KENDALI OPTIMAL UNTUK MODEL PERSEDIAN BARANG DENGAN *BACKLOGGING*

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

FEBRY NURSAKINAH
11850425224

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2023

LEMBAR PERSETUJUAN

KENDALI OPTIMAL UNTUK PERSEDIAAN BARANG DENGAN *BACKLOGGING*

TUGAS AKHIR

oleh:

FEBRY NURSAKINAH
11850425224

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 27 Juni 2023

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Nilwan Andiraja, S.Pd., M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	**NIP. 19840803 201101 1 005**

LEMBAR PENGESAHAN

KENDALI OPTIMAL UNTUK PERSEDIAAN BARANG DENGAN *BACKLOGGING*

TUGAS AKHIR

oleh:

FEBRY NURSAKINAH
11850425224

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 27 Juni 2023

Pekanbaru, 27 Juni 2023
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua : **Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**

Sekretaris : **Nilwan Andiraja, S.Pd., M.Sc.**

Anggota I : **Wartono, M.Sc.**

Anggota II : **Mohammad Soleh, M.Sc.**

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan dibawah ini:

Nama	: Ferby Nursakinah
NIM	: 11850425224
Tempat/Tgl. Lahir	: Pekanbaru/10 Februari 2000
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Tugas Akhir	: Kendali Optimal untuk Model Persediaan Barang dengan *Backlogging.*

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa:

1. Penulisan Skripsi ini dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu Skripsi saya ini, saya menyatakan bebas plagiat.
4. Apabila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan Skripsi saya tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan perundang-undangan.

Demikianlah Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 27 Juni 2023
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL 10000

Febry Nursakinah
NIM.11850425224

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperbolehkan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya bisa dilakukan atas izin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah yaitu menyebutkan sumbernya.

Penambahan atau penerbitan sebagian atau seluruh tugas akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan tugas akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal peminjaman.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tugas akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 27 Juni 2023
Yang membuat pernyataan,

FEBRY NURSAKINAH
11850425224

LEMBAR PERSEMBAHAN

Bismillahirrohmanirrohim

Setiap perjalanan dalam kehidupan bagaikan serpihan-serpihan yang digabungmenjadi satu. Salah satu serpihan yang telah diambil lalu dirangkai, entah itu takdir atau pilihan yang telah dijalankan harus diselesaikan. Penyelesaian bisa berbentuk baik atau buruk, apapun yang dialami yakinlah bahwa perjalanan itu akan selesai pada waktunya. Setiap perjalanan yang dilalui oleh setiap orang pasti berbeda-beda. Namun tanpa kehendak Allah SWT diri ini bukanlah apa-apa. Seringkali diri ini terlalu sombong menganggap segala hasil pencapaian berkat kerja keras diri sendiri. Padahal jika dicabut salah satu nikmat yang diberikan-Nya diri ini bukanlah apa-apa.

Sebuah karya kecilku ini ku persembahkan untuk

•• Orang Tua Tercinta••

Terima kasih ayah, telah berjuang dan mendoakan kakak hingga kakak bisa menggapai gelar sarjana. Terima kasih untuk Almh ibu yang telah membesarkan dan mendidik kakak hingga menjadi pribadi yang bertanggung jawab, serta membentuk kakak menjadi sosok manusia yang tidak mudah menyerah, maafkan kakak yang terlambat dalam menyelesaikan perkuliahan hingga ibu tidak sempat melihat kakak berdiri dipanggung kesuksesan dalam menggapai gelar yang mana ini juga menjadi mimpi ibu.

•• Keluarga Tersayang••

Teruntuk adik-adik ku (Fathul Karim dan Fuad Ghani) terima kasih telah menjadi salah satu alasan kakak untuk menyelesaikan perkuliahan ini. Dan teruntuk Keluarga besar ibu serta ayah, terima kasih atas semangat dan dukungan yang diberikan.

•• Dosen Pembimbing Tugas Akhir••

Terima kasih kepada Bapak Nilwan yang telah bersedia meluangkan waktunya serta membimbing saya dalam mengerjakan Tugas Akhir ini.

•• Diri Sendiri dan Sahabat Tersayang••

Teruntuk diriku terima kasih telah berjuang dan bertahan dalam menyelesaikan tahap akhir perkuliahan ini meski diguncang dengan kebimbangan dan kekhawatiran. Kepada nona dengan NIM (1807111748) yang terus mendorongku untuk menyelesaikan perkuliahan serta menjadi tempat pulang yang hangat, ku ucapkan terima kasih.

Alhamdulillahirobbil' alamin

-FEBRY NURSAKINAH-

KENDALI OPTIMAL UNTUK PERSEDIAAN BARANG DENGAN *BACKLOGGING*

FEBRY NURSAKINAH
NIM : 11850425224

Tanggal sidang : 27 Juni 2023
Tanggal wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Backlogging adalah peristiwa terjadinya kekosongan persediaan barang sehingga sebagian tingkat permintaan ditampung sampai persediaan barang tersedia kembali. Dalam dunia usaha, peristiwa *backlogging* akan terjadi ketika suatu perusahaan tidak mampu mengendalikan persediaan barang dengan optimal. Penelitian ini membahas tentang bagaimana penentuan kendali optimal model persediaan barang dengan *backlogging.* Untuk mendapatkan kendali optimal pada permasalahan di atas, penulis menggunakan persamaan diferensial pada model persediaan barang dengan *backlogging* dan fungsi tujuan dibentuk persamaan *Hamilton* dan *Lagrange.* Persamaan tersebut di diferensialkan dan dibentuk persamaan diferensial biasa orde dua nonhomogen sehingga mendapatkan solusi persamaan tingkat persediaan. Menurut persamaan tingkat persediaan yang diperoleh, digunakan untuk simulasi dengan beberapa nilai parameter guna melihat tingkat kestabilan persediaan setelah diberi kendali. Adapun hasil yang diperoleh dari simulasi tersebut adalah tigkat persediaan mengalami penurunan hingga $t \to 4$ tetapi kembali mengingkat saat $t \to 10$

Kata Kunci: Kendali optimal, Persamaan diferensial, *backlogging*, persediaan, produksi, menurun, meningkat, kestabilan.

OPTIMAL CONTORL FOR INVENTORY WITH BACKLOGGING

FEBRY NURSAKINAH
NIM : 11850425224

Date of Final Exam: 27 June 2023
Date of Graduation:

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

Backlogging is the occurrence of an inventory vacuum so that part of the demand level is accommodated until supplies are available again. In the business world, backlogging will occur when a company is unable to control inventory optimally. This study discusses how to determine the optimal control of the inventory model with backlogging. To get optimal control on the above problem, the author uses a differential equation in the inventory model with backlogging and destination functions formed by the Hamilton and Legrange equations. The equation is differentiated and formed a nonhomogeneous second-order ordinary differential equation, thus obtaining the solution of the supply level equation. According to the equation, the inventory level obtained is used for simulation with several parameter values to see the level of inventory stability after being given control. The result obtained from the simulation is that the inventory level has decreased until $t \to 4$ *continues to increase again when* $t \to 10$

***Keywords**: Optimal control, differential equation, backlogging, inventory, production, decreases, increases, stability.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakaatuh

Puji syukur Alhamdulillah tercurahkan limpahan karunia Allah Subhanahu Wata'ala atas segala anugerah dan rahmat yang diberikan-Nya. Tidak lupa shalawat serta salam kepada Rasulullah Muhammad Shalallaahu Alaihi Wassalam, sehingga penulis berhasil menyelesaikan tugas akhir sebagai pemenuhan salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan Strata Satu (S1) Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sultan Syarif Kasim Riau dengan judul **"Kendali Optimal Untuk Model Persediaan Barang dengan *Backlogging*"**.

Dalam penyusunan tugas akhir ini, penulis banyak menerima bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya, kepada yang terhormat:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi sekaligus sebagai Penguji I yang telah memberikan kritikan dan saran dalam penulisan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd., M.Sc., selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau sekaligus sebagai Pembimbing yang telah meluangkan waktu kepada penulis, mengarahkan, mendukung dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya dalam penulisan Tugas Akhir ini.
5. Bapak M. Marizal, M.Sc., selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan dukungan serta arahan kepada penulis selama perkuliahan.
6. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc., selaku Ketua Sidang yang telah memberikan kritikan dan saran dalam penulisan Tugas Akhir ini.
7. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc., selaku Penguji II yang telah memberikan kritikan serta saran kepada penulis.

8. Semua Bapak dan Ibu dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan banyak ilmu kepada penulis selama kuliah.
9. Kedua orang tuaku tersayang, ayahanda Parlan Adeka Putra dan Alm ibunda Mardiana, serta adik-adikku Fathul Karim dan Fu’ad Ghani yang senantiasa melimpahkan kasih, sayang, perhatian, motivasi dan doa tulus serta tak lupa materi yang tak terhingga.
10. Keluarga besar dari pihak ayah dan ibu yang selalu memberi semangat, dukungan serta nasihat kepada penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
11. Teman-teman penulis khususnya Asra Rahmi, Siti Nur Hafizah, Salsabillah Putri, Vanissya Oktavia, Indah Putri Wahyuni, Frista Azzahra, Efri Anzani, Farras Alhafiz, Rahmatul Khairani, dan Athirah yang selalu memberi semangat dan motivasi kepada penulis.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak atas kebaikan hatinya, semoga Allah membalas segala kebaikan dengan imbalan yang lebih baik. Besar harapan penulis semoga tugas akhir ini bermanfaat serta dapat menambah pengetahuan keilmuan dan sumbangsih pendapat bagi pihak yang membutuhkan. Akhir kata, penulis menyadari akan kekurangan pada tugas akhir ini, oleh sebab itu di harapkan kritik dan saran yang bersifat membangun dari semua pihak, guna perbaikan di masa mendatang.

Wassalamu’alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Pekanbaru, 27 Juni 2023

FEBRY NURSAKINAH
11850425224

DAFTAR ISI

LEMBAR PERSETUJUAN .... **ii**
LEMBAR PENGESAHAN .... **iii**
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL .... **iv**
LEMBAR PERNYATAAN .... **v**
LEMBAR PERSEMBAHAN .... **vi**
ABSTRAK .... **vii**
ABSTRACT .... **viii**
KATA PENGANTAR .... **ix**
DAFTAR ISI .... **xi**
DAFTAR SIMBOL .... **xiii**
DAFTAR GAMBAR .... **xiv**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Batasan Masalah 3
1.4 Tujuan Penelitian 3
1.5 Manfaat Penelitian 3
1.6 Sistematika Penulisan 3
BAB II LANDASAN TEORI **5**
2.1 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu 5
2.2 Persamaan Diferenasial Biasa Nonhomogen Koefisien Konstanta 6
2.3 Persamaaan Kuadratik 8
2.4 Kestabilan 10
2.5 Teori Kendali Optimal 11
2.6 Kendali Optimal Model Persediaan 12
2.7 Model Persediaan yang Mengalami *Backlogging* 14

BAB III METODE PENELITIAN 17

BAB IV PEMBAHASAN 18

4.1 Kendali Optimal pada Masalah Persediaan Barang dengan *Backlogging* 18

4.2 Simulasi pada contoh 32

BAB V PENUTUP 35

5.1 Kesimpulan 32

5.2 Saran 32

DAFTAR PUSTAKA 34

DAFTAR RIWAYAT 36

DAFTAR SIMBOL

$I(t)$	adalah tingkat fungsi persediaan,
$P(t)$	adalah tingkat fungsi produksi,
$D(t)$	adalah fungsi permintaan,
I_0	adalah tingkat nilai awal persediaan,
$m(t)$	adalah rata-rata fungsi kenaikan,
$\theta(t)$	adalah rata-rata fungsi kemerosotan,
$v(t)$	adalah rata-rata fungsi peningkatan dan penurunan,
$\hat{P}$	adalah tingkat produksi tujuan,
$\hat{I}$	adalah tingkat persediaan tujuan,
h	adalah koefisien biaya penyimpanan,
K	adalah koefisien biaya produksi,
I_P	adalah tingkat persediaan positif pada waktu *t*,
I_N	adalah tingkat persediaan negatif pada waktu *t*,
$D(t)$	adalah fungsi permintaan,
a, b, c	adalah konstanta dengan waktu t,
$(T - t)$	adalah lamanya waktu tunggu untuk pengisian berikutnya,
δ	adalah tingkat *backlogging*,
$\frac{\partial H}{\partial P}$	adalah turunan Persamaan *Hamilton* terhadap *P*,
$\frac{\partial L}{\partial I}$	adalah turunan Persamaan *Lagrange* terhadap *I*,
$\frac{\partial L}{\partial P}$	adalah turunan Persamaan *Lagrange* terhadap *P*.

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Grafik fungsi $ft = e - 5t$ 11
Gambar 2. 2 Model Persediaan dengan Perubahaan Fase 13
Gambar 2.3 Model Persediaan yang Mengalami Backlogging 15
Gambar 4. 1 $I(t)$ untuk $t \to 10$ 31

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dunia usaha saat ini berkembang dengan pesat, sehingga membuat perusahaan terus berinovasi agar mampu bersaing dengan perusahaan lain. Persaingan ini mengharuskan setiap perusahaan untuk dapat mengelola sumber daya yang dimiliki seoptimal mungkin. Pada dasarnya, sumber daya perusahaan adalah proses pengelolaan persediaan barang mentah menjadi barang jadi yang diolah menggunakan mesin produksi [1]. Persedian dengan kuantitas yang maksimum akan menjaga kesanggupan perusahaan dalam melayani setiap permintaan konsumen. Permintaan dipengaruhi oleh beberapa faktor diantaranya, yaitu harga produk lain, tingkat permintaan per kapita, distribusi pendapatan, selera masyarakat, jumlah penduduk, perkiraaan di masa yang akan datang, serta harga dari perusahaan lainnya [2].

Tingkat permintaan akan mempengaruhi persedian barang pada perusahaan. Apabila permintaan menurun, akan menyebabkan persediaan menumpuk dan akan menyebabkan kerugian bagi perusahaan karena harus mengeluarkan biaya lebih untuk perawatan seperti biaya sewa gudang. Tetapi apabila permintaan meningkat, namun persediaan hanya sedikit akan membuat terhambatnya aktivitas produksi sehingga memungkinkan perusahaan mengalami fase *backlogging* yaitu keadaan produk terjual habis dan persediaan kosong [3]. Kekurangan produksi akan menyebabkan permintaan konsumen tidak terpenuhi, dan dapat menyebabkan sebagian konsumen berpindah ke perusahaan lain sehingga berdampak buruk pada citra perusahaan. Oleh sebab itu, perusahaan perlu melakukan pengendalian persediaan agar tidak mengalami permasalahan seperti diatas.

Pengendalian persediaan diperlukan untuk menyusun suatu persedian yang optimal. Salah satu cara yang bisa dilakukan untuk mengatasi masalah persedian yang mengalami peningkatan adalah dengan mengoptimalkan persedian yang ada, dan untuk mengoptimalkan persediaan bisa menggunakan teori kendali optimal.

Teori kendali optimal merupakan salah satu cabang matematika, yang digunakan untuk mencari penyelesaian optimal pada sistem dinamik sehingga memperoleh hasil yang diinginkan. Pada perusahaan yang aktif dalam memproduksi produk, model kendali optimal dapat digunakan untuk menghitung tingkat persediaan yang optimal berdasarkan persamaan diferensial dinamik dan fungsi tujuan. Oleh sebab itu, masalah persediaan dapat digunakan sebagai salah satu model pengendalian yang optimal [4].

Penelitian terdahulu yang membahas tentang penerapan teori kendali optimal pada persediaan yaitu [4] mengatakan model kendali optimal dapat digunakan untuk mengoptimalkan masalah persediaan yang mengalami kasus penurunan yang diakibatkan oleh kerusakan dengan bentuk fungsi permintaan kuadrat yang berubah terhadap waktu. Sedangkan penelitian [5] membahas tentang model matematika terhadap pengendalian persediaan yang mengalami kerusakan dengan tingkat permintaan yang eksponensial dan *backlogging*. Penelitian lainnya yang membahas tentang model kerusakan inventori dan *backlogging* juga dibahas oleh [6].

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk meneliti pada model persediaan yang konstan dan terjadi *backlogging* lalu mengaplikasikan kedalam kendali optimal sesuai dengan penelitian [4]. Sehingga penulis mengangkat penelitian dengan judul **"Kendali Optimal Untuk Model Persediaan Barang dengan *Backlogging*"**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan sebelumnya, maka penulis dapat merumuskan suatu masalah yang akan dibahas pada penelitian ini mengenai bagaimana kendali optimal untuk model persediaan barang dengan *backlogging* dan bagaimana tingkat persediaan setalah diberi kendali optimal?

1.3 Batasan Masalah

Agar penelitian ini terarah sesuai dengan permasalahan yang telah diberikan, maka penulis memberi batasan permasalahan, yaitu:

1. Tingkat permintaan diasumsikan konstan sepanjang waktu.

2. Fungsi tujuan untuk waktu berhingga.

1.4 Tujuan Penelitan

Tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan kendali optimal model persediaan barang dengan *backlogging* serta bentuk tingkat persediaan setelah diberi kendali.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan diatas, penulisan penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat atau berkontribusi nyata:

1. Memberi wawasan dalam menerapkan teori kendali optimal, sehingga dapat di aplikasikan dalam dunia bisnis atau usaha untuk mengoptimalkan persediaan.
2. Sebagai literatur dan tambahan referensi dalam hal keperluan penelitian akademik.
3. Dapat membantu perusahaan dalam mengendalikan persediaan dengan model kendali optimal.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan penelitian ini terdiri dari pokok-pokok permasalahaan yang akan dibahas secara terstruktur, yang diuraikan menjadi beberapa bagian:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini mengulas tentang gambaran secara umum dari penelitian yang meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Menelaah tentang teori-teori yang mendukung bagian pembahasan pada penelitian ini.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Berisikan langkah-langkah dalam penelitian yang akan dilakukan saat menyelesaikan masalah. Langkah-langkah tersebut merupakan kerangka yang akan dijadikan sebagai pedoman penelitian sehingga mencapai tujuan yang diinginkan.

BAB IV PEMBAHASAN

Membahas tentang penyelesaian kendali optimal untuk model persediaan barang dengan *backlogging*.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisikan tentang kesimpulan yang didapatkan dari pembahasan serta saran mengenai penelitian yang dilakukan.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Persamaan diferensial orde satu adalah persamaan diferensial yang turunan tertingginya berorde satu [7]. Secara umum dapat ditulis persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{2.1}$$

dengan $f(x,y)$ merupakan fungsi dalam dua variabel yang kontinu di x dan y. Apabila pada Persamaan (2.1) berbentuk linier pada variabel bebas y, maka persamaan dapat dituliskan dengan:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{2.2}$$

Kemudian solusi untuk persamaan (2.2), sebagai berikut:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right], \tag{2.3}$$

Contoh 2.1

Tentukan solusi umum dari Persamaan Diferensial $\frac{dy}{dx} - 2y = 2x^3$

Penyelesaian:

Dari persamaan $\frac{dy}{dx} - 2y = 2x^3$ diperoleh $P(x) = -2$ dan $Q(x) = 2x^3$. Maka didapat sebagai berikut:

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-2x}, \text{ dan}$$

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{2x}$$

Maka:

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int 2x^3e^{-2x}dx$$

$$= -x^3e^{-2x} - \left(\frac{3x^2 - 3x}{2}\right)e^{-2x} - \left(\frac{3}{4}\right)e^{-2x}$$

$$= \left(\frac{-4x^3-6x^2-6x-3}{4}\right) e^{-2x}+\mathrm{C}$$

Sehingga didapatkan solusi umum sebagai berikut:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

$$y = e^{2x}\left[\left(\frac{-4x^3 - 6x^2 - 6x - 3}{4}\right) e^{-2x} + C\right]$$

$$y = \left(\frac{-4x^3 - 6x^2 - 6x - 3}{4}\right) + Ce^{2x}$$

2.2 Persamaan Diferensial Biasa Nonhomogen Koefisien Konstanta

Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa nonhomogen koefisien konstanta, sebagai berikut:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x), \qquad (2.4)$$

Diasumsikan $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ merupakan penyelesaian dari persamaan homogen:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0, \qquad (2.5)$$

misalkan $y = e^{rx}$ pada persamaan (2.4), maka diperoleh:

$$a\frac{d^2(e^{rx})}{dx^2} + b\frac{d(e^{rx})}{dx} + ce^{rx} = 0,$$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0,$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0,$$

Diperoleh $e^{rx} = 0$ maka $y(x) = e^{rx}$ merupakan penyelesaian Persamaan (2.5) jika dan hanya jika r memenuhi karakteristik:

$$ar^2 + br + c = 0, \qquad (2.6)$$

Penyelesaian dari persamaan karakteristik (2.6), sebagai berikut:

$$r_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Dari penyelesaian khusus persamaan diferensial linier orde dua pada Persamaan (2.6) dengan persamaan karakteristik bergantung pada nilai diskriminan.

Bedasarkan Persamaan (2.6) terdapat bentuk-bentuk penyelesaian menurut nilai diskriminannya ada tiga, yaitu:

a. Akar-akar Real dan Berbeda $(b^2 - 4ac > 0)$

Termuat akar-akar r_1 dan r_2 dalam persamaan karekteristik $ar^2 + br + c = 0$ beserta persamaan kuadrat yang memiliki akar real berbeda $r_1 \neq r_2$. Adapun dari Persamaan (2.6) didapatkan penyelesaiaan umumnya sebagai berikut:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_1 e^{r_2 x} \tag{2.7}$$

Dimana $c_1$dan c_2 merupakan konstanta sembarang.

b. Akar-akar Berulang $(b^2 - 4ac = 0)$

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ dengan persamaan kuadrat yang mempunyai akar real sama $(r_1 = r_2)$. Adapun dari Persamaan (2.6) didapatkan penyelesaian umumnya sebagai berikut:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_1 x e^{r_2 x} \tag{2.8}$$

Dimana $c_1$dan c_2 merupakan konstanta sembarang.

c. Akar-akar Imajiner $(b^2 - 4ac < 0)$

Apabila akar-akar r_1 dan r_2 pada Persamaan (2.6) merupakan bilangan kompleks $r_1 = \alpha + i\beta$ dan $r_2 = \alpha - i\beta$. Adapun dari Persamaan (2.6) didapatkan penyelesaian umumnya sebagai berikut:

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x) \tag{2.9}$$

Dimana C_1 dan C_2 merupakan konstanta sembarang.

Selanjutnya, $y_p(x)$ adalah penyelesaian dari persamaan nonhomogen. Maka penyelesaian umum berdasarkan Persamaan nonhomogen (2.4) ditulis dengan:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \tag{2.10}$$

Contoh 2.2 :

Dari persamaan diferensial biasa nonhomogen berikut, tentukan penyelesaian umumnya

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

Penyelesaian:

Pertama, tentukan terlebih dahulu penyelesaian umum dari persamaan diferensial biasa homogennya

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

selanjutnya bentuk persamaan karakteristik pada persamaan homogennya sebagai berikut:

$$r^2 - 3r + 2y = 0$$
$$(r-1)(r-2) = 0$$
$$r_1 = 1 \text{ dan } r_1 = 2$$

maka diperoleh penyelesaian, yaitu:

$$y_c(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

Kemudian pada penyelesaian $y_p(x)$ diberikan dari:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Sehingga,

$$y_p{}'(x) = 2Ax + B \text{ dan}$$
$$y_p{}''(x) = 2A$$

Tentukan nilai A, B dan C dengan mensubstitusikan nilai-nilai $y_p(x)$, $y_p{}'(x)$ dan $y_p{}''(x)$ dan ke dalam persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$ sehingga diperoleh:

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$

diperolehlah nilai $A = 2$, $B = 6$, dan $C = 7$, sehingga:

$$y_p(x) = 2x^2 + 6x + 7$$

Penyelesaian umum dalam persoalan tersebut ialah penjumlahan persamaan $y_c(x)$ dengan persamaan $y_p(x)$ sehingga diperoleh:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$$

2.3 Persamaan Kuadratik

Diberikan bentuk kuadratik menurut [8] sebagai berikut:

$$x^TAx, \qquad (2.11)$$

dimana entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk i dan j. Dan $\boldsymbol{x}^T = [x_1, x_2, \dots x_n]$, maka Persamaan (2.11) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x^T A x &= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Persamaan (2.11) merupakan bentuk kuadratik dimana n adalah banyaknya variabel $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dimana $i = j$, $j = n$ dan $c_{ij} \in \mathbf{R}$. Sifat definit pada persamaan kuadratik (2.11) diperoleh dengan cara menghitung nilai eigen pada matriks A. Jika matriks A berukuran $n \times n$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen pada matriks A maka bentuk kuadratik $x^T A x$ memenuhi:

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0$ untuk semua nilai i.
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq 0$ untuk semua nilai i.
3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk semua nilai i.
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0$ untuk semua nilai i.
5. Sifat undefinit tidak memenuhi sifat di atas.

Selanjutnya, untuk lebih memahami penjelasan di atas, diberikan contoh yaitu:

Contoh 2.3:

Tentukan bentuk definit bentuk kuadrat $f(x_1, x_2) = 2x_1{}^2 + 3x_2{}^2$

Penyelesaian:

Dari bentuk kuadrat $f(x_1, x_2) = 2x_1{}^2 + 3x_2{}^2$ diperoleh sebagai berikut:

$$= 2x_1{}^2 + 0x_1x_2 + 0x_2x_1 + 3x_2{}^2$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Kemudian untuk mendapatkan sifat definitnya yaitu

Pada matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ nilai eigennya didapatkan sebagai berikut:

$$Det(\lambda I - A) = 0$$

$$Det \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$Det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\big((\lambda - 2)(\lambda - 3)\big) - 0 = 0$$

Sehingga

$$\lambda_1 = 2, \text{ dan } \lambda_2 = 3,$$

Dari nilai eigen yang didapatkan, disimpulkan bahwa bentuk kuadratik tersebut memiliki sifat definit positif.

2.4 Kestabilan

Sebelum memahami pembahasan tentang kestabilan, terlebih dahulu memahami titik ekuilibrium. Berdasarkan [9] diberikan sebagai berikut:

Definisi 2.1 Diberikan persamaan diferensial orde satu yaitu $\dot{x} = f(x)$ dengan nilai awal$x(0) = x_0$, sebuah vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut titik ekuilibrium. Berikut diberikan contoh titik ekuilibriumnya:

Contoh 2.4:

Dari persamaan berikut, tentukan titik ekuilibriumnya:

$$\dot{x} = 4x$$

Penyelesaian:

Diketahui

$$\dot{x} = 4x$$

diperolehlah titik ekuilibriumnya sebagai berikut:

$$\bar{x} = 0$$

Adapun definisi kestabilan berdasarkan [9] dan [10].

Definisi 2.2 Titik ekuilibrium $(\bar{x})$ dapat dikatakan stabil jika terdapat $\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ sehingga $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{x}$ merupakan titik stabil dan $\exists\delta > 0$ sehingga

$\lim_{t\to\infty}\|x(t,x_0)-\bar{x}\|=0$ memenuhi $\|x_0-\bar{x}\|<\delta$. Berikut diberikan contoh kestabilan:

Contoh 2.5:

Diberikan persamaan diferensial sebagai berikut $\dot{x} = -5x$ dengan titik ekuilibriumnya $\bar{x} = 0$. Tentukan analisa kestabilannya untuk waktu dari 1 sampai 10?

Penyelesaian:

Sebelum dianalisa kestabilan, diberikan solusi sebagai berikut:

$$\dot{x} = -5x$$

$$\frac{dx}{dt} = -5x$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int -5\,dt$$

$$\ln(x) = -5t + c$$

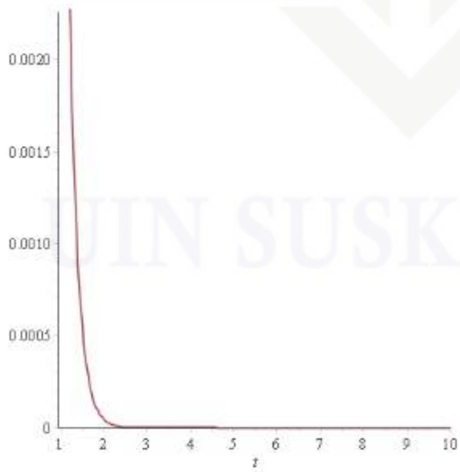
Sehingga:

$$\ln(x) = -5t + c$$

$$x = e^{-5t+c}$$

$$x = C.e^{-5t}$$

Selanjutnya, untuk melihat kecenderungan solusi $x = C.e^{-5t}$ dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2.1 Grafik fungsi $f(t) = e^{-5t}$

Gambar 2.1 menunjukkan jika $t \to 10$ maka $x \to 1$, disimpulkan bahwa $\dot{x} = -5x$ stabil asimtotik karena solusinya menuju 10.

2.5 Teori Kendali Optimal

Sistem kendali mengukur keadaan sistem, membandingkan dengan perilaku yang diinginkan, menghitung koreksi yang diperlukan berdasarkan model, sebagai respon terhadap pengaruh perlakuan dan selanjutnya memerintah sistem untuk bergerak sesuai hasil perhitungan.

Masalah kendali optimal dapat didefinisikan sebagai suatu masalah peubah kendali $u(t)$ yang bergantung pada waktu t, dan *state* awal $x(t_0)$ pada waktu t_0 untuk *state* akhir $x(T)$ pada waktu akhir T. *State* yang bergantung pada fungsi kendali didefinisikan dalam bentuk persamaan diferensial, sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t), \tag{2.13}$$

Untuk memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan agar tercapai, maka fungsi tujuannya sebagai berikut:

$$J = \int_{t_0}^{T} f(x(t), u(t), t)dt, \tag{2.14}$$

Selanjutnya, dibentuk Persamaan *Hamilton* untuk mendapatkan kendali optimal, sebagai berikut:

$$H(x, u, t, \lambda) = f(x(t), u(t), t) + \lambda^T g(x(t), u(t), t), \tag{2.15}$$

Dari Persamaan *Hamilton* diatas, dibentuk kondisi yang optimal pada fungsi kendali yang memenuhi syarat, sebagai berikut:

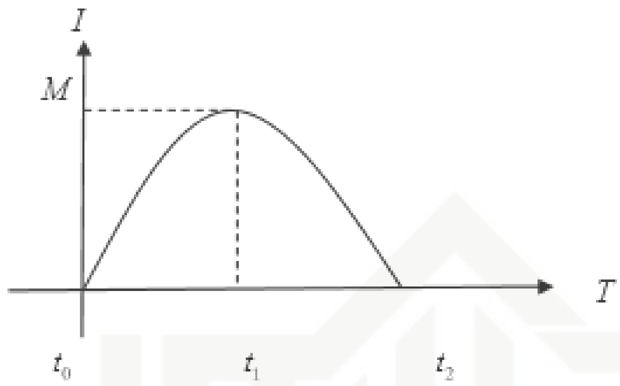
Persamaan *state* : $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(x(t), u(t), t),$ (2.16)

Persamaan *costate* : $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x},$ (2.17)

Persamaan *stationer* : $\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$ (2.18)

2.6 Kendali Optimal Model Persediaan

Model persediaan dibentuk ketika terjadi peningkatan dan penurunan pada persediaan produk, dengan mengasumsikannya pada dua fase. Fase pertama yaitu dari t_0 sampai t_1 yang menunjukkan terjadinya peningkatan terhadap persediaan, fase selanjutnya yaitu t_1 sampai t_2 memperlihatkan bahwa terjadi tingkat persediaan yang menurun [4]. Keadaan ini dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2. 2 Model Persediaan dengan Perubahaan Fase

Berdasarkan Gambar 2.2 model persediaan mengalami perubahan fase peningkatan dan penurunan pada persediaan produk, fase tersebut dapat didefinisikan kedalam persamaan diferensial dinamik pada persediaan, sebagai berikut:

$$\dot{I} = \begin{cases} P(t) + v(t)I(t), & t\epsilon[0, t_1] \\ P(t) - D(t) + v(t)I(t), & t\epsilon[t_1, t_2] \end{cases} \tag{2.19}$$

Dalam penelitian ini membahas tentang model persediaan yang mengalami penurunan akibat terjadinya kerusakan. Model persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{I} = P(t) - D(t) + v(t)I(t), \qquad t\epsilon[t_1, t_2] \tag{2.20}$$

dengan $v(t) = m(t) - \theta(t), P(t) \geq 0$.

dimana:

$I(t)$ adalah tingkat fungsi persediaan,

$P(t)$ adalah tingkat fungsi produksi,

$D(t)$ adalah fungsi permintaan,

I_0 adalah tingkat nilai awal persediaan,

$m(t)$ adalah rata-rata fungsi kenaikan,

$\theta(t)$ adalah rata-rata fungsi kemerosotan,

$v(t)$ adalah rata-rata fungsi peningkatan dan penurunan.

Dengan fungsi tujuan:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t \{h[I(t) - \hat{I}]^2 + K[P(t) - \hat{P}]^2\}\, dt, \tag{2.21}$$

dimana:

$\hat{P}$ adalah tingkat produksi tujuan,

$\hat{I}$ adalah tingkat persediaan tujuan,

h adalah koefisien biaya penyimpanan,

K adalah koefisien biaya produksi.

Dengan diketahui persamaan diferensial dinamik dan fungsi tujuan, menurut [9] masalah persediaan dapat juga dilihat sebagai bentuk model kendali optimal. Selanjutnya, untuk mencari tingkat produksi yang optimal, berdasarkan [11] dibentuk Persamaan *Hamilton*, sebagai berikut:

$$H = \frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + \lambda(P(t) - D(t) + v(t)I(t)), \tag{2.22}$$

Selanjutnya dibentuk persamaan *Lagrange*, seperti berikut:

$$L = \frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + (\lambda - \mu)\big(P(t) - D(t) + v(t)I(t)\big), \tag{2.23}$$

Selanjutnya, dari Persamaan (2.22) dan (2.23), dibentuk:

$$H_P = 0, \tag{2.24}$$

$$L_I = -\dot{\lambda}, \tag{2.25}$$

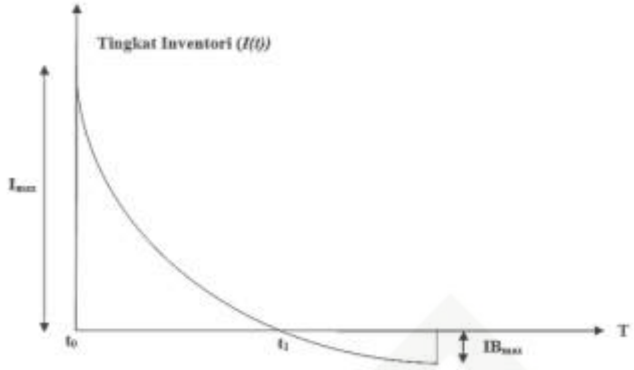
$$L_p = 0, \tag{2.26}$$

$$\lambda \geq 0\ ,\ \mu \geq 0 \tag{2.27}$$

Persamaan (2.24)-(2.27), diperlukan untuk mendapatkan kendali optimal pada model persediaan.

2.7 Model Persediaan yang Mengalami *Backlogging*

Model persediaan pada [12] dengan tingkat permintaan yang konstan serta mengalami terjadinya kekosongan barang *(shortage)* yang membuat pelanggan menunggu sampai pengisian ulang persediaan *(backlogging)*. Situasi ini dapat digambar, sebagai berikut:



Gambar 2.3 Model Persediaan yang Mengalami *Backlogging*

Berdasarkan Gambar 2.3 dijelaskan bahwa model persediaan mengalami dua fase, yaitu:

Fase Pertama: Persediaan tidak mengalami kekosongan.

Persediaan yang tidak mengalami kekosongan pada periode $[0, t_1]$, tetapi persediaan habis dipengaruhi oleh penurunan dan permintaan. Jadi pada periode ini, persamaan diferensial pada persediaan, sebagai berikut:

$$\frac{dI_P}{dt} + \theta I_P = -D(t), \qquad 0 \leq t \leq t_1 \tag{2.28}$$

Dimana bentuk umum dari fungsi permintaan yaitu:

$$D(t) = (a + bt + ct^2), \qquad 0 \leq t \leq t_1$$

Fase Kedua: Persediaan mengalami kekosongan.

Persediaan yang mengalami kekosongan pada periode $[t_1, T]$. Namun tingkat persediaan bergantung pada permintaan dan sebagian permintaan ditampung. Periode ini membentuk persamaan diferensial, sebagai berikut:

$$\frac{dI_N}{dt} + \theta I_N = -(a + bt + ct^2)\frac{1}{1+\delta(T-t)}, \qquad t_1 \leq t \leq T \tag{2.29}$$

dengan:

I_P adalah tingkat persediaan positif pada waktu *t*,

I_N adalah tingkat persediaan negatif pada waktu *t*,

$D(t)$ adalah fungsi permintaan,

a, b, c adalah konstanta dengan waktu t,

$(T-t)$ adalah lamanya waktu tunggu untuk pengisian berikutnya,

δ adalah tingkat *backlogging.*

BAB III
METODE PENELITIAN

Penulisan proposal tugas akhir ini membahas tentang penyelesaian sistem kendali optimal pada persediaan barang dengan *backlogging*. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Menggabungkan bentuk umum persamaan diferensial pada Persamaan (2.20) dengan Persamaan (2.29), sehingga membentuk persamaan diferensial dinamik untuk persediaan barang dengan *backlogging*, sebagai berikut:
$$\dot{I} = P(t) - (a + bt + ct^2)\frac{1}{1 + \delta(T - t)} + v(t)I(t)$$
2. Diberikan fungsi tujuan sesuai dengan Persamaan (2.21).
3. Kemudian dibentuk Persamaan *Hamilton* sesuai dengan persamaan diferensial dinamik dan fungsi tujuan yang ada pada Langkah 2.
4. Setelah diperoleh Persamaan *Hamilton*, selanjutnya dapat dibentuk persamaan *Lagrange*.
5. Berdasarkan Langkah 3 dan 4 akan dibentuk kondisi optimal , yaitu $H_P = 0$, $L_I = -\dot{\lambda}$ dan $L_p = 0$. Dan selanjutnya diperoleh kendali optimal pada model persediaan.
6. Membentuk persamaan diferensial orde dua untuk persediaan barang dengan *backlogging*.
7. Dari Langkah 6 diperoleh solusi persamaan diferensial orde dua untuk persediaan barang dengan *backlogging*.
8. Selanjutnya, akan dianalisa kestabilan persamaan diferensial dinamik berdasarkan solusi dari Langkah 7.
9. Pada langkah ini akan dilakukan simulasi contoh menggunakan *software Maple* dengan menggunakan nilai-nilai parameter yang diambil dari penelitian terdahulu.
10. Terakhir, membuat kesimpulan atau interprestasi dari hasil yang diperoleh secara keseluruhan.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan Bab IV diperoleh kendali optimal tingkat persediaan dengan *backlogging*, sebagai berikut:

$$I(t) = C_1 e^{\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t} + Q(t)$$

dimana $Q(t)$ merupakan solusi untuk Persamaan nonhomogen dari Persamaan (4.13), yang memiliki Persamaan sebagai berikut:

$$Q(t) = \frac{-v\hat{P} - \left(\frac{b+2ct+\delta c^t 2-\delta a}{(a+\delta(t))^2}\right) - v\left(\frac{a+bt+c^t 2}{1+\delta(t)}\right)}{\frac{h}{K} + v^2}$$

serta nilai konstanta C_1 dan nilai konstanta C_2 yaitu:

$$C_1 = \frac{e^{-\gamma T}((I_0 - Q(0)) - (M - Q(T)))}{e^{-\gamma T} - e^{\gamma T}}$$

dan

$$C_2 = -\frac{e^{-\gamma T}((I_0 - Q(0)) - (M - Q(T)))}{e^{-\gamma T} - e^{\gamma T}}$$

Sehingga pada saat $t \to 0$ hingga pada saaat $t \to 4$ diperoleh nilai tingkat persediaan $I(t)$ mengalami penurunan. Namun pada saat $t \to 10$ tingkat persediaan $I(t)$ kembali meningkat. Dengan kendali optimal tingkat produksi untuk persediaan barang dengan *backlogging*, yaitu:

$$P(t) = C_1(-\gamma + v)e^{\gamma t} + C_2(\gamma + v)e^{-\gamma t} - \dot{Q}(t) - (a + bt + ct^2)\frac{1}{1+\delta(t)} + Q(t)v$$

5.2 Saran

Kepada para pembaca, semoga tugas akhir ini dapat menjadikan referensi berikutnya. Diharapkan kepada pembaca yang tertarik dengan tugas akhir ini untuk mengembangkan penelitian ini dalam kasus kerusakan barang dengan tingkat permintaan yang mengalami *backlogging*, karena enelitian ini masih butuh pengembangan dan modifikasi, mengingat persediaan merupakan aset penting dalam suatu perusahaan atau kegiatan produksi.. Demikian saran yang dapat disampaikan penulis. Penulis meminta kritik dan saran yang membangun dari pembaca demi kesempurnaan tugas akhir ini

DAFTAR PUSTAKA

[1] Vikaliana, Y. Sofian, N. Solihati, D. B. Adji, and R. S, S, *Manajemen Persediaan*. Bandung: Media Sains Indonesia, 2020.

[2] A. F. Herdiana, "Analisis Faktor–Faktor Yang Mempengaruhi Permintaan Sepeda Motor Di Kota Malang," *Jurnal Ilmiah.*, 2016, [Online]. Available: http://repository.unpas.ac.id/40077/.

[3] C. Y. Dye, T. P. Hsieh, and L. Y. Ouyang, "Determining optimal selling price and lot size with a varying rate of deterioration and exponential partial backlogging," *European Journal of Operational Research*, volume. 181, nomor. 2, pp. 668–678, 2007.

[4] N. Andiraja and D. Agustina, "Aplikasi Kendali Optimal Untuk Model Persediaan yang Mengalami Kerusakan pada Persediaan dan Perubahan Tingkat Permintaan," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.*, volume. 6, nomor. 2, pp. 12, 2020.

[5] Iswarnedi, M. Subhan, and R. Sriningsih, "Model Matematika Persediaan Barang karena Adanya Kerusakan dengan Tingkat Permintaan Eksponensial dan *Partial Backlogging*," *Jurnal Matematika*, volume. 4, nomor. 2, pp. 24–28, 2021.

[6] M. N. Handayani, "Model Kerusakan Inventori dan *Backlog Parsial*," *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, pp. 353–360, 2015.

[7] Xie, Wei-Chau. *Differential Equations for Engineers*. New York: University of Waterloo Cambridge. 2010.

[8] Ogata, Katsuhiko. *Discrete Time System Theory*. New Jersey: Prentice-Hall. 1995.

[9] Olsder, GJ. *Mathematical System Theory*. Delf: University og Technology, Delft. 1994.

[10] Sutrisno, Widowati, and R. H. Tjahjana, *Metode Kendali Optimal: Teori dan Aplikasi pada Sistem Inventori*. Semarang: UNDIP Press, 2020.

[11] F. L. Lewis and V. L. Syrmos. *Optimal Control Lewis.*Canada: John Wiley & Sons, Inc. 1995.

[12] D. R. Kumar Yadav and A. K. vats, "A Deteriorating Inventory Model for Quadratic Demand and Constant Holding Cost with Partial Backlogging and Inflation," *IOSR Journal of Mathematics,* volume. 10, nomor. 3, pp. 47–52, 2014.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Pekanbaru, Provinsi Riau pada tanggal 10 Februari 2000 dari pasangan Bapak Parlan Adeka Putra dan Almh Ibu Mardiana. Penulis merupakan anak Pertama dari tiga bersaudara. Penulis menyelesaikan pendidikan formal Sekolah Dasar di SDN 184 Pekanbaru pada tahun 2012. Sedangkan pada tahun 2015 penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMPN 8 Pekanbaru dan pada tahun 2018 penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Kejuruan di SMKN 2 Pekanbaru dengan jurusan Gambar Bangunan. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi pada tahun 2018 di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dengan jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Tahun 2021 penulis melaksanakan Kerja Praktek (mengulas jurnal) dengan judul **"Laporan Topik-Topik Pengendalian dan Perencanaan Produksi untuk Minimasi Biaya"** yang dibimbing oleh Bapak Mohammad Soleh, M.Sc., dan diseminarkan pada tanggal 05 Juli 2021. Kemudian penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2021 di Kel. Pasir Putih, Kec. Tampan, Kab. Pekanbaru dimana sistem yang digunakan online karena pandemi *covid-19.*

Tepat pada tanggal 27 Juni 2023, penulis dinyatakan lulus dalam ujian Sidang Tugas Akhir dengan judul **"Kendali Optimal untuk Persediaan Barang dengan *Backlogging*"** dibawah bimbingan Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd., M,Sc.