KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PERSEDIAAN BARANG YANG MENGALAMI *EXPONENTIAL DECLINING DEMAND* PADA WAKTU BERHINGGA

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

Oleh :

<u>SRI EKA WAHYUNI</u>
11850420449

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2023

Lampiran Surat :
Nomor : Nomor 25/ 2021
Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: SRI EKA WAHYUNI
NIM	: 11850420449
Tempat/Tgl. Lahir	: Kabanjahe, 10 Oktober 1999
Prodi	: S1 Matematika

Judul ~~Disertasi/Thesis/~~Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~*: **"KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PERSEDIAAN BARANG YANG MENGALAMI *EXPONENTIAL DECLINING DEMAND* PADA WAKTU BERHINGGA"**

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan ~~Disertasi/Thesis/~~Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~ dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu ~~Disertasi/Thesis/~~Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~ saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan ~~Disertasi/Thesis/~~Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~ saya tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan perundang-undangan.

Demikianlah Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 13 Januari 2023
Yang membuat pernyataan

SRI EKA WAHYUNI
NIM. 11850420449

LEMBAR PERSETUJUAN

KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PERSEDIAAN BARANG YANG MENGALAMI *EXPONENTIAL DECLINING DEMAND* PADA WAKTU BERHINGGA

TUGAS AKHIR

oleh :

SRI EKA WAHYUNI
11850420449

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 13 Januari 2023

Ketua Program Studi

Wartono, M.Sc.
NIP. 19730818 200604 1 003

Pembimbing

Nilwan Andiraja, M.Sc.
NIP. 19840803 201101 1 005

LEMBAR PENGESAHAN

KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PERSEDIAAN BARANG YANG MENGALAMI *EXPONENTIAL DECLINING DEMAND* PADA WAKTU BERHINGGA

TUGAS AKHIR

oleh :

SRI EKA WAHYUNI
11850420449

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 13 Januari 2023

Pekanbaru, 13 Januari 2023
Mengesahkan,

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19610810198601001	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI :

Ketua	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Sekretaris	**: Nilwan Andiraja, M.Sc.**
Anggota I	**: Sri Basriati, M.Sc.**
Anggota II	**: Irma Suryani, M.Sc.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebut sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh tugas akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan tugas akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tugas akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan didalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 13 Januari 2023
Yang membuat pernyataan,

SRI EKA WAHYUNI
11850420449

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْــــــــــــــــمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيْمِ

"Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan"
(QS. Al Insyirah : 6)

Alhamdulillah kuucapkan kepada Allah SWT yang telah memberikan kemudahan sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik. Semoga keberhasilan ini menjadi langkah awal untuk masa depanku

Tugas akhir ini kupersembahkan untuk

****** Ayahanda Bambang Susanto dan Ibunda Susilawati ******

Terimakasih telah senantiasa memberikan doa, dukungan dan kasih sayang yang berlimpah. Jasa dan pengorbanan yang kalian berikan tidak akan pernah terbalaskan. Sebagai wujud terimakasih atas pengorbanan yang telah kalian berikan, kupersembahkan tugas akhir ini.

****** Dosen pembimbing Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc dan Dosen Program Studi Matematika Bapak Wartono, S.Si, M.Sc Fakultas Sains dan Teknologi ******

Terimakasih atas waktu dan bimbingan yang telah dicurahkan sehingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

****** Sahabat-sahabatku Annisa, Diani, Regina, Dinda, Anne, Khotimah, Tari, Widya, Mufti, Hasifa, Ayu, Mia, Devi, Syifa, Rahmi, dan abangda Heru serta adik saya Adit ******

Terimakasih karena selalu ada di sisiku saat suka ataupun duka. Kebersamaan kita akan menjadi kenangan yang tidak ingin aku lupakan.

KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PERSEDIAAN BARANG YANG MENGALAMI *EXPONENTIAL DECLINING DEMAND* PADA WAKTU BERHINGGA

SRI EKA WAHYUNI
NIM: 11850420449

Tanggal Sidang	:	13 Januari 2023
Tanggal Wisuda	:	2023

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas KM 15 No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Kerusakan barang merupakan hal yang sering terjadi pada suatu sistem persediaan. Akibat adanya kerusakan pada barang dapat mengakibatkan kerugian untuk perusahaan. Oleh karena itu, sangat diperlukan adanya pengendalian terhadap persediaan yang dilakukan dengan penerapan teori kendali. Penelitian ini membahas penerapan teori kendali yang bertujuan untuk mendapatkan persamaan tingkat persediaan barang yang optimal dan mendapatkan kestabilan model matematika pada model kerusakan barang yang mengalami *Eksponential Declining Demand* pada waktu berhingga. Model persediaan barang yang digunakan adalah persamaan diferensial dinamik dimana fungsi permintaan diubah menjadi fungsi eksponensial. Persamaan yang ada digunakan untuk mendapatkan fungsi Hamilton, fungsi Lagrange, dan persamaan differensial orde dua. Hasil dari penelitian mendapatkan persamaan tingkat persediaan yang optimal dan tingkat produksi. Selain itu, berdasarkan contoh yang telah diberikan didapat bahwa kurva tingkat persediaan akan naik pada waktu yang telah ditentukan.

Kata kunci: *Kendali optimal, kestabilan, penurunan barang, persediaan.*

OPTIMAL CONTROL ON THE INVENTORY MODEL OF THE EXPONENTIAL DECLINING DEMAND IN CHARGE TIME

SRI EKA WAHYUNI
NIM: 11850420449

Date of Final Exam : 13 Januari 2023
Date of Graduation : 2023

Department of Mathematic
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan SyarifKasim Riau
Soebrantas Street No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

Damage to goods is something that often occurs in an inventory system. As a result of damage to goods can result in losses for the company. Therefore, it is very necessary to have inventory control carried out by applying control theory. This study discusses the application of control theory which aims to obtain the optimal inventory level equation and obtain the stability of the mathematical model in the model of damage to goods experiencing Exponential Declining Demand at finite time. The inventory model used is a dynamic differential equation where the demand function is converted into an exponential function. The existing equations are used to obtain Hamilton functions, Lagrange functions, and second order differential equations. The results of the study obtained the optimal inventory level equation and production level. In addition, based on the examples given, it is found that the inventory level curve will increase at a predetermined time.

Keywords: *Optimal control, stability, decline in goods, inventory.*

KATA PENGANTAR

بِسْـــــــــــــــمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيْمِ

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamiin. Segala puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah *Subhanahu wa Ta'ala* yang telah memberikan rahmat kesehatan dan keselamatan sehingga penulis dapat diberi kemudahan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini. Shalawat dan salam juga selalu tercurah kepada Nabi Muhammad *Sallallahu'alaihi Wasallam*, semoga kelak di akhirat seluruh umatnya mendapat *syafa'at* dari beliau.

Selama melaksanakan proses penilisan tugas akhir ini, penulis mendapatkan bimbingan, arahan, masukan, nasehat, dan lain sebagainya dari berbagai pihak hingga akhir penyusunan tugas akhir ini. Oleh karena itu, pertama kali penulis mengucapkan terimakasih kepada kedua orang tua tercinta yang selalu memberikan kasih sayang dan do'a, serta dukungan kepada penulis baik dukungan secara mental maupun secara materi.

Selanjutnya dalam kesempatan ini, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Pembimbing penulisan tugas akhir yang telah memberikan arahan, petunjuk, dan masukan dari awal proses hingga tugas akhir ini selesai.
4. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
5. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika.
6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku Ketua Sidang yang telah memberikan saran dan masukan kepada penulis.

7. Ibu Sri Basriati, M.Sc. selaku Penguji I dan Ibu Irma Suryani, M.Sc. selaku Penguji II yang telah memberikan saran dan masukan yang bermanfaat kepada penulis.
8. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi khususnya Program Studi Matematika.
9. Teman-teman kelas yang selalu membantu dan memberi *support* kepada penulis.
10. Teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika khususnya angkatan 2018 yang telah memberikan semangat kepada penulis agar penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
11. Teman-teman yang juga turut dalam memberikan penulis motivasi dan semangat Ayu Kesuma Ningtyas, Syifa Hanifah, Rahmi serta Abangda Heru Wiryawan Ginting yang juga tiada henti memberikan dukungan dan semangat sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
12. Semua pihak yang telah membantu penulis dari awal penyusunan hingga selesai yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak yang membangun demi kesempurnaan tugas akhir ini dan demi menciptakan tugas akhir yang lebih baik lagi untuk kedepannya.

Pekanbaru,13 Januari 2023

SRI EKA WAHYUNI
11850420449

DAFTAR ISI

LEMBAR PERSETUJUAN ii
LEMBAR PENGESAHAN iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL iv
LEMBAR PERNYATAAN v
LEMBAR PERSEMBAHAN vi
ABSTRAK vii
ABSTRACT viii
KATA PENGANTAR ix
DAFTAR ISI xi
DAFTAR GAMBAR xiii
DAFTAR SIMBOL xiv
BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Batasan Masalah 3
1.4 Tujuan Penelitian 3
1.5 Manfaat penelitian 3
1.6 Sistematika Penulisan 4
BAB II LANDASAN TEORI 5
2.1 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu 5
2.2 Persamaan Diferensial Biasa Nonhomogen Koefisien Konstanta 6
2.3 Bentuk Kuadratik 9
2.4 Model Persediaan Barang 10
2.4.1 Kendali Optimal pada Masalah Persediaan Barang . 10
2.4.2 Model Persediaan dengan Eksponensial 12
2.5 Kestabilan 13

BAB III METODE PENELITIAN 15
BAB IV PEMBAHASAN 16
4.1 Kendali Optimal pada Masalah persediaan 16
4.1.1 Selisih Rata-Rata Kenaikan dan Penurunan Persediaan Sebagai Konstanta 20
4.1.2 Selisih Rata-Rata Kenaikan, Penurunan Persediaan dan Biaya Sebagai Konstanta 27
4.2 Simulasi Numerik 41
BAB V PENUTUP 45
5.1 Kesimpulan 45
5.2 Saran 47
DAFTAR PUSTAKA 48
DAFTAR RIWAYAT HIDUP 49

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Model Persediaan dengan Perubahan Fase (Affandi, 2015) 10

Gambar 2.2 Grafik Fungsi $f(t)=e^{(-2t)}$ 14

Gambar 4.1 Grafik $I(t)$ untuk $t \to 10$ 44

DAFTAR SIMBOL

$I(t)$	: Fungsi tingkat persediaan
$P(t)$	: Nilai rata-rata tingkat produksi
$D(t)$	: Nilai tingkat persediaan awal
v	: Selisih dari fungsi rata-rata peningkatan dan penurunan
$\hat{I}$	: Tingkat persediaan tujuan
$Ae^{-\alpha t}$	: Tingkat permintaan dengan fungsi eksponensial
A	: Permintaan awal
K	: Koefisien biaya produksi
h	: Koefisien biaya penyimpanan
H	: Fungsi Hamilton
L	: Fungsi Lagrange
θ	: Rata-rata kemerosotan persediaan
m	: Rata-rata kenaikan persediaan
M	: Tingkat persediaan maksimum
$\hat{P}$	: Tingkat produksi tujuan
$H_p = \frac{\partial H}{\partial P}$	: Turunan H terhadap parsial P
$L_I = \frac{\partial L}{\partial I}$	: Turunan L terhadap parsial I
$L_P = \frac{\partial L}{\partial P}$	: Turunan L terhadap parsial P

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persediaan merupakan salah satu hal yang penting bagi suatu perusahaan atau industri untuk melakukan suatu kegiatan bisnis, karena persediaan ada kaitannya dengan penyimpanan bahan baku, barang dalam proses dan barang jadi yang berguna untuk memastikan lancarnya kegiatan produksi. Teori kendali dapat digunakan sebagai penyelesaian masalah pada tingkat persediaan.Sejauh ini terdapat penelitian yang membahas tentang penerapan teori kendali pada tingkat persediaan, salah satu penelitiannya yaitu berjudul, “Kendali Optimal dari Sistem *Inventory* dengan Peningkatan dan Penurunan Barang”[1]. Hasil dari penelitian tersebut berupa penyelesaian tentang bentuk persediaan barang dengan menggunakan teori kendali optimal serta peningkatan dan penurunan barang untuk waktu berhingga.

Persediaan memiliki beberapa faktor, salah satunya yaitu faktor *deteriorasi* (penurunan nilai kualitas setelah waktu tertentu) dalam memproduksi suatu barang. Contoh produksi suatu barang yang dipengaruhi oleh faktor *deteriorasi* yaitu perusahaan atau industri makanan dan bahan kimia. Oleh karena itu, faktor *deteriorasi* merupakan hal penting yang perlu diperhatikan dalam mengambil kebijakan untuk mengelola persediaan, karena akan berpengaruh pada tingkat persediaan yang optimal. Sehingga dalam perencanaan model persediaan faktor *deteriorasi* tidak dapat dilepaskan[2].

Penelitian lainnya yang berkaitan dengan masalah persediaan barang, dapat dilihat dalam penelitian yang berjudul,“Model Persediaan untuk Barang *Deteriorasi* dengan *Exponential Declining Demand, Time- Varying Holding Cost* dan *Shortage*”[3]. Dalam penelitian tersebut menjelaskan tentang model matematika yang dikembangkan untuk barang yang mengalami kemerosotan dengan fungsi permintaan yang menurun secara eksponensial serta menentukan total biaya minimum dan menentukan jumlah pesanan yang optimal dengan menentukan waktu terjadinya kekurangan dan lamanya siklus. Penelitian lainnya terangkum dalam [4] yaitu merubah fungsi kerusakan barang dan perubahan tingkat permintaan dengan fungsi kuadrat pada model persediaan barang yang mengalami penurunan untuk waktu berhingga. Selanjutnya, penelitian yang membahas tentang *"An Inventory Model for Deteriorating Items With Exponential Declining Demand and Return"* telah dibahas oleh [11] tentang model matematika yang dikembangkan dengan fungsi permintaan yang menurun secara eksponensial untuk menentukan biaya minimum dengan menentukan waktu pengembalian optimal dan jumlah pesanan optimal. Dalam penelitiannya dijelaskan mengenai model persediaan untuk kerusakan dikembangkan dengan permintaan yang menurun secara eksponensial dan mempertimbangkan pengembalian dan kekurangan.

Berdasarkan uraian diatas, penulis tertarik untuk mengembangkan penelitian dari [4] dengan mengubah fungsi permintaan sesuai dengan penelitian [3], yaitu dengan menggantinya ke fungsi permintaan yang menurun secara *eksponential* untuk waktu berhingga. Sehingga penulis mengambil judul **"Kendali Optimal pada Model Persediaan Barang yang Mengalami *Exponential Declining Demand* pada Waktu Berhingga"**.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam tugas ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan tingkat persediaan barang yang optimal untuk model persediaan barang yang mengalami *Exponential Declining Demand* pada waktu berhingga?
2. Bagaimana analisis kestabilan bentuk model persediaan barang yang mengalami *Exponential Declining Demand* pada waktu berhingga?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Persamaan dinamik yang digunakan adalah persamaan differensial orde 1.
2. Fungsi tujuan berbentuk kuadratik dan terdapat *exponential declining demand* pada waktu berhingga.
3. Tingkat permintaan diketahui dan menurun secara e*xponential*.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan tingkat persediaan barang yang optimal pada model persediaan barang yang mengalami *Exponential Declining Demand* pada waktu berhingga.
2. Mendapatkan kestabilan model matematika dari persediaan barang yang mengalami *Exponential Declining Demand* pada waktu berhingga.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Sebagai wawasan dan ilmu pengetahuan untuk menambah pengetahuan tentang sistem kendali.
2. Untuk mengetahui bagaimana bentuk kendali optimal dari persediaan barang yang mengalami *Exponential Declining Demand* pada waktu berhingga.
3. Sebagai *literature* penunjang khususnya bagi mahasiswa/i yang menempuh mata kuliah teori kendali.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup lima bab yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan menguraikan tentang latar belakang, pemilihan judul, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Landasan teori membahas tentang teori-teori yang berfungsi sebagai landasan dalam penelitian.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini membahas tentang langkah-langkah yang digunakan dalam mencapai tujuan penelitian.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang bagaimana caranya untuk mendapatkan hasil dari penelitian tersebut.

BAB V PENUTUP

Bab ini membahas tentang kesimpulan dan saran dari penelitian.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Menurut [5] persamaan diferensial orde satu adalah persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya berorde satu. Secara umum persamaan diferensial biasa orde satu dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.1}$$

Dengan $f(x, y)$ adalah fungsi dalam dua variabel yang kontinu di x dan y. Dalam [6] apabila fungsi f pada Persamaan (2.1) berbentuk linear pada variabel bebas y, maka persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.2}$$

Solusi untuk Persamaan (2.2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

Contoh 2.1:

Tentukan solusi umum dari Persamaan Diferensial $y' + 2y = x$

Penyelesaian:

Dari persamaan $y' + 2y = x$ diperoleh $P(x) = 2$ dan $(x) = x$. Maka didapat sebagai berikut:

$$\int P(x)dx = \int 2\,dx = 2x + C$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{2x}$$

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-2x}$$

Maka:

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int xe^{2x}dx$$

$$= \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Sehingga didapatkan solusi umum sebagai berikut:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

$$y = e^{-2x}\left[\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C\right]$$

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$$

2.2 Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua Nonhomogen Koefisien Konstanta

Secara umum persamaan diferensial biasa orde dua nonhomogen koefisien konstanta dapat ditulis sebagai berikut:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{2.3}$$

Selanjutnya dimisalkan $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan homogen.

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.4}$$

Persamaan (2.5) dapat diselesaikan dengan memisalkan $y = e^{rx}$, sehingga akan diperoleh:

$$a\frac{d^2(e^{rx})}{dx^2} + b\frac{(e^{rx})}{dx} + ce^{rx} = 0$$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

Oleh karena $e^{rx} = 0$ maka didapat persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.5}$$

Penyelesaian dari Persamaan (2.5) adalah

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Atau

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Penyelesaian khusus dari persoalan persamaan diferensial linear orde dua dengan persamaan karakteristik pada Persamaan (2.5) bergantung pada nilai deskriminan.

Adapun bentuk-bentuk penyelesaian berdasarkan nilai deskriminan adalah sebagi berikut:

a. Akar-akar real dan berbeda $(b^2 - 4ac > 0)$

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ merupakan bilangan real positif dan berbeda, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.5) adalah sebagai berikut:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_1 e^{r_2 x} \qquad (2.6)$$

Dengan c_1 dan c_2 adalah sembarang konstanta.

b. Akar-akar berulang $(b^2 - 4ac = 0)$

Apabila akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ mempunyai dua akar real yang sama $(r_1 = r_2)$ maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.5) adalah

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_1 x e^{r_2 x} \qquad (2.7)$$

Dengan c_1 dan c_2 adalah sembarang konstanta.

c. Akar-akar Imajiner $(b^2 - 4ac < 0)$

Apabila akar-akar r_1 dan r_2 adalah bilangan kompleks $r_1 = \alpha + i\beta$ dan $r_2 = \alpha - i\beta$ pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ maka penyeselesaian umum dari Persamaan (2.5) adalah

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x) \qquad (2.8)$$

Dengan c_1 dan $c_2$adalah sembarang konstanta.

Kemudian $y_p(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan nonhomogen. Maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.3) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \qquad (2.9)$$

Contoh 2.2:

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial biasa nonhomogen berikut:

$$y'' + 7y' + 12y = 12x^2$$

Penyelesaian:

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan terlebih dahulu penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen.

$$y'' + 7y' + 12y = 12x^2$$

Kemudian dibentuk persamaan karakteristik untuk persamaan homogennya yaitu:

$$r^2 + 7r + 12y = 12x^2$$

$$(r+4)(r+3) = 0$$

$$r_1 = -4 \text{ dan } r_1 = -3$$

Maka diperoleh penyelesaian:

$$y_c(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-3x}$$

Selanjutnya untuk penyelesaian $y_p(x)$ diberikan oleh:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Sehingga,

$$y_p'(x) = 2Ax^2 + B \text{ dan}$$

$$y_p''(x) = 2A$$

Untuk menentukan nialai A, B dan C maka disubstitusikan nilai-nilai $y_p(x), y_p'(x)$ dan $y_p''(x)$ dan ke dalam persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 12y = 12x^2$ sehingga diperoleh:

$$y_p(x) = 2A + 7(2Ax + B) + 12(Ax^2 + Bx + C) = 12x^2$$

Dengan menggunakan kesamaan koefisien untuk persamaan di atas maka, diperoleh nilai $A = 1$, $B = -\frac{7}{6}$, dan $C = \frac{37}{72}$, sehingga

$$y_p(x) = x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{37}{72}$$

Jadi, penyelesaian umum untuk persoalan di atas adalah menjumlahkan persamaan $y_c(x)$ dengan persamaan $y_p(x)$ sehingga diperoleh:

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-3x} + x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{37}{72}$$

2.3 Bentuk Kuadratik

Menurut [7] bentuk kuadratik yaitu:

$\boldsymbol{x^T A x}$

Dengan entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j. Kemudian untuk $\boldsymbol{x}^T = [x_1, x_2, \dots x_n]$, maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x^T A x}$ dapat diuraikan menjadi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x^T A x} &= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j \end{aligned} \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) disebut bentuk kuadratik dengan n banyak variabel $x_1x_2, \dots x_n$ dengan $i = j, j = n$ dan $c_{ij} \in R$.

Definisi 2.3.1 Menurut [8] sifat definit dari persamaan kuadratik (2.10) dapat diperoleh dengan menghitung nilai eigen dari matriks A. Jika A matriks simetri berukuran $n \times n$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x^T A x}$ memenuhi:

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0$ untuk semua *i*
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq 0$ untuk semua *i*
3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk semua *i*
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0$ untuk semua *i*.
5. Sifat Undefinit jika tidak memenuhi sifat diatas.

Selanjutnya untuk lebih memahami penjelasan di atas, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.3:

Tentukan sifat definit dari bentuk kuadratik $[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= 4{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 4{x_2}^2 \\ &= 4{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 4{x_2}^2 \\ &= 4x_1x_1 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 4x_2x_2 \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk sifat definit didapatkan sebagai berikut:

Dari matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya

$$\text{Det}\,(\lambda \text{I} - A) = 0$$

$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\text{Det}\begin{bmatrix} (\lambda - 4) & -4 \\ -4 & (\lambda - 4) \end{bmatrix} = 0$$

$$\big((\lambda - 4)(\lambda - 4)\big) - (-4\,.-4) = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \text{ atau } \lambda_2 = 8$$

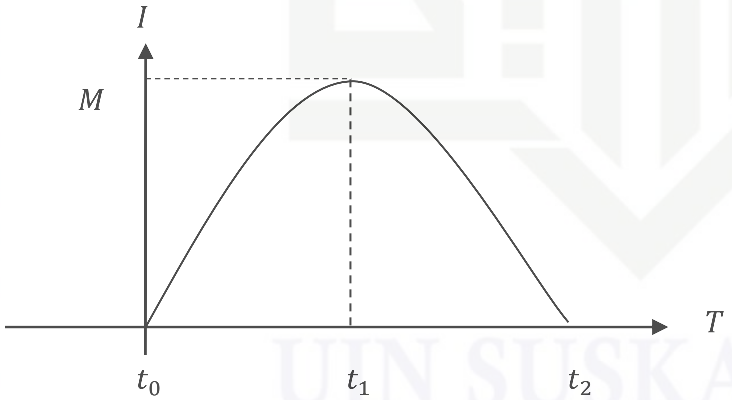
Jadi, dari nilai eigen dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik di atas memiliki sifat definit positif.

2.4 Model Persediaan Barang

Pada sub-bab ini dibentuk model persediaan barang berdasarkan penelitian[1].

2.4.1 Kendali Optimal pada Masalah Persediaan Barang

Pembentukan sistem persediaan pada kasus ini ditinjau saat terjadi peningkatan dan penurunan barang. Diasumsikan bahwa fase pertama dari t_0 hingga t_1 untuk tingkat persediaan yang meningkat, kemudian fase kedua yaitu t_1 hingga t_2 untuk tingkat persediaan yang menurun. Berikut ini digambarkan model persediaan yang mengalami fase perubahan pada persediaan.



Gambar 2.1 Model Persediaan dengan Perubahan Fase (Affandi, 2015)

Pada Gambar 2.1 membahas dua kasus yaitu kasus model penurunan barang dan model kenaikan barang dapat didefinisikan dalam persamaan differensial dinamik yaitu :

$$\dot{I} = \begin{cases} P(t) + vI(t), & t \in [0, t_1] \\ P(t) - D(t) + vI(t), & t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

Berdasarkan batasan masalah yang telah diberikan maka yang dibahas pada penelitian ini hanya untuk kasus penurunan barang. Menurut [1] pada kasus penurunan barang dapat didefinisikan dengan persamaan differensial dinamik, yaitu:

$$\dot{I} = P(t) - D(t) + vI(t), \qquad t \in [t_1, t_2] \tag{2.11}$$

dengan $v = m - \theta$, $P(t) \geq 0$. Kemudian, untuk menjamin tingkat persediaan menurun dari t_1 hingga t_2, maka lebih lanjut Persamaan (2.11) memenuhi:

$$P(t) - D(t) + vI(t) > 0 \qquad t \in [t_1, t_2] \tag{2.12}$$

Dengan

$I(t)$: tingkat fungsi persediaan.

$P(t)$: tingkat fungsi produksi.

$D(t)$: fungsi permintaan

m : rata-rata kenaikan persediaan.

θ : rata-rata kemerosotan persediaan.

v : selisih dari rata-rata kenaikan dan penurunan persediaan.

Fungsi tujuan dari model persediaan barang yang mengalami penurunan adalah sebagai berikut:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left\{ h\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2 \right\} dt \tag{2.13}$$

Dengan

$\hat{P}$: tingkat produksi tujuan

$\hat{I}$: tingkat persediaan tujuan

h : koefisien biaya penyimpanan

K : koefisien biaya produksi

Selanjutnya, untuk mencari tingkat produksi yang optimal maka dibentuk kedalam persamaan Hamilton sebagai berikut:

$$H = \frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K(P - \hat{P})^2\right] + \lambda(P(t) - D(t) + vI(t)), \tag{2.14}$$

Dan fungsi Lagrange adalah sebagai berikut:

$$L = \frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K(P - \hat{P})^2\right] + (\lambda - \mu)(P(t) - D(t) + \upsilon I(t)) \qquad (2.15)$$

Syarat yang diperlukan untuk kondisi optimal, diberikan dengan:

$$H_p = 0 \qquad (2.16)$$

$$L_I = -\dot{\lambda} \qquad (2.17)$$

$$L_p = 0 \qquad (2.18)$$

$$\lambda \geq 0\,, \mu \geq 0 \qquad (2.19)$$

2.4.2 Model Persediaan dengan Eksponensial

Pada persediaan barang, tingkat penurunan persediaan barang dapat diakibatkan oleh rusaknya atau cacatnya barang-barang persediaan. Dalam penelitian [4], telah dianalisa model persediaan barang yang mengalami penurunan dengan fungsi permintaan berupa fungsi kuadrat dengan *Weibull Deterioration*. Hasil penelitiannya menyebutkan bahwa ketika kerusakan barang dan perubahan tingkat permintaan diasumsikan dengan bentuk fungsi kuadrat, kerusakan yang terjadi menjadi sangat kecil dan konstan.

Pada tahun 1983, pertimbangan penurunan permintaan secara eksponensial untuk model persediaan pertama kali diusulkan oleh [9]. Dalam penelitian tersebut mempertimbangkan penurunan permintaan secara eksponensial untuk model persediaan yang mendapatkan nilai optimal pada fungsi persediaan yang konstan. Berdasarkan penelitian tersebut persamaan eksponensial yang digunakan dalam asumsi tingkat permintaan pada model persediaan dalam penelitian ini sebagai berikut:

$$D(t) = Ae^{-\alpha t} \quad t \geq 0 \qquad (2.20)$$

Dimana $A > 0$ adalah permintaan awal dan α berlaku $0 < \alpha < \theta$ adalah konstanta positif yang akan mempengaruhi laju permintaan.

2.5 Kestabilan

Sebelum membahas tentang kestabilan, terlebih dahulu dibahas tentang ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.5.1 Diberikan persamaan diferensial orde 1 yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $x(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\bar{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$ disebut titik ekuilibrium[10].

Untuk memahami definisi di atas, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.4:

Tentukan titik ekuilibrium dari persamaan berikut:

$$\dot{x} = 2x$$

Penyelesaian:

Diketahui

$$\dot{x} = 2x$$

Maka, diperoleh titik ekuilibriumnya: $\bar{x} = 0$

Definisi titik ekuilibrium di atas diberikan untuk memudahkan dalam memahami pengertian dari kestabilan, diberikan definisi tentang kestabilan sebagai berikut:

Definisi 2.5.2 Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x_0} - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x_0}) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists\ \boldsymbol{\delta} > 0$ sehingga $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x_0}) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x_0} - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ tak stabil jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil [10].

Untuk memahami definisi di atas, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.5:

Tentukan kestabilan dari persamaan differensial berikut $\dot{x} = -2x$ dengan titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$

Penyelesaian:

Sebelum dianalisa kestabilan, diberikan solusi sebagai berikut:

$$\dot{x} = -2x$$

$$\frac{dx}{dt} = -2x$$

$$dx = -2x\,dt$$

$$\frac{dx}{x} = -2\,dt$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int -2\,dt$$

$$\ln x + C_1 = -2t + C_2$$

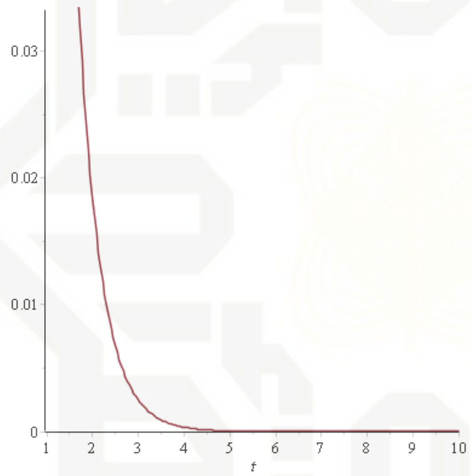
$$\ln x = -2t + C$$

Sehingga:

$$x = e^{-2t+C}$$

$$x = Ce^{-2t}$$

Selanjutnya, untuk melihat kecenderungan e^{-2t} dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 2.2 Grafik fungsi $f(t) = e^{-2t}$

Berdasarkan Gambar 2.2 jika $t \to 10$ maka $x \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = -2x$ stabil asimtotik karena solusinya menuju 0.

BAB III

METODE PENELITIAN

Penulisan tugas akhir ini membahas penyelesaian sistem kendali optimal dengan penurunan barang. Dalam penelitian ini akan dilakukan tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Diketahui persamaan diferensial dinamik untuk penurunan barang sebagai berikut:
   $\dot{I} = P(t) - Ae^{-\alpha t} + vI(t)$
   Kemudian berdasarkan Persamaan (2.14) diketahui fungsi tujuan untuk kasus penurunan barang pada waktu berhingga adalah sebagai berikut:
   $J = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{h\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2\right\} dt$
2. Dibentuk persamaan Hamilton berdasarkan persamaan differensial dinamik dan fungsi tujuan pada Langkah 1.
3. Persamaan Hamilton yang didapat pada Langkah 2 dapat dibentuk persamaan Lagrange.
4. Selanjutnya berdasarkan Langkah 2 dan 3, dicari syarat-syarat kondisi optimal, yaitu $H_p = 0$, $L_I = -\dot{\lambda}$, dan $L_p = 0$.
5. Berdasarkan Langkah 4, didapatkan fungsi kendali yaitu tingkat produksi $P(t)$. Selanjutnya tingkat produksi $P(t)$ yang telah diperoleh disubstitusikan kepersamaan differensial dinamik pada Langkah 1.
6. Selanjutnya, persamaan differensial dinamik yang telah diperoleh pada Langkah 5 diturunkan lagi terhadap kondisi waktu yang ditetapkan untuk memperoleh fungsi persediaan barang yang optimal $I(t)$.
7. Kemudian akan dilakukan simulasi numerik dengan parameter pada persamaan tingkat persediaan barang yang optimal $I(t)$.
8. Dari hasil simulasi numerik tersebut didapatkan grafik yang sudah dicari dengan menggunakan aplikasi Maple, dan dalam grafik dapat dilihat kestabilan pada tingkat persediaan.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan pada Bab IV, diperoleh kesimpulan bahwa berdasarkan persamaan diferensial system dinamik untuk kasus penurunan barang dengan fungsi permintaan berupa Eksponensial pada waktu berhingga, diperoleh persamaannya sebagai berikut.

$\dot{I} = P(t) - Ae^{-\alpha t} + vI(t)$ D;

Dengan fungsi tujuan dari model persediaan barang yang mengalami penurunan sebagai berikut.

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left\{ h\left[I - \hat{I}\right]^2 + K\left[P - \hat{P}\right]^2 \right\} dt$$

Selanjutnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Persamaan tingkat persediaan barang yang optimal pada model kerusakan barang pada persediaan yang mengalami *Eksponential Declining Demand* untuk waktu berhingga, yaitu:
   a. Untuk kasus pertama, selisih rata-rata kenaikan dan penurunan persediaan sebagai konstanta, diperoleh tingkat persediaan barang yang optimal sebagai berikut:

   $$I(t) = c_1 e^{rt} + c_2 e^{-rt} + Q(t)$$

   Dengan

   $$Q(t) = \frac{\frac{h\hat{I}}{K} + v\left(-\hat{P} + Ae^{-\alpha t}\right) - \left(A\alpha e^{-\alpha t}\right)}{\left(\frac{h}{K} + v^2\right)}$$

b. Untuk kasus kedua, selisih rata-rata kenaikan, penurunan persediaan dan biaya sebagai konstanta, diperoleh tingkat persediaan barang yang optimal sebagai berikut:

$$I(t) = (c_1 + v_1)e^{k_1 t} + (c_2 + v_2)e^{-k_2 t} + \frac{h}{Kk_1^2}\hat{I}$$

2. Kestabilan model Matematika dari kerusakan barang pada persediaan yang mengalami *Eksponential Declining Demand* untuk waktu berhingga, yaitu:

a. Untuk kasus pertama, selisih rata-rata kenaikan dan penurunan persediaan sebagai konstanta, diperoleh nilai konstanta c_1 dan c_2 sebagai berikut:

$$c_1 = \frac{(v+r)e^{-rt_2}(M - Q(t_1)) - e^{-rt_1}\left(\dot{Q}(t_2) - \hat{P} + Ae^{-\alpha t} - vQ(t_2)\right)}{(e^{rt_1})((v+r)e^{-rt_2}) - (e^{-rt_1})((v-r)e^{rt_2})}$$

dan

$$c_2 = \frac{-(v-r)e^{rt_2}(M - Q(t_1)) + e^{rt_1}\left(\dot{Q}(t_2) - \hat{P} + Ae^{-\alpha t} - vQ(t_2)\right)}{(e^{rt_1})((v+r)e^{-rt_2}) - (e^{-rt_1})((v-r)e^{rt_2})}$$

Kemudian, dari hasil konstanta c_1 dan c_2 dapat dianalisis kestabilan untuk $t \in [t_1, t_2]$ dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh kepersamaan

$$I(t) = c_1 e^{rt} + c_2 e^{-rt} + \frac{\frac{h\hat{I}}{K} + v(-\hat{P} + Ae^{-\alpha t}) - (A\alpha e^{-\alpha t})}{\left(\frac{h}{K} + v^2\right)}.$$

Sehingga diperoleh kestabilan untuk $t \to t_2$ jika persamaan tingkat persediaan barang yang optimal $I(t)$ menuju kesatu nilai.

b. Untuk kasus kedua, selisih rata-rata kenaikan, penurunan persediaan dan biaya sebagai konstanta, diperoleh nilai konstanta c_1 dan c_2 sebagai berikut:

$$c_1 = \frac{\left((v+k_1)e^{-k_1t_2}\right)\left(M-\left(v_1e^{k_1t_1}+v_2e^{-k_1t_1}+\dfrac{h\widehat{I}}{Kk_1{}^2}\right)\right)+\left(e^{-k_1t_1}\right)\left(\begin{array}{l}(v-k_1)v_1e^{k_1t_2}+(v+k_1)v_2e^{-k_1t_2}-\dfrac{d}{dt}(v_1)e^{k_1t_2}\\ -\dfrac{d}{dt}(v_2)e^{-k_1t_2}+\widehat{P}-(Ae^{-\alpha t})+\dfrac{vh\widehat{I}}{Kk_1{}^2}\end{array}\right)}{\left(e^{k_1t_1}\right)\left((v+k_1)e^{-k_1t_2}\right)-\left(e^{-k_1t_1}\right)\left((v-k_1)e^{k_1t_2}\right)}$$

dan

$$c_2 = \frac{\left(-(v-k_1)e^{k_1t_2}\right)\left(M-\left(v_1e^{k_1t_1}+v_2e^{-k_1t_1}+\dfrac{h\widehat{I}}{Kk_1{}^2}\right)\right)-\left(e^{k_1t_1}\right)\left(\begin{array}{l}(v-k_1)v_1e^{k_1t_2}+(v+k_1)v_2e^{-k_1t_2}-\dfrac{d}{dt}(v_1)e^{k_1t_2}\\ -\dfrac{d}{dt}(v_2)e^{-k_1t_2}+\widehat{P}-(Ae^{-\alpha t})+\dfrac{vh\widehat{I}}{Kk_1{}^2}\end{array}\right)}{\left(e^{k_1t_1}\right)\left((v+k_1)e^{-k_1t_2}\right)-\left(e^{-k_1t_1}\right)\left((v-k_1)e^{k_1t_2}\right)}$$

Kemudian, dapat dianalisis kestabilan untuk $t \in [t_1, t_2]$ dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh kepersamaan $I(t) = (c_1 + v_1)e^{k_1t} + (c_2 + v_2)e^{-k_2t} + \dfrac{h}{Kk_1^2}\hat{I}$ sehingga diperoleh kestabilan untuk $t \to t_2$ jika persamaan tingkat persediaan barang yang optimal $I(t)$ menuju kesatu nilai.

5.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan penelitian, maka penulis merekomendasikan beberapa saran sebagai berikut:

a. Dilakukan penelitian lanjutan mengenai kasus kenaikan barang dengan fungsi permintaan dan fungsi kerusakan yang sama.
b. Dilakukan penelitian lanjutan mengenai kasus kenaikan dan penurunan barang untuk fungsi permintaan dengan fungsi linier.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Affandi, Faisal P, dan Y. Yulida. "Kendali Optimal dari Sistem Inventori dengan Peningkatan dan Penurunan Barang". *Jurnal MIPA. Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lambung Mangkurat*, 2015.

[2] Limansyah, T. "Analisis Model Persediaan Barang EOQ dengan Mempertimbangkan Faktor Kadaluarsa dan Faktor All Unit Discount". *Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat, Universitas Katolik Parahyangan*, 2011.

[3] Fadli, A dan Erwin Harahap. "Model Persediaan untuk Barang *Deteriorasi* dengan *Exponential Declining Demand, Time- Varying Holding Cost* dan *Shortage*". *Jurnal MIPA* Vol. 20, No. 2. *Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, 2021.

[4] Andiraja, Nilwan and Nidia Mindiyarti. "Kendali Optimal pada Model Persediaan Barang yang Mengalami *Weibull Deterioration* pada Waktu Berhingga". *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol. 6, No. 2, 2020.

[5] Ross, Shepley L. *Differential Equations, Third Edition*. New York: University of New Hampshire, 1984.

[6] Xie, Wei-Chau. *Differential Equations for Engineers*. New York: University of Waterloo Cambridge, 2010.

[7] Ogata, Katsuhiko. *Discrete Time Control System.* New Jersey: Prentice-Hall, 1995.

[8] Lewis, F. L. *Optimal Control*. Toronto: John Wiley & Sons, Inc, 1995.

[9] Hollter, R.H dan K. L. Mak. "Inventory replenishment policies for deteriorating items in a declining market". *International Journal of Prouction Research.*, Vol. 21, No. 6, 1983.

[10] Olsder, GJ. *Mathematical System Theory*. Delft: University of Technology, Delft, 1994.

[11] Fadli, Sudrajat dan E. Lesmana. "An Inventory Model for Deteriorating Items with Exponential Declining Demand and Return". *Prodi pascasarjana Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, 2020.

[12] Tadj, Lotfi, dkk. "Optimal Control of an Inventory System with Ameliorating and Deteriorating Items". *Sciences*, 2008.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Sri Eka Wahyuni dengan panggilan Eka dan dilahirkan di Kabanjahe, Sumatera Utara pada tanggal 10 Oktober 1999. Penulis bertempat tinggal di Jl. Garuda Sakti Km 1,5 Gg.Travo. Penulis merupakan anak pertama dari Ayahanda yang bernama Bambang Susanto dan Ibunda bernama Susilawati. Penulis memiliki satu adik yang bernama Haditya Rayhansyah.

Penulis memulai pendidikan Sekolah Dasar (SD) pada tahun 2006 dan lulus tahun 2012 di SDN 040443 Kabanjahe, Sumatera Utara. Kemudian melanjutkan pendidikan di Sekolah Menengah Pertama (SMP) pada tahun 2012-2015 di SMP Negeri 1 Kabanjahe, Sumatera Utara. Selanjutnya pada jenjang Sekolah Menengah Atas (SMA) pada tahun 2015-2018 di Madrasah Aliyah Negeri Kabanjahe, Sumatera Utara. Dan akhirnya melanjutkan studi pada tahun 2018 di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau Fakultas Sains dan Teknologi Program Studi Matematika. Dalam masa perkuliahan penulis telah melaksanakan proses belajar terkait program studi matematika, melaksanakan kegiatan Kerja Praktek (KP).