengan teratur berdasarkan baris dan kolom sehinga berbentuk persegi panjang atau bujur sangkar [3]. Ada berbagai macam jenis matriks, salah satunya yaitu matriks antisimetris atau *skew-symmetric*. Berdasarkan [4], matriks *skew-symmetric* adalah matriks bujur sangkar yang memenuhi:

$$A^T = -A \tag{1.1}$$

dan diagonal utama matriks antisimetris adalah nol.

Beberapa operasi matriks yang dapat dilakukan salah satunya yaitu invers matriks. Sebuah matriks memiliki invers jika determinan matriks tidak nol [5]. Terdapat banyak metode yang digunakan untuk menentukan invers matriks, diantaranya eliminasi Gauss-Jordan, Partisi Matriks, dan adjoin [6].

Pembahasan mengenai invers matriks menggunakan metode adjoin telah banyak diteliti pada peneliti sebelumnya. Pada tahun 2020, dilakukan penelitian oleh [7] membahas tentang bentuk umum invers matriks Hankel menggunakan adjoin. Dalam penelitiannya peneliti menggunakan matriks bentuk khusus sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall a \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

dan diperoleh hasil sebagai berikut:

1. Bentuk umum perpangkatan matriks berordo 3×3 adalah

$$A_3{}^n = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\right)a^n & 0 & a\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\right)a^n \\ 0 & a^n & 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\right)a^n & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\right)a^n \end{bmatrix}$$

2. Bentuk umum determinan matriks $A_3{}^n$ yaitu:

$$|A_3{}^n| = (-1)^n a^{3n}, n \geq 1$$

3. Bentuk umum matriks kofaktor dari Persamaan (1.2) adalah

$$C_3{}^n = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\right)a^{2n} & 0 & a\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\right)a^{2n} \\ 0 & (-1)^n a^{2n} & 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\right)a^{2n} & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\right)a^{2n} \end{bmatrix}$$

4. Bentuk umum invers matriks $A_3{}^n$ adalah

$$(A_3{}^n)^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^n\left(\frac{\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)}{a^n}\right) & 0 & (-1)^n\left(\frac{\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)}{a^n}\right) \\ 0 & \frac{1}{a^n} & 0 \\ (-1)^n\left(\frac{\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)}{a^n}\right) & 0 & (-1)^n\left(\frac{\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}{a^n}\right) \end{bmatrix}$$

Pada tahun 2020 [8] melakukan penelitian membahas tentang invers matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan adjoin. Matriks bentuk khusus yang digunakan penulis yaitu:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & a & a \end{bmatrix}, \text{dengan } a \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

dan hasil yang diperoleh yaitu:

1. Bentuk umum dari Persamaan (1.3) berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

$$A_4{}^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} a^n & \frac{n-1}{2}a^n & \frac{n+1}{2}a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n+1}{2}a^n & \frac{n-1}{2}a^n & a^n \end{bmatrix}, n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^n & \frac{n}{2}a^n & \frac{n}{2}a^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & \frac{n}{2}a^n & \frac{n}{2}a^n & a^n \end{bmatrix}, n \text{ genap} \end{cases}$$

2. Bentuk umum determinan matriks $A_4{}^n$ sebagai berikut:

$$|A_4{}^n| = \begin{cases} -a^{4n}, n \text{ ganjil} \\ a^{4n}, n \text{ genap} \end{cases}$$

3. Bentuk umum matriks kofaktor dari Persamaan (1.3) adalah:

$$C_4{}^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} -a^{3n} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n+1}{2}a^{3n} & 0 & -a^{3n} & \frac{n-1}{2}a^{3n} \\ \frac{n-1}{2}a^{3n} & -a^{3n} & 0 & \frac{n+1}{2}a^{3n} \\ 0 & 0 & 0 & -a^{3n} \end{bmatrix}, n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^{3n} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n}{2}a^{3n} & a^{3n} & 0 & -\frac{n}{2}a^{3n} \\ -\frac{n}{2}a^{3n} & 0 & a^{3n} & -\frac{n}{2}a^{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a^{3n} \end{bmatrix}, n \text{ genap} \end{cases}$$

4. Bentuk umum invers matriks $A_4{}^n$ adalah

$$(A_4{}^n)^{-1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & -\left(\frac{n-1}{2a^n}\right) & -\left(\frac{n+1}{2a^n}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{n-1}{2a^n}\right) & -\left(\frac{n+1}{2a^n}\right) & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}, n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & -\left(\frac{n}{2a^n}\right) & -\left(\frac{n}{2a^n}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{n}{2a^n}\right) & -\left(\frac{n}{2a^n}\right) & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}, n \text{ genap} \end{cases}$$

Kemudian ditahun 2022 penelitian yang dilakukan oleh [9] membahas tentang invers matriks RSLFL*circfr* bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan adjoin. Matriks bentuk khusus yang digunakan peneliti sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \end{bmatrix} \text{dengan } b \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

dan diperoleh hasil sebagai berikut:

1. Bentuk umum dari matriks A_3 berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

$${A_3}^n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b^n} & 0 \\ \frac{1}{b^n} & 0 & 0 \\ -\frac{(n-1)}{2b^n} & \frac{n+1}{2b^n} & -\frac{1}{b^n} \end{bmatrix}, n \text{ ganjil dan}$$

$${A_3}^n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b^n} & 0 \\ \frac{1}{b^n} & 0 & 0 \\ \frac{n}{2b^n} & -\frac{n}{2b^n} & \frac{1}{b^n} \end{bmatrix}, n \text{ genap.}$$

2. Bentuk umum determinan matriks ${A_3}^n$ yaitu:

$|{A_3}^n| = \frac{1}{b^{3n}}$, untuk $n \in Z^+$.

3. Bentuk umum invers matriks ${A_3}^n$ adalah

$$({A_3}^n)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & b^n & 0 \\ b^n & 0 & 0 \\ \frac{(n+1)b^n}{2} & \frac{(n-1)b^n}{2} & -b^n \end{bmatrix}, n \text{ ganjil dan}$$

$$({A_3}^n)^{-1} = \begin{bmatrix} b^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ -\frac{nb^n}{2} & \frac{nb^n}{b^n} & b^n \end{bmatrix}, n \text{ genap.}$$

Kemudian ditahun yang sama, [10] melakukan penelitian tentang bentuk umum invers dari matriks Toeplitz bentuk khusus menggunakan metode adjoin. Peneliti menggunakan bentuk khusus matriks Toeplitz berordo 4×4 sebagai berikut:

$$T_4 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \forall a, b \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

Berdasarkan penelitian diperoleh hasil sebagai berikut:

1. Bentuk umum perpangkatan dari Persamaan (1.5) yaitu:

$$T_4{}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

2. Bentuk umum determinan matriks T_4 adalah

$$|T_4{}^n| = a^{4n}$$

3. Bentuk umum matriks kofaktor dari Persamaan (1.5) sebagai berikut:

$$C_4{}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ -na^{3n-1}b & a^n & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)a^{3n-2}b^2 & -na^{3n-1}b & a^n & 0 \\ \left(\frac{1}{6}(n+1)(n+2)n\right)a^{3n-3}b^3 & \left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)a^{3n-2}b^2 & -na^{3n-1}b & a^n \end{bmatrix}$$

4. Bentuk umum invers matriks $T_4{}^n$ adalah

$$(T_4{}^n)^{-1} = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

Berdasarkan penjelasan di atas, penulis tertarik melakukan penelitian tentang invers dari matriks *skew-symmetric* bentuk khusus berordo 4×4 menggunakan metode adjoin dengan judul **"Invers Matriks *Skew-symmetric* Bentuk Khusus Ordo 4×4 Berpangkat Bulat Positif Menggunakan Adjoin"**. Dengan bentuk khusus sebagai berikut:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & -a \\ a & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & -a \\ a & 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \forall a \in \mathbb{R} \text{ dan } a \neq 0 \qquad (1.6)$$

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan penjelasan latar belakang, maka rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana bentuk umum invers matriks *skew-symmetric* bentuk khusus dari Persamaan (1.6) dengan metode adjoin.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam tugas akhir ini yaitu matriks yang digunakan adalah matriks *skew-symmetric* bentuk khusus dari Persamaan (1.6) berordo 4×4.

1.4 Tujuan Masalah

Tujuan penelitian tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum dari invers matriks *skew-symmetric* bentuk khusus dari Persamaan (1.6) menggunakan metode adjoin.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dilakukan penelitian Tugas Akhir ini yaitu sebagai berikut:

1. Menambah wawasan dan pemahaman penulis terhadap matriks dan invers matriks.
2. Dapat dijadikan referensi atau sumber informasi untuk pemecahan masalah yang berkaitan dengan persoalan mencari invers matriks *skew-symmetric*.

1.6 Sistematika Penelitian

Sistematika penulisan laporan Tugas Akhir ini terdiri dari pokok-pokok permasalahan yang diuraikan menjadi beberapa bagian yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan menguraikan tentang latar belakang Invers Matriks *Skew-symmetric* Bentuk Khusus Ordo 4×4 Berpangkat Bulat Positif Menggunakan Adjoin.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang teori pendukung yang berkaitan dengan matriks, operasi matriks, determinan, invers dan induksi matematika.

BAB III METODE PENELITIAN

Metode Penelitian berisi tahapan-tahapan yang dilakukan penulis untuk penyelesaian bentuk umum invers dari matriks *skew-symmetric* bentuk khusus ordo 4×4 menggunakan metode adjoin.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi penjelasan dan penjabaran dalam penyelesaian bentuk umum invers dari matriks *skew-symmetric* bentuk khusus ordo 4×4 menggunakan metode adjoin.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari apa yang telah dibahas dalam bab pembahasan.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas beberapa teori dan defenisi yang berkaitan dengan matriks, perpangkatan matriks, determinan matriks, invers matriks dan induksi matematika.

2.1 Matriks

Definisi 2.1 [11] Matriks adalah susunan elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom. Suatu matriks terdiri dari m baris dan n kolom maka matriks tersebut berordo atau beukuran $m \times n$. Elemen matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j disebut entri a_{ij}. Lambang matriks biasanya menggunakan huruf besar seperti A, B, C, D dan seterusnya, sedangkan matriks beserta ordonya ditulis $A_{m\times n}$. Bentuk umum dari matriks adalah:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Definisi 2.2 [11] Suatu matriks A dengan jumlah baris n dan jumlah kolom n disebut matriks bujur sangkar ordo n dan entri-entri $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ pada Persamaan (2.2) merupakan diagonal utama matriks A.

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Definisi 2.3 [12] Sebuah matriks A bujur sangkar dikatakan antisimetris atau *skew-symmetric* jika $a_{ij} = -a_{ji}$ untuk i dan j. Matriks A juga dikatakan antisimetris jika $A^T = -A$. Elemen diagonal dari matriks antisimetris adalah 0 ($a_{ii} = 0$).

Contoh 2.1 Diberikan matriks antisimetris berordo 4×4 sebagai berikut:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4 [13] Matriks *transpose* adalah matriks yang diperoleh dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom. Misalkan $A = [a_{ij}]$ berukuran $m \times n$, maka *transpose* dari matriks A dinotasikan A^T, adalah matriks $n \times m$ yang dalam hal ini jika $A^T = [b_{ij}]$, maka $b_{ij} = a_{ji}$ untuk $i = 1,2, \dots, n$ dan $j = 1,2, \dots, n$.

Contoh 2.2

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$, maka $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2.2 Perkalian Matriks

Definisi 2.5 [14] Perkalian matriks dapat dilakukan pada dua matriks (A dan B) jika banyaknya kolom matriks $A =$ banyaknya baris matriks B.

Aturan perkalian:

Misalkan $A_{m \times n}$ dan $B_{n \times k}$ maka $A_{m \times n} \cdot B_{n \times k} = C_{m \times k}$ dimana elemen-elemen dari c_{ij} merupakan penjumlahan dari perkalian elemen-elemen A baris i dengan elemen-elemen B kolom j.

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} k & n \\ l & o \\ m & p \end{bmatrix}$, maka

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 2} = C_{2\times 2} = \begin{bmatrix} ak + bl + cm & an + bo + cp \\ dk + el + fm & dn + eo + fm \end{bmatrix}$$

Contoh 2.3 Tentukan AB dari matriks-matriks berikut:

$A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 & 5 \\ 6 & 0 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, $B_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 8 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 & 5 \\ 6 & 0 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 8 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 98 & 57 & 38 \\ 80 & 57 & 36 \\ 64 & 61 & 20 \\ 76 & 46 & 25 \end{bmatrix}$$

2.3 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.6 [15] Jika A merupakan matriks bujur sangkar, maka pangkat bilangan bulat positif yaitu:

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n\,faktor} \ (n > 0)$$

Jika A dibalik, maka didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif yaiu:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \qquad A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n\,faktor}$$

Contoh 2.4 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ tentukan A^2 dan A^3!

Penyelesaian:

$A^2 = A \cdot A$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 32 & 17 & 10 & 22 \\ 17 & 15 & 6 & 9 \\ 56 & 37 & 21 & 5 \\ 19 & 19 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$A^3 = A \cdot A \cdot A$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 32 & 17 & 10 & 22 \\ 17 & 15 & 6 & 9 \\ 56 & 37 & 21 & 5 \\ 19 & 19 & 8 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 263 & 187 & 94 & 160 \\ 151 & 104 & 52 & 95 \\ 489 & 338 & 175 & 305 \\ 183 & 121 & 62 & 117 \end{bmatrix}.$$

2.4 Determinan Matriks

Untuk menghitung determinan matriks terdapat beberapa metode diantaranya sarrus, reduksi baris dan ekspansi kofaktor.

Definisi 2.7 [15] Suatu matriks bujur sangkar A dikatakan *non-singular* (*invertible*) apabila $\det(A) \neq 0$, jika $\det(A) = 0$ maka A disebut matriks *singular*.

Penentuan determinan matriks menggunakan metode ekspansi kofaktor dan matriks segitiga, dijelaskan pada teorema berikut:

Teorema 2.1 [11] Determinan dari matriks A berordo $n \times n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasilkali-hasilkali yang diperoleh, dimana untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$.

$$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

dan

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{2i} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i)

Teorema 2.2 [11] Jika A adalah matriks segitiga berordo $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka $det(A)$ adalah hasilkali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut, yaitu:

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$$

Contoh 2.5 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ -4 & 7 & 1 & 6 \\ -1 & 9 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Hitunglah det (A) menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ketiga!

Penyelesaian:

Kofaktor sepanjang kolom ketiga yaitu:

$$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 7 & 6 \\ -1 & 9 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -100$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 9 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -132$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 6 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 124$$

$$C_{43} = (-1)^{4+3}M_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 6 \\ -1 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 104$$

Sehingga dapat dihitung determinan matriks A yaitu:

$$\begin{aligned} det(A) &= 0(-100) + 1(-132) + 0(124) + 4(104) \\ &= 284 \end{aligned}$$

2.5 Matriks Kofaktor

Definisi 2.8 [12] Jika A merupakan matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinotasikan M_{ij}. Minor adalah determinan dari submatriks A yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinotasikan dengan C_{ij} dan dikatakan sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Contoh 2.6 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ -4 & 7 & 1 & 6 \\ -1 & 9 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ tentukan M_{11} dan C_{11}!

Penyelesaian:

Minor dari a_{11} yaitu:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= ([7(0)5 + 1(3)2 + 6(9)4] - [6(0)2 + 7(3)4 + 1(9)5]\,) \\ &= (222 - 129) \\ &= 93 \end{aligned}$$

Dan kofaktor dari a_{11} yaitu:

$$C_{11} = (-1)^{i+j}M_{11} = (-1)^{1+1}(93) = 93$$

Definisi 2.9 [11] Jika A merupakan matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinotasikan sebagai $adj(A)$.

Contoh 2.7 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ -4 & 7 & 1 & 6 \\ -1 & 9 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Tentukan matriks kofaktornya!

Penyelesaian:

Entri kofaktor baris pertama:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 93$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -26$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 7 & 6 \\ -1 & 9 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -100$$

$$C_{14} = (-1)^{1+4}M_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -4 & 7 & 1 \\ -1 & 9 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 109$$

Entri kofaktor baris kedua:

$$C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 12$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -40$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 9 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -132$$

$$C_{24} = (-1)^{2+4}M_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 9 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 124$$

Entri kofaktor baris ketiga

$$C_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -50$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 72$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 6 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 124$$

$$C_{34} = (-1)^{3+4}M_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -138$$

Entri kofaktor baris keempat

$$C_{41} = (-1)^{4+1}M_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{42} = (-1)^{4+2}M_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

$$C_{43} = (-1)^{4+3}M_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 6 \\ -1 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 104$$

$$C_{44} = (-1)^{4+4}M_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \\ -1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -31$$

Maka matriks kofaktornya yaitu:

$$C = \begin{bmatrix} 93 & -26 & -100 & 109 \\ 12 & 40 & -132 & 124 \\ -50 & 72 & 124 & -138 \\ -3 & 10 & 104 & -31 \end{bmatrix}.$$

2.6 Invers Matriks

Definisi 2.10 [12] Jika A merupakan matriks bujur sangkar, dan jika matriks B berukuran sama sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut matriks yang dapat dibalik (*non-singlar*) dan B disebut invers dari A. Jika matriks B tidak ada, maka A disebut matriks *singular*. Invers matriks dapat ditentukan dengan banyak metode salah satunya yaitu metode adjoin.

Teorema 2.3 Jika A adalah matriks bujur sangkar yang memiliki invers, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Contoh 2.8 Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ -4 & 7 & 1 & 6 \\ -1 & 9 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ menggunakan metode adjoin!

Penyelesaian:

Pada penyelesaian Contoh 2.6 didapat determinan matriks A yaitu:

$$|A| = 284$$

dan pada Contoh 2.6 didapat matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} 93 & 26 & -100 & 109 \\ 12 & 40 & -132 & 124 \\ -50 & 72 & 124 & -138 \\ -3 & 10 & 104 & -31 \end{bmatrix}$$

Sehingga adjoin matriks A yaitu:

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 93 & 12 & -50 & -3 \\ -26 & 40 & 72 & 10 \\ -100 & -132 & 124 & 104 \\ 109 & 124 & -138 & -31 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh invers matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{284} \begin{bmatrix} 93 & 12 & -50 & -3 \\ 26 & 40 & 72 & 10 \\ -100 & -132 & 124 & 104 \\ 109 & 124 & -138 & -31 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{93}{284} & \frac{3}{71} & -\frac{25}{142} & -\frac{3}{284} \\ -\frac{13}{142} & -\frac{10}{71} & \frac{18}{71} & \frac{5}{142} \\ -\frac{25}{71} & -\frac{33}{71} & \frac{31}{71} & \frac{26}{71} \\ \frac{109}{284} & \frac{31}{71} & -\frac{69}{142} & -\frac{31}{284} \end{bmatrix}.$$

2.7 Induksi Matematika

Definisi 2.11 [13] Misalkan $p(n)$ adalah suatu proposisi bilangan bulat positif yang akan dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Langkah-langkah pembuktian induksi matematika sebagai berikut:

1. $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$juga benar untuk setiap $n \geq 1$. Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan basis induksi, dan langkah 2 disebut langkah induksi. Langkah induksi berisi asumsi yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Jika langkah 1 dan langkah 2 dibuktikan benar, maka disimpulkan $p(n)$ terbukti benar semua bilangan bulat positif n.

Contoh 2.8 [10] Diberikan $T_4 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}$ maka

$$T_4{}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

akan buktikan menggunakan induksi matematika.

Pembuktian:

1. Basis induksi, akan dibuktikan $p(1)$ benar:

$$T_4{}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} a^1 & 1a^{1-1}b & \left(\frac{1}{2}(1-1)1\right)a^{1-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(1-1)(1-2)1\right)a^{1-3}b^3 \\ 0 & a^1 & 1a^{1-1}b & \left(\frac{1}{2}(1-1)1\right)a^{1-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^1 & 1a^{1-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa $T_4 = p(1)$ maka $p(1)$ benar.

2. Langkah induksi

Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$T_4{}^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b & \left(\frac{1}{2}(k-1)k\right)a^{k-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(k-1)(k-2)k\right)a^{k-3}b^3 \\ 0 & a^n & ka^{k-1}b & \left(\frac{1}{2}(k-1)k\right)a^{k-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}$$

Maka akan ditunjukkan $p(k+1)$ juga benar yaitu:

$$T_4{}^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{(k+1)-1}b & \left(\frac{1}{2}((k+1)-1)k+1\right)a^{(k+1)-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}((k+1)-1)((k+1)-2)k+1\right)a^{(k+1)-3}b^3 \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{(k+1)-1}b & \left(\frac{1}{2}((k+1)-1)k+1\right)a^{(k+1)-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{(k+1)-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$T_4{}^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & \left(\frac{1}{2}(k+1)k\right)a^{k-1}b^2 & \left(\frac{1}{6}(k+1)(k-1)k\right)a^{k-2}b^3 \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b & \left(\frac{1}{2}(k+1)k\right)a^{k-1}b^2 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Pembuktian:

$$T_4{}^{k+1} = T_4{}^k T_4$$

$$
= \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b & \left(\frac{1}{2}(k-1)k\right)a^{k-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(k-1)(k-2)k\right)a^{k-3}b^3 \\ 0 & a^n & ka^{k-1}b & \left(\frac{1}{2}(k-1)k\right)a^{k-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & \left(\frac{1}{2}(k+1)k\right)a^{k-1}b^2 & \left(\frac{1}{6}(k+1)(k-1)k\right)a^{k-2}b^3 \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b & \left(\frac{1}{2}(k+1)k\right)a^{k-1}b^2 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}.
$$

BAB III
METODE PENELITIAN

Metode penelitian merupakan langkah-langkah penelitian yang dilakukan penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini dengan menentukan bentuk umum invers matriks *skew-symmetric* bentuk khusus berordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan adjoin. Berikut adalah langkah-langkah yang digunakan:

1. Diberikan matriks *skew-symmetric* bentuk khusus berordo 4×4 pada Persamaan (1.6).
2. Menentukan perpangkatan matriks ${A_4}^2$ sampai ${A_4}^{10}$.
3. Menduga bentuk umum matriks ${A_4}^n$ dengan n bilangan bulat positif.
4. Membuktikan bentuk umum dari matriks ${A_4}^n$ dengan menggunakan induksi matematika.
5. Mendapatkan bentuk umum $|{A_4}^n|$ dengan n bilangan bulat positif menggunakan ekspansi kofaktor.
6. Mendapatkan bentuk umum matriks kofaktor dari matriks ${A_4}^n$.
7. Mendapatkan bentuk umum invers matriks ${A_4}^n$ berordo 4×4 menggunakan metode adjoin.
8. Mengaplikasikan bentuk umum perpangkatan, determinan dan invers dari matriks ${A_4}^n$ dalam contoh soal.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya dapat diperoleh beberapa kesimpulan. Sebagai berikut:

1. Bentuk umum perpangkatan suatu matriks *skew-symmetric* pada Persamaan (1.6) adalah sebagai berikut:

$$A_4{}^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -(-2)^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & -(-2)^{\frac{n-1}{2}}a^n \\ (-2)^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & -(-2)^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \\ 0 & (-2)^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & -(-2)^{\frac{n-1}{2}}a^n \\ (-2)^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & (-2)^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \end{bmatrix}, n\ ganjil \\ \begin{bmatrix} (-2)^{\frac{n}{2}}a^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{\frac{n}{2}}a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{\frac{n}{2}}a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^{\frac{n}{2}}a^n \end{bmatrix}, n\ genap \end{cases}.$$

2. Bentuk umum matriks determinan suatu matriks *skew-symmetric* pada Persamaan (1.6), adalah sebagai berikut:

$$|A_4{}^n| = 2^{2n}a^{4n}.$$

3. Bentuk umum matriks kofaktor suatu matriks *skew-symmetric* pada Persamaan (1.6), adalah sebagai berikut:

$$C_4{}^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -2\left((-2)^{\frac{3n-3}{2}}a^{3n}\right) & 0 & -2\left((-2)^{\frac{3n-3}{2}}a^{3n}\right) \\ 2\left((-2)^{\frac{3n-3}{2}}a^{3n}\right) & 0 & -2\left((-2)^{\frac{3n-3}{2}}a^{3n}\right) & 0 \\ 0 & 2\left((-2)^{\frac{3n-3}{2}}a^{3n}\right) & 0 & -2\left((-2)^{\frac{3n-3}{2}}a^{3n}\right) \\ 2\left((-2)^{\frac{3n-3}{2}}a^{3n}\right) & 0 & 2\left((-2)^{\frac{3n-3}{2}}a^{3n}\right) & 0 \end{bmatrix}, n\ ganjil \\ \begin{bmatrix} (-2)^{\frac{3n}{2}}a^{3n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{\frac{3n}{2}}a^{3n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{\frac{3n}{2}}a^{3n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^{\frac{3n}{2}}a^{3n} \end{bmatrix}, n\ genap \end{cases}.$$

4. Bentuk umum invers matriks suatu matriks *skew-symmetric* bentuk khusus pada Persamaan (1.6), adalah sebagai berikut:

$$({A_4}^n)^{-1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{(-2)^{\frac{n+1}{2}} a^n} & 0 & -\frac{1}{(-2)^{\frac{n+1}{2}} a^n} \\ \frac{1}{(-2)^{\frac{n+1}{2}} a^n} & 0 & -\frac{1}{(-2)^{\frac{n+1}{2}} a^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(-2)^{\frac{n+1}{2}} a^n} & 0 & -\frac{1}{(-2)^{\frac{n+1}{2}} a^n} \\ \frac{1}{(-2)^{\frac{n+1}{2}} a^n} & 0 & \frac{1}{(-2)^{\frac{n+1}{2}} a^n} & 0 \end{bmatrix}, n \ ganjil \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{(-2)^{\frac{n}{2}} a^n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(-2)^{\frac{n}{2}} a^n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(-2)^{\frac{n}{2}} a^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(-2)^{\frac{n}{2}} a^n} \end{bmatrix}, n \ genap \end{cases}.$$

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini penulis membahas invers matriks *skew-symmetric* bentuk khusus ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan adjoin dengan entri bilangan real. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini, disarankan untuk dapat membahas invers matriks *skew-symmetric* bentuk khusus dengan ordo yang lebih besar.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Azizah, Thresye dan Nurul Huda. (2018). *Invers dari Matriks Sirkulan Simetris atau Skew Field. Jurnal Matematika Murni dan Terapan, 12(1),* 31-42.

[2] Karnain. M. Eka Putra, dan Fitri Aryani. (2017). *Invers Matriks Positif Menggunakan Metode Adjoin. Jurnal Sains Matematika dan Statistika, 3(1),* 45-52.

[3] Tenaya. I Gusti Ngurah Putu, (2016). *Diktat Aljabar Linier*. Bukit Jimbaran: Universitas Udayana.

[4] Ralph John De La Cruz and Agnes T.Paras. (2022). *Sums of Orthogonal, Symmetric, and Skew-symmetric Matrices. Electronic Journal of Linear Algebra,38,*655-660.

[5] Aryani. Fitri, Rysfan , Corry Corazon Marzuki dan Sri Basriati. (2018). *Determinan Matriks FLDcircr Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor. Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri,* 682-688.

[6] Marzuki. Cory Corazon, dan Aryani, Fitri. (2019). *Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin. Jurnal Sains Matematika dan Statistika, 5,* 58-67.

[7] Aqilah, Z. (2020). *Invers Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif*. (Skripsi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau).

[8] Erizona, E. (2020). *Invers Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo 4x4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Adjoin.* (Skripsi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau).

[9] Wulanda, V. (2022). *Invers Matriks RSLPFLcircfr Bentuk Khusus Ordo 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif*. (Skripsi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau).

[10] Jauza, Siti Mardiyah. (2022). *Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus ordo 4x4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Adjoin*. (Skripsi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau).

[11] Anton, Howard dan Chris Rorres. (2004). *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.

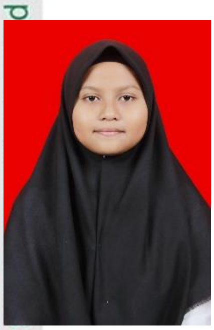
[12] Syarifuddin, Mikrayanti dan Muslim. (2006). *Aljabar Linier*, Bima.

[13] Munir, Rinaldi. (2010). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

[14] Y. Sibaroni. (2002). *Buku Ajar Aljabar Linier*.

[15] Ron Larson and David C. Falvo. (2009). *Elementary Linier Algebra*. New York: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan pada tanggal 8 Desember 2001 di Pekanbaru, Riau. Anak keempat dari lima bersaudara pasangan Bapak Surianto dan Ibu Istimah Anjariatun. Penulis menyelesaikan pendidikan formal di Sekolah Dasar Negeri 003 Binabaru pada tahun 2013. Pada tahun 2016 penulis menyelesaikan pendidikan di Sekolah Menengah Pertama Negeri 1 Kampar Kiri Tengah. Pada tahun 2019 penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Kampar Kiri Tengah. Pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika.

Pada bulan Januari 2022 penulis melaksanakan Kerja Praktek di DInas Komunikasi, Informatika dan Statistik Provinsi Riau dan membuat laporan kerja praktek dengan judul **"Analisis Pengaruh Sumber Daya Alam, Sumber Daya Manusia dan Ekspor Terhadap Pendapatan di Provinsi Riau Tahun 2009-2021"** yang dibimbing oleh Ibu Rahmadeni, M.Si. Pada bulan Juli-Agustus 2022, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Ngaso, Kecamatan Ujung Batu, Kabupaten Rokan Hulu. Pada Tahun 2023 tanggal 13 Juni penulis dinyatakan lulus dengan skripsi berjudul **"Invers Matriks *Skew-symmetric* Bentuk Khusus Ordo 4×4 Berpangakt Bilangan Bulat Positif Menggunakan Metode Adjoin"** yang dibimbing oleh Ibu Fitri Aryani, M.Sc.