PELABELAN $L(3,2,1)$ PADA GRAF HASIL KALI KORONA C_m DAN P_3

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

WINDYLIA SAPUTRI
11950420057

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2023

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
iversity of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERSETUJUAN

PELABELAN $L(3,2,1)$ PADA GRAF HASIL KALI KORONA C_m DAN P_3

TUGAS AKHIR

oleh:

WINDYLIA SAPUTRI
11950420057

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 12 Januari 2023

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Sarbaini, M.Si.**
NIP. 19730818 200604 1 003	**NIP. 19921207 202012 1 011**

ultan Syarif Kasim Riau

UIN SUSKA RIAU

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PENGESAHAN

PELABELAN $L(3,2,1)$ PADA GRAF HASIL KALI KORONA C_m DAN P_3

TUGAS AKHIR

oleh:

WINDYLIA SAPUTRI
11950420057

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 12 Januari 2023

Pekanbaru, 12 Januari 2023
Mengesahkan

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Sekretaris	**: Sarbaini, M.Si.**
Anggota I	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si.**
Anggota II	**: Ade Novia Rahma, M.Mat.**

an Syarif Kasim Riau

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan dibawah ini:

Nama	: Windylia Saputri
NIM	: 11950420057
Tempat / Tgl. Lahir	: Bukit Gading, 24 Juni 2000
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Program Studi	: Matematika
Judul Tugas Akhir	: Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Hasil Kali Korona C_m dan P_3

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa:

1. Penulisan Skiripsi dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu Skripsi saya ini, saya menyatakan bebas dari plagiat.
4. Apabila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan Skripsi saya tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan perundang-undangan.

Demikianlah Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun.

Pekanbaru, 12 Januari 2023

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL

WINDYLIA SAPUTRI
11950420057

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Alhamdulillahirabbil'alaamiin, segala syukur kepada Allah Subhaannahu Wata'ala atas nikmat, rahmat dan karunianya sehingga saya dapat menyelesaikan skripsi sederhana ini. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Shalallahu 'Alaihi Wasallam.

Saya persembahkan karya sederhana ini kepada orang yang sangat saya sayangi.

Bapak dan Ibu Tercinta

Sebagai salah satu bentuk *birrul walidain* dan rasa terimakasih yang tak terhingga, dipersembahkan karya kecil ini kepada Bapak (Sriyanto) dan Ibu (Harmini)

Orang Terdekat

Terimakasih untuk adik kecil saya Wildan dan seluruh keluarga besar yang telah memberi semangat dan dukungan kepada saya.

Sahabat-Sahabatku

Terimakasih untuk sahabat-sahabatku yang telah memberi semangat kepadaku.

Dosen Pembimbing Tugas Akhir

Bapak Sarbaini, M.Si. sebagai dosen pembimbing skripsi saya. Terimakasih banyak kepada bapak yang telah membantu dan mengarahkan saya hingga skripsi ini selesai.

UIN SUSKA RIAU

جَزَاكُمُ اللهُ خَيْرًا

Windylia Saputri

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
   a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
   b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

PELABELAN $L(3,2,1)$ PADA GRAF HASIL KALI KORONA C_m DAN P_3

WINDYLIA SAPUTRI
11950420057

Tanggal Sidang : 12 Januari 2023
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Pada penelitan ini akan ditentukan pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf hasil kali korona graf lingkaran C_m untuk $m \geq 3$ dan graf lintasan P_3. Pelabelan $L(3,2,1)$ merupakan suatu fungsi f dari himpunan titik ke himpunan bilangan asli yang memiliki aturan jika $d(u,v) = 1$ maka $|f(u) - f(v)| \geq 3$, jika $d(u,v) = 2$ maka $|f(u) - f(v)| \geq 2$, dan jika $d(u,v) = 3$ maka $|f(u) - f(v)| \geq 1$. Penentuan nilai pelabelan $L(3,2,1)$ dilakukan dengan menentukan batas bawah dan batas atas menggunakan derajat maksimum Δ. Hasil penelitian ini diperoleh nilai pelabelan $L(3,2,1)$ dari $C_m \odot P_3$ adalah $2\Delta + 4$ untuk $m\ genap$, $2\Delta + 5$ untuk $m = 3,7$, dan $2\Delta + 6$ untuk $m\ ganjil\ dan\ m \neq 3,2$.

Kata Kunci: Derajat maksimum, Graf hasil kali korona, Pelabelan $L(3,2,1)$

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LABELING $L(3,2,1)$ OF CORONA PRODUCT GRAPH OF C_m AND P_3

WINDYLIA SAPUTRI
11950420057

Date of Final Exam : *January 12th, 2023*
Date of Graduation :

Departement of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

In this study will be determined labeling L(3,2,1) of corona product graph of circle graph C_m for $m \geq 3$ and path graph P_3. Labeling L(3,2,1) is a function f from the vertex set to the set of positive integers which has the rule that if $d(u,v) = 1$ then $|f(u) - f(v)| \geq 3$, if $d(u,v) = 2$ then $|f(u) - f(v)| \geq 2$, and if $d(u,v) = 3$ then $|f(u) - f(v)| \geq 1$. Determining labeling L(3,2,1) was conducted by determining the lower bound and upper bound using the maximum degree Δ. The results of the labeling $L(3,2,1)$ of $C_m \odot P_3$ were $2\Delta + 4$ for even m, $2\Delta + 5$ for $m \neq 3,7$, and $2\Delta + 6$ for odd m and $m \neq 3,2$.

Keywords: Maximum degree, Corona product graph, Labeling L(3,2,1)

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahirabbil'alamiin segala puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah *Subhannahu Wata'ala* yang telah memberikan rahmat dan kemudahan sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul **"Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Hasil Kali Korona C_m dan P_3"**. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad *Shallallahu 'Alaihi Wasallam* beserta keluarganya, para sahabat dan pengikutnya. Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana sains di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini, penulis banyak mendapat bimbingan, motivasi, semangat, nasihat dan masukan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan hati yang tulus penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Bapak Sarbaini, M.Si. selaku pembimbing yang selalu ada dan memberikan petunjuk serta arahan kepada penulis sehingga Tugas Akhir ini dapat diiselesaikan.
6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku ketua pada sidang Tugas Akhir penulis.

7. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si. dan Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat. selaku penguji yang banyak memberikan masukan dan saran dalam penulisan Tugas Akhir ini.
8. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc. selaku Pembimbing Akademik yang memberi arahan dan nasihat kepada penulis dari awal perkuliahan.
9. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
10. Kedua orang tua terhebat dan tersabar di dunia Ayahanda Sriyanto dan Ibunda Harmini serta adik tercinta Wildan yang tak henti-hentinya memberikan do'a, semangat, dan nasihat .
11. Sahabat seperjuangan dalam masa perkuliahan Fitri Wafiq Azizah.
12. Teman-teman seangkatan tahun 2019 serta kakak-kakak Program Studi Matematika.

Semoga semua kebaikan yang telah diberikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat pahala dari Allah. Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan Tugas Akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun. Akhir kata penulis ucapkan terimakasih, semoga dengan adanya Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua, aamiin.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Pekanbaru, 12 Januari 2023
Penulis,

WINDYLIA SAPUTRI
11950420057

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

DAFTAR ISI

LEMBAR PERSETUJUAN ..... **ii**
LEMBAR PENGESAHAN ..... **iii**
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL ..... **iv**
LEMBAR PERNYATAAN ..... **v**
LEMBAR PERSEMBAHAN ..... **vi**
ABSTRAK ..... **vii**
ABSTRACT ..... **viii**
KATA PENGANTAR ..... **iix**
DAFTAR ISI ..... **xi**
DAFTAR SIMBOL ..... **xiii**
DAFTAR GAMBAR ..... **xiv**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Batasan Masalah 2
1.4 Tujuan Penelitian 2
1.5 Manfaat Penelitian 2
1.6 Sistematika Penelitian 3
BAB II LANDASAN TEORI **4**
2.1 Pengertian Graf 4
2.2 Jenis-Jenis Graf 4
2.3 Terminologi Graf 7
2.4 Operasi Kali Korona 8
2.5 Pelabelan Graf 8
2.6 Pelabelan $\boldsymbol{L(3,2,1)}$ Graf Lintasan $(\boldsymbol{Pn})$ 10
2.7 Pelabelan $\boldsymbol{L(3,2,1)}$ Graf Lingkaran $(\boldsymbol{Cm})$ 11
BAB III METODE PENELITIAN **14**
BAB IV PEMBAHASAN **15**
4.1 Pelabelan $\boldsymbol{L(3,2,1)}$ pada Graf $\boldsymbol{Cm \odot P_3}$ 15

BAB V PENUTUP 69
5.1 Kesimpulan 69
5.2 Saran 69
DAFTAR PUSTAKA 70
DAFTAR RIWAYAT HIDUP 71

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR SIMBOL

$G(V,E)$	: Graf G dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi E
$V(G)$	: Himpunan titik tak kosong dari graf $G(V,E)$
$E(G)$	: Himpunan sisi dari graf $G(V,E)$
$\lambda_{3,2,1}$	: Pelabelan $L(3,2,1)$
P_n	: Graf lintasan dengan n titik
C_m	: Graf lingkaran m titik
$C_m \odot P_n$	: Graf hasil kali korona C_m dan P_n
v_i	: Titik ke i
v_i^j	: Titik ke i,j
$d(v)$	: Derajat di titik v
$d(u,v)$	: Jarak titik u ke titik v
Δ	: Derajat maksimum
$f(u)$	: fungsi atau pemetaan di titik u
$f(v)$	: fungsi atau pemetaan di titik v
$\lvert f(u)-f(v)\rvert$	: Selisih label dari titik u ke titik v

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf Sederhana……4
Gambar 2.2 Graf Tak Sederhana……..5
Gambar 2.3 Graf Berarah……5
Gambar 2.4 Graf Tak-Berarah……5
Gambar 2.5 Graf Lengkap K_3 dan K_4……..6
Gambar 2.6 Graf Lintasan P_4……...6
Gambar 2.7 Graf Lingkaran C_5 dan C_6……6
Gambar 2.8 Graf Bertetangga…… 7
Gambar 2.9 Graf Bersisian……...7
Gambar 2.10 Derajat Sebuah Titik pada Graf……..7
Gambar 2.11 Graf Hasil Kali Korona pada Graf Lintasan……...8
Gambar 2.12 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf $P_2, P_3, P_5, dan\ P_7$……...11
Gambar 2.13 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf $C_3, C_4, C_5, C_6\ dan\ C_7$…… 13
Gambar 4.1 Ilustrasi Graf $C_m \odot P_3$……15
Gambar 4.2 Pelabelan $L(3,2,1)$ graf $C_m \odot P_3$……16
Gambar 4.3 Pelabelan $L(3,2,1)$ Graf $C_4 \odot P_3$……25
Gambar 4.4 Pelabelan $L(3,2,1)$ Graf $C_6 \odot P_3$……36
Gambar 4.5 Pelabelan $L(3,2,1)$ Graf $C_{10} \odot P_3$……...36
Gambar 4.6 Pelabelan $L(3,2,1)$ Graf $C_3 \odot P_3$……42
Gambar 4.7 Pelabelan $L(3,2,1)$ Graf $C_7 \odot P_3$……56
Gambar 4.8 Pelabelan $L(3,2,1)$ Graf $C_5 \odot P_3$……66
Gambar 4.9 Pelabelan $L(3,2,1)$ Graf $C_{11} \odot P_3$……...68
Gambar 4.10 Pelabelan $L(3,2,1)$ Graf $C_9 \odot P_3$……...68

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Tahun 1736 menjadi sejarah pertama kali ditemukannya teori graf oleh matematikawan dari Swiss yaitu Leonard Euler. Saat itu ada tujuh jembatan yang disebut jembatan Konigsberg, kemudian muncul masalah bahwa apakah ada kemungkinan untuk melalui tujuh jembatan tersebut hanya satu kali lalu berakhir di tempat semula. Euler memodelkan masalah dengan memisalkan sebagai titik atau simpul *(vertex)* untuk daratan dan garis atau sisi *(edge)* untuk jembatannya [1]. Dalam kehidupan, graf dimanfaatkan untuk menggambarkan berbagai jenis struktur yang ada untuk visualisasi objek-objek supaya lebih mudah dipahami. Teori graf dapat diterapkan dalam pembuatan struktur organisasi, penjadwalan mata kuliah, rangkaian listrik, bagan alir dan lain-lain.

Penelitian yang mengkaji teori graf semakin berkembang dan salah satu topik yang sering dibahas yaitu pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan label atau nilai yang diberikan kepada komponen graf tersebut dengan bilangan bulat positif. Berdasarkan komponen yang diberi label, pelabelan terbagi menjadi tiga jenis. Jika himpunan titik sebagai himpunan asal disebut pelabelan titik, jika himpunan sisi sebagai himpunan asal disebut pelabelan sisi, dan jika keduaya (himpunan titik dan sisi) sebagai himpunan asal maka disebut pelabelan total [2].

Terdapat berbagai macam pelabelan graf, di antaranya pelabelan $L(3,2,1)$. Griggs dan Yeh memperkenalkan pelabelan $L(3,2,1)$ yang menjadi pengembangan dari pelabelan $L(2,1)$. Pelabelan $L(3,2,1)$ dapat dibedakan menjadi dua jenis yaitu pelabelan titik $L(3,2,1)$ dengan titik sebagai unsur yang dilabeli dan pelabelan sisi $L(3,2,1)$ dengan sisi sebagai unsur yang dilabeli. Pelabelan titik $L(3,2,1)$ lebih umum ditulis sebagai pelabelan $L(3,2,1)$. Pelabelan $L(3,2,1)$ memiliki ketentuan pemberian label dengan selisih minimal 3 untuk dua titik berjarak satu, label dengan selisih minimal 2 untuk dua titik berjarak dua, dan label dengan selisih minimal 1 untuk dua titik berjarak tiga [3].

UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Berbagai penelitian telah dilakukan yang berkaitan dengan pelabelan $L(3,2,1)$. Penelitian [4] membahas pelabelan $L(3,2,1)$ graf *middle* pada beberapa graf khusus, diperoleh hasil pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *middle* dari graf P_n mempunyai $\lambda_{3,2,1}(M(P_2)) = 6$, $\lambda_{3,2,1}(M(P_3)) = 10$, $\lambda_{3,2,1}(M(P_4)) = 12$, $\lambda_{3,2,1}(M(P_5)) = 13$, dan $\lambda_{3,2,1}(M(P_6)) = 13$. Hasil untuk pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *middle* dari graf C_n yaitu $\lambda_{3,2,1}(M(C_3)) = 16$, $\lambda_{3,2,1}(M(C_4)) = 14$, dan $\lambda_{3,2,1}(M(C_5)) = 15$. Kemudian hasil untuk pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *middle* dari graf S_n adalah $\lambda_{3,2,1}(M(S_3)) = 13$.

Selanjutnya penelitian [5] tentang pelabelan $L(2,1)$ dan $L(3,2,1)$ pada graf bintang terkait graf roda. Hasil yang didapatkan untuk pelabelan $L(2,1)$ yaitu $\lambda_{2,1}(SW(n,r)) \leq r + n + 1$ dan hasil untuk pelabelan $L(3,2,1)$ yaitu $\lambda_{3,2,1}(SW(n,r)) \leq 2r + 2n + 1$. Lalu penelitian [6] yang meneliti pelabelan $L(3,2,1)$ dan $L(4,3,2,1)$ pada graf interval dan memperoleh hasil pelabelan $L(3,2,1)$ dengan batas atas yaitu $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 6\Delta - 3$ dan hasil pelabelan $L(4,3,2,1)$ dengan batas atas yaitu $\lambda_{4,3,2,1}(G) \leq 10\Delta - 4$. Berdasarkan penelitian tersebut, penulis tertarik membahas lebih lanjut tentang pelabelan $L(3,2,1)$ untuk jenis graf lainnya. Oleh karena itu, penelitian ini berjudul **"Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Hasil Kali Korona C_m dan P_3".**

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah di penelitian ini adalah "Bagaimana rumus umum pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf hasil kali korona C_m dan P_3?".

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dikaji dalam penelitian ini adalah menentukan rumus umum pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf hasil kali korona C_m dan P_3 untuk $m \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah memperoleh rumus umum pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf hasil kali korona C_m dan P_3.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah menambah ilmu tentang cara mendapatkan pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf hasil kali korona C_m dan P_3.

1.6 Sistematika Penelitian

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup 5 bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini mencakup latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini mencakup teori-teori yang menjadi pendukung dalam proses penelitian tentang pengertian graf, jenis-jenis graf, terminologi graf, operasi korona pada graf dan pelabelan graf.

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini mencakup langkah-langkah yang dipakai dalam proses penelitian untuk memperoleh hasil akhir dari pelabelan graf, diawali dari penentuan masalah, perumusan masalah hingga mendapatkan kesimpulan.

BAB IV PEMBAHASAN

Pada bab ini berisikan pembahasan tentang hasil peneltian Tugas Akhir.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini berisikan tentang kesimpulan dari hasil pembahasan yang dilakukan pada Bab IV dan saran dari penulis.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Pengertian Graf

Definisi 2.1 [1] Graf G didefenisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, V merupakan himpunan tak kosong dari titik-titik dan E merupakan himpunan sisi dengan sepasang titik yang dihubungkan.

Berdasarkan Definisi 2.1, suatu graf memungkinkan tidak memiliki sisi, namun minimal harus ada satu titik. Graf yang hanya mempunyai satu titik dan sisinya tidak ada disebut graf trivial.

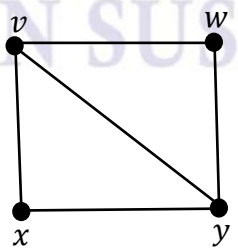
Label pada titik dan sisi suatu graf dapat berupa huruf $(a, b, c, \dots)$, bilangan asli $(1,2,3, \dots)$ atau gabungan keduanya. Misalkan sisi suatu graf dengan titik u terhubung ke titik v, dinyatakan dengan pasangan (u, v) yang disebut sisi dari $E(G) = (e_1, e_2, \dots)$. Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang terhubung antara titik u dan titik v, maka dinotasikan dengan $e = (u, v)$.

2.2 Jenis-Jenis Graf

Jenis graf berdasarkan ada atau tidaknya gelang (sisi rangkap) pada suatu graf, yaitu:

1. Graf Sederhana *(Simple Graph)*

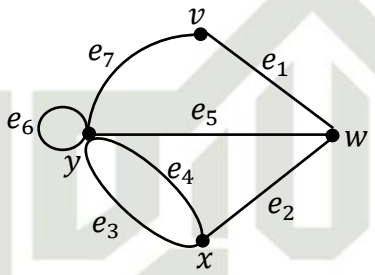
Graf sederhana yaitu graf yang tidak terdapat gelang (sisi rangkap). Graf sederhana dapat juga didefinisikan $G = (V, E)$ yang berisi himpunan titik yang tak kosong dan E adalah himpunan sisi dari pasangan tak berurut yang tak sama.



Gambar 2.1 Graf Sederhana

2. Graf Tak-Sederhana *(Unsimple Graph)*

Graf tak sederhana yaitu graf yang terdapat gelang (sisi rangkap). Graf tak sederhana terbagi ke dalam dua jenis, yaitu graf rangkap *(multigraph)* dan graf semu *(pseudograph)*. Graf rangkap yaitu graf yang memiliki sisi rangkap yang menghubungkan sepasang simpul sebanyak dua atau lebih, sedangkan graf semu yaitu graf yang sisinya bisa menghubungkan ke dirinya sendiri.

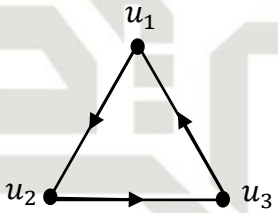


Gambar 2.2 Graf Tak Sederhana

Jenis graf berdasarkan orientasi arah pada sisi graf, yaitu:

1. Graf Berarah *(Directed Graph atau Digraph)*

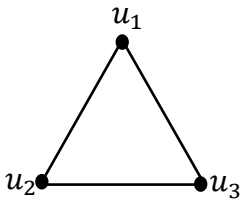
Graf berarah yaitu graf yang memiliki orientasi arah di setiap sisinya dan di antara dua buah simpulnya tidak terdapat sisi yang berlawanan arah (tidak terdapat sisi rangkap).



Gambar 2.3 Graf Berarah

2. Graf Tak-Berarah *(Undirected Graph)*

Graf tak-berarah yaitu graf yang tidak memiliki orientasi arah pada setiap sisinya, sehingga tidak memperhatikan urutan pasangan titik dari sisi yang menghubungkannya.



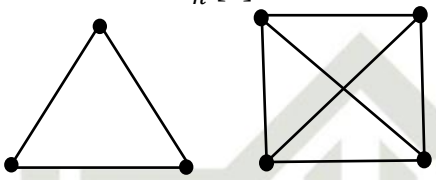
Gambar 2.4 Graf Tak-Berarah

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Terdapat graf sederhana khusus yang sering dijumpai, yaitu:

1. Graf Lengkap *(Complete Graph)*

Graf lengkap yaitu graf sederhana yang setiap simpul terdapat sisi yang menghubungkan ke semua simpul lainnnya. Misalkan n adalah banyak simpul pada graf lengkap, maka dinotasikan K_n [7].



Gambar 2.5 Graf Lengkap K_3 dan K_4

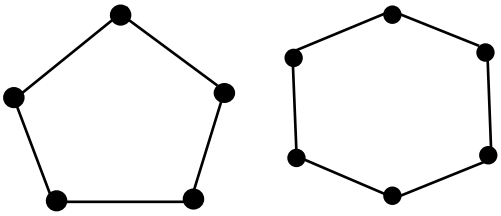
2. Graf Lintasan *(Path Graph)*

Graf lintasan adalah graf yang terbentuk dari titik-titik yang terhubung, kemudian hanya ada satu sisi yang melewatinya [8]. Graf lintasan berorde $n \geq 1$, dinotasikan dengan $P_n = (V, E)$, merupakan suatu graf tak kosong yang titik-titiknya dapat dilabeli dengan $v_1, v_2, \dots, v_n$ sehingga $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$. Panjang graf lintasan didefinisikan sebagai banyaknya sisi pada graf lintasan tersebut.

Gambar 2.6 Graf Lintasan P_4

3. Graf Lingkaran *(Cycle Graph)*

Graf lingkaran yaitu graf sederhana memiliki derajat dua pada setiap simpulnya. Graf lingkaran berorde $n \geq 3$ dinotasikan dengan C_n [7]. Jika $P_n = v_1, v_2, \dots, v_n$ merupakan graf lintasan dengan $n \geq 3$, maka graf lingkaran berorde n adalah graf yang diperoleh dari graf lintasan P_n dengan menambah satu sisi dari v_n ke v_1. Panjang dari suatu graf lingkaran merupakan banyak sisi atau titik dari graf lingkaran tersebut.



Gambar 2.7 Graf Lingkaran C_5 dan C_6

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

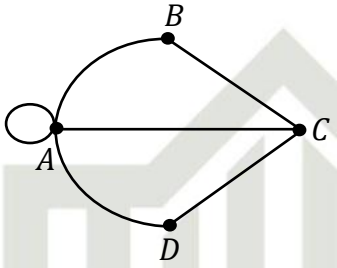
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

2.3 Terminologi Graf

Ada beberapa terminologi graf yang sering dipakai, yaitu:

1. Bertetangga *(Adjacent)*

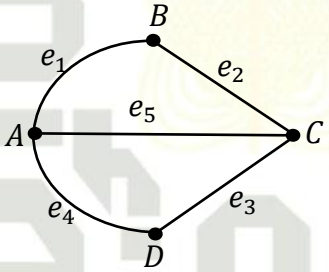
Apabila terdapat sisi yang terhubung ke dua buah titik, maka kedua titik itu disebut bertetangga.



Gambar 2.8 Graf Bertetangga

2. Bersisian

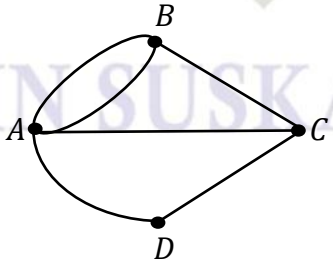
Sisi e disebut bersisisan terhadap titik u dan v jika e adalah sisi yang terkait dengan kedua titik tersebut.



Gambar 2.9 Graf Bersisian

3. Derajat *(Degree)*

Apabila sebuah titik memiliki beberapa sisi yang terhubung, maka jumlah sisi yang terhubung merupakan derajat dari titik tersebut.



Gambar 2.10 Derajat Sebuah Titik pada Graf

4. Graf Berbobot *(Weighted Graph)*

Graf berbobot yaitu graf yang mempunyai sisi-sisi yang diberi harga (bobot). Bobot pada setiap sisi bisa berbeda sesuai dengan pemodelan masalah

UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

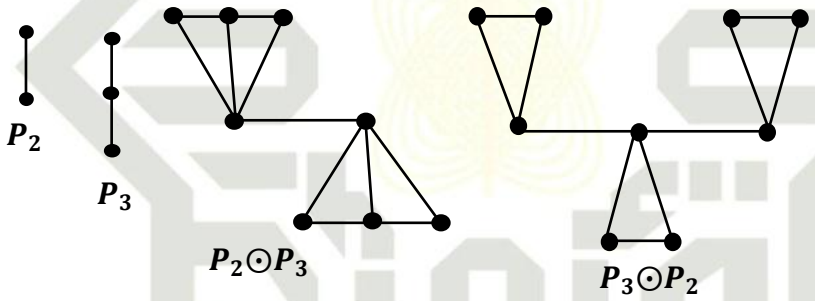
pada graf. Istilah graf berbobot biasanya dikaitkan dengan graf berlabel, namun pada istilah graf berlabel juga bisa diberikan pada titik dari suatu graf.

5. Graf Terhubung *(Connected Graph)*

Apabila terdapat lintasan dari titik u ke titik v, maka graf $G = (u, v)$ disebut graf terhubung.

2.4 Operasi Kali Korona

Operasi hasil korona $G \odot H$ dari dua buah graf G dan H yang didefinisikan oleh Frucht dan Harary yaitu graf yang didapatkan dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G yang memiliki $V(G)$ titik dan mendupikat graf H sebanyak $V(G)$, selanjutnya titik ke-i dihubungkan dari graf G ke setiap titik hasil duplikat graf H ke-i [8]. Operasi korona memiliki sifat tidak komutatif [9]. Dapat ditunjukkan bahwa graf korona $G \odot H$ dan $H \odot G$ mempunyai hasil berbeda.



Gambar 2.11 Graf Hasil Kali Korona pada Graf Lintasan

2.5 Pelabelan Graf

Tahun 1964 menjadi awal mula pelabelan graf diperkenalkan oleh matematikawan bernama Sadlack, kemudian tahun 1966 oleh Stewart dan tahun 1967 oleh Kotzig dan Rosa. Pelabelan graf adalah suatu fungsi bijektif (satu-satu dan pada), memiliki pemetaan yang memetakan unsur-unsur graf (sisi, titik, atau keduanya) ke suatu bilangan (umumnya bilangan asli) [10]. Fungsi f yang memetakan unsur-unsur graf ke dalam bilangan asli disebut fungsi satu-satu jika domain mempunyai tepat satu pasangan di kodomain dan disebut fungsi pada jika semua anggota di kodomain mempunyai pasangan di domainnya serta anggota di domain boleh mempunyai pasangan yang sama di kodomain. Banyak

UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak Cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

permasalahan yang dapat diselesaikan dengan pelabelan graf, salah satunya permasalahan frekuensi radio dengan pelabelan $L(2,1)$.

Berawal pada tahun 1992, penelitian [11] memodelkan permasalahan frekuensi radio dalam bentuk graf yaitu pelabelan $L(2,1)$. Pelabelan $L(2,1)$ merupakan fungsi $f: V \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ sehingga untuk setiap $u, v \in V$, berlaku:

$$|f(u) - f(v)| \geq \begin{cases} 2, \text{jika } d(u,v) = 1 \\ 1, \text{jika } d(u,v) = 2 \end{cases}$$

Kemudian tahun 2005, penelitian [3] mengembangkan permasalahan ini dengan pelabelan $L(3,2,1)$. Pelabelan $L(3,2,1)$ merupakan fungsi $f: V \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ sehingga untuk setiap $u, v \in V$, berlaku:

$$|f(u) - f(v)| \geq \begin{cases} 3, \text{jika } d(u,v) = 1 \\ 2, \text{jika } d(u,v) = 2 \\ 1, \text{jika } d(u,v) = 3 \end{cases}$$

Defenisi 2.2 [3] Misalkan $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pelabelan k-$L(3,2,1)$ merupakan pelabelan $L(3,2,1)$ dengan setiap label yang digunakan tidak lebih besar daripada k. Bilangan $L(3,2,1)$ pada graf G, dinotasikan dengan $\lambda_{3,2,1}(G)$, merupakan bilangan terkecil k sehingga graf G memiliki pelabelan k-$L(3,2,1)$.

Teorema 2.1 [3] Graf lengkap yang memiliki n titik, maka berlaku $\lambda_{3,2,1}(K_n) = 3n - 3$.

Bukti:

Misalkan $G = ((V(G), E(G))$ graf lengkap dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan f merupakan pelabelan minimal pada $L(3,2,1)$ dari G dengan $f(v_i) < f(v_j)$ untuk setiap $i < j$. Kemudian, untuk $v_i, v_j \in V(G)$ dan $i \neq j$ berlaku $v_i, v_j \in E(G)$, sehingga $d(v_i, v_j) = 1$. Dengan demikian, $|f(v_i), f(v_j)| \geq 3$ untuk $v_i,\ v_j \in V(G)$ dan $i \neq j$. Karena terdapat $v_i \in V(G)$, maka $f(v_i) = 0$ sehingga $f(v_1) = 0$. Begitu juga, karena f merupakan pelabelan minimal $L(3,2,1)$ dari G untuk setiap v_i dengan $1 < i \leq n$, maka $f(v_i) \geq f(v_{i-1}) + 3$.

Sehingga,

$$\begin{aligned} f(v_n) &\geq f(v_{n-1}) + 3 \\ &\geq f(v_{n-2}) + 3(2) \\ &\geq f(v_{n-3}) + 3(3) \end{aligned}$$

$$\geq f(v_{n-3}) + 3(4)$$
$$\vdots$$
$$\geq f(v_{n-i}) + 3(n-i)$$
$$\vdots$$
$$\geq f(v_1) + 3(n-1) = 0 + 3(n-1) = 3n - 3.$$

Oleh karena itu, $\lambda_{3,2,1}(K_n) = 3n - 3$.

Teorema 2.2 [12] Untuk sebarang graf G dengan $\Delta(G) = \Delta > 0$ berlaku $\lambda_{3,2,1}(G) \geq 2\Delta + 1$. Jika $\lambda_{3,2,1}(G) = 2\Delta + 1$ dan f merupakan sebarang pelabelan $2\Delta + 1$-$L(3,2,1)$, maka untuk setiap $v \in V(G)$ dengan $d(v) = \Delta$ berlaku $f(v) \in \{0, 2\Delta + 1\}$.

2.6 Pelabelan $L(3,2,1)$ Graf Lintasan (P_n)

Teorema 2.3 [3] Setiap graf lintasan P_n yang berorde n titik, maka:

$$\lambda_{3,2,1}(P_n) = \begin{cases} 0, & jika\, n = 1; \\ 3, & jika\, n = 2; \\ 5, & jika\, n = 3,4; \\ 6, & jika\, n = 5,6,7; \\ 7, & jika\, n \geq 8. \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ adalah himpunan titik pada graf P_n sehingga v_i berdekatan dengan v_{i+1} untuk $1 \leq i \leq n$. Didefinisikan $f(v_i) = f(v_j)$ jika $i \equiv j (mod\ 8)$.

Kasus I : $n = 1$.

Ini merupakan kasus trivial.

Kasus II : $n = 2$.

Pola pelabelan $\{0,3\}$ membuktikan bahwa $\lambda_{3,2,1}(P_n) = 3$, karena penyelesaian yang lebih baik selain itu tidak ada.

Kasus III : $n = 3,4$.

Dengan kontradiksi, andaikan $\lambda_{3,2,1}(P_n) < 5$. Terdapat titik $v_i \in V$ sedemikian sehingga $f(v_1) = 0$. Jika v_i mempunyai derajat 1, misal $v_i = v_1$, maka untuk $f(v_2)$ adalah 3 dan 4, $f(v_3) \geq 5$, sehingga kontradiksi. Kemudian jika v_i mempunyai derajat 2, maka terdapat titik v_{i-1} dan v_{i+1} sedemikian sehingga

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

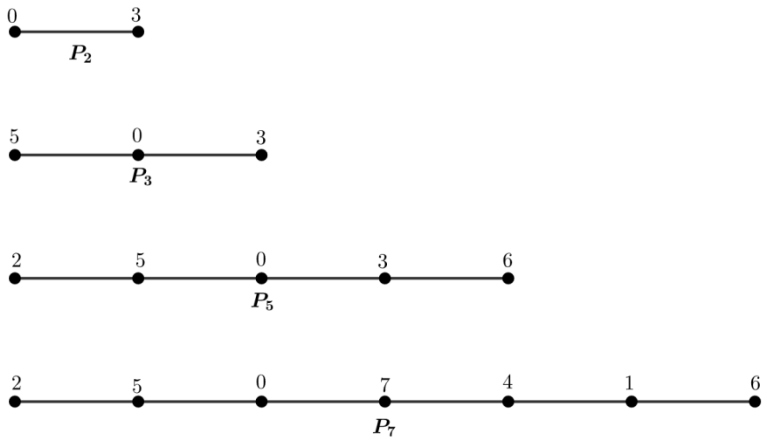
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

$f(v_{i-1}) \geq 3$ dan $f(v_{i+1}) \geq 5$, sehingga kontradiksi dengan nilai $\lambda_{3,2,1}(P_n) < 5$.

Kasus IV : $n = 5,6,7$.

Dengan kontradiksi, andaikan $\lambda_{3,2,1}(P_n) < 6$. Terdapat titik $v_i \in V$ sedemikian sehingga $f(v_i) = 0$ dan terdapat titik v_{i+1} dan v_{i+2} dan atau terdapat v_{i-1} dan v_{i-2}. Kemungkinan untuk $f(v_{i+1})$ adalah 3,4, dan 5. Jika $f(v_{i+1}) = 3$ atau $f(v_{i+1}) = 4$, maka $f(v_{i+2}) \geq 6$ sehingga kontradiksi dengan $\lambda_{3,2,1}(P_n) < 6$. Jika $f(v_{i+1}) = 5$, maka $f(v_{i+2}) = 2$. Kemudian, jika v_{i+2} memiliki derajat 2 maka terdapat v_{i+3} dan $f(v_{i+3}) > 6$, ini kontradiksi dengan $\lambda_{3,2,1}(P_n) < 6$. Sedangkan jika v_{i+2} mempunyai derajat 1 maka terdapat titik v_{i-1} dan v_{i-2}. Hanya satu kemungkinan untuk $f(v_{i-1}) = 3$, sehingga $f(v_{i-2}) \geq 6$, maka ini juga kontradiksi dengan $\lambda_{3,2,1}(P_n) < 6$. Oleh karena itu, dapat terbukti bahwa $\lambda_{3,2,1}(P_n) = 7,\ jika\ n \geq 8$.

Berikut disajikan beberapa contoh pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf lintasan.



Gambar 2.12 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf $P_2, P_3, P_5,\ dan\ P_7$

2.7 Pelabelan $L(3,2,1)$ Graf Lingkaran (C_m)

Teorema 2.4 [3] Setiap graf lingkaran C_m yang berorde m titik, untuk $m \geq 3$, maka:

$$\lambda_{3,2,1}(C_m) = \begin{cases} 6, & jika\ m = 3; \\ 7, & jika\ m\ genap; \\ 8, & jika\ m\ ganjil\ dan\ m \neq 3,7; \\ 9, & jika\ m = 7. \end{cases}$$

UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Bukti:

Misalkan $m \geq 3$ dan $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$ merupakan himpunan titik dari C_m, kemudian (v_i, v_{i+1}) dan (v_i, v_m) untuk $1 \leq i \leq m$ merupakan sisi dari C_m.

Kasus I : $m = 3$.

Graf lingkaran C_3 merupakan graf lengkap, sehingga berdasarkan Teorema 2.1 untuk graf lengkap, maka $\lambda_{3,2,1}(C_3) = 3(3) - 3 = 6$.

Kasus II : m genap.

Berdasarkan Teorema 2.3 pada graf lintasan membuktikan bahwa $\lambda_{3,2,1}(P_n) = 7$ untuk $n \geq 8$, maka untuk setiap graf lingkaran dengan m genap yaitu $\lambda_{3,2,1}(C_m) = 7$. Pelabelan untuk C_4 yaitu $f(V) = \{0,5,2,7\}$ dan C_6 yaitu $f(V) = \{0,3,6,1,4,7\}$. Dapat ditunjukkan bahwa pelabelan untuk C_4 dapat diulang sampai tak terhingga untuk C_m dengan m perkalian dari 4, dan untuk C_6 juga dapat diulang untuk setiap C_m dengan m perkalian dari 6. Kemudian, pelabelan C_4 dan C_6 memungkinkan untuk digabung menjadi pelabelan C_{10} yaitu didapatkan $f(V) = \{0,5,2,6,0,3,6,1,4,7\}$. Diketahui bahwa setiap $m \geq 4$ dapat diakui sebagai kombinasi dari perkalian positif dari 4 dan 6. Hal ini menjelaskan bahwa setiap pelabelan C_m genap terbentuk dari kombinasi yang berasal dari perkalian positif pada pola pelabelan C_4 dan C_6. Oleh karena itu, terbukti untuk m genap diperoleh $\lambda_{3,2,1}(C_m) = 7$.

Kasus III : m ganjil dan $m \neq 3,7$.

Diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(C_m) \neq 7$ untuk graf lingkaran dengan n ganjil, maka untuk setiap graf lingkaran dengan m ganjil diperoleh $\lambda_{3,2,1}(C_m) = 8$. Pelabelan graf C_5 yaitu $f(V) = \{4,0,6,2,8\}$. Dapat ditunjukkan bahwa pelabelan C_5 dapat diulang sampai tak terhingga untuk C_m dengan m perkalian dari 5. Kemudian, pelabelan C_5 dan C_4 dapat digabung menjadi pelabelan C_9 yaitu $f(V) = \{4,0,6,2,8,0,5,2,7\}$. Diketahui bahwa setiap $m \geq 9$ dan $m \neq 11$, dapat diakui sebagai suatu kombinasi perkalian positif dari 4 dan 5. Hal ini berarti untuk setiap pelabelan C_m dengan $m \geq 9$ dan $m \neq 11$, terbentuk dari kombinasi yang berasal dari perkalian positif C_4 dan C_5. Oleh sebab itu, karena $\lambda_{3,2,1}(C_5) = 8$ maka diperoleh $\lambda_{3,2,1}(C_m) = 8$ untuk m ganjil, $m \geq 9$ dan $m \neq 11$. Untuk C_{11} dapat

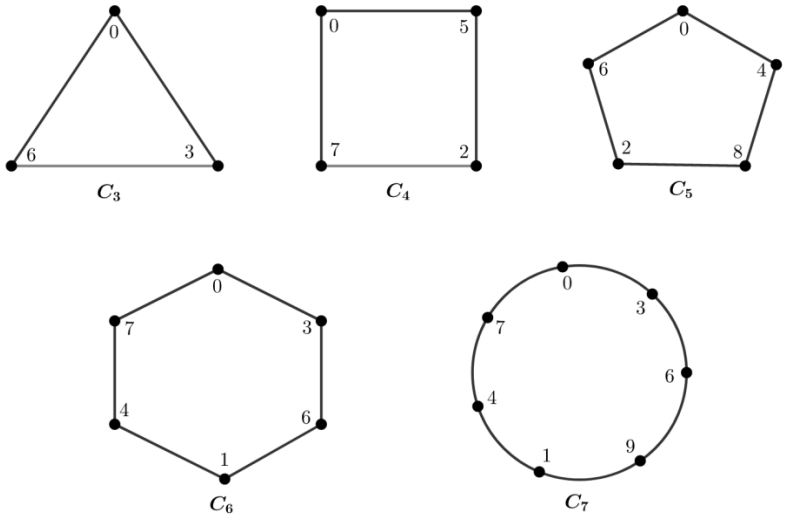
UIN SUSKA RIAU
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,2,1}(C_{11}) = 8$ yaitu $f(V) = \{0,5,2,7,4,0,8,5,1,7,3\}$ maka $\lambda_{3,2,1}(C_{11}) = 8$.

Kasus IV : $m = 7$

Misalkan $V = \{\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_7\}$ merupakan himpunan titik dari C_7. Andaikan $\lambda_{3,2,1}(C_7) < 9$, kemudian misalkan pelabelan titik $L(3,2,1)$ yaitu $f(V)$ berada di himpunan $S = \{1,2,3, \dots ,8\}$. Karena antara dua titik yang ada dalam V memiliki jarak terbesar 3, maka tidak terdapat kemungkinan dapat mengulang nilai untuk $f(V)$. Sehingga hanya didapatkan paling banyak 6 label yang dapat dipakai dari S, akibatnya ada titik yang dilabeli dengan nilai $\lambda_{3,2,1}(C_7) \geq 9$, sehingga kontradiksi dengan $\lambda_{3,2,1}(C_7) < 9$. Pelabelan C_7 yaitu $f(V) = \{0,3,6,9,1,4,7\}$ menujukkan bahwa $\lambda_{3,2,1}(C_7) = 9$.

Berikut disajikan beberapa contoh pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf lingkaran.



Gambar 2.13 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf C_3, C_4, C_5, C_6 dan C_7

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB III
METODE PENELITIAN

Penyelesaian tugas akhir ini menggunakan studi kepustakaan, di mana informasi-informasi diperoleh dari buku, jurnal dan artikel yang berkaitan dengan penelitian. Penelitian ini menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Membentuk graf hasil kali korona C_m dan P_3 dinotasikan $C_m \odot P_3$, dengan nilai $m \geq 3$ dan $m \in \mathbb{N}$.
2. Memberi label setiap titik pada graf $C_m \odot P_3$ sesuai dengan ketentuan pelabelan $L(3,2,1)$.
3. Membuat dugaan awal yang diperoleh berdasarkan pola yang didapatkan dari pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf $C_m \odot P_3$.
4. Merumuskan dugaan awal yang menghasilkan teorema tentang pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf $C_m \odot P_3$.
5. Membuktikan batas bawah berdasarkan Teorema 2.2 dari nilai $\lambda_{3,2,1}(C_m \odot P_3)$ menggunakan teknik kontradiksi.
6. Membuktikan batas atas dari nilai $\lambda_{3,2,1}(C_m \odot P_3)$ menggunakan teknik konstruksi.

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang dijelaskan pada Bab IV, diperoleh kesimpulan bahwa graf $C_m \odot P_3$ memiliki $\lambda_{3,2,1}$ dengan $m \geq 3$ sebagai berikut:

$$\lambda_{3,2,1}(C_m \odot P_n) = \begin{cases} 2\Delta + 4, & jika\ m\ genap; \\ 2\Delta + 5, & jika\ m = 3,7; \\ 2\Delta + 6, & jika\ m\ ganjil\ dan\ m \neq 3,7; \end{cases}$$

5.2 Saran

Dalam penelitian ini, pembahasan mengenai pelabelan $L(3,2,1)$ graf hasil kali korona C_m dan P_3 hanya meliputi titik pada graf lintasan P_n untuk $n = 3$. Bagi pembaca yang berminat untuk mengembangkan lebih lanjut tentang pelabelan $L(3,2,1)$ graf hasil kali korona C_m dan P_n, penulis menyarankan untuk melanjutkan membahas pelabelan $L(3,2,1)$ graf hasil kali korona C_m dan P_n dengan n buah titik lainnya.

UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR PUSTAKA

[1] R. Munir, *Matematika Diskrit*, Ed.3. Bandung: Informatika Bandung, 2009.

[2] S. S. H. Gultiom and Mulyono, "Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Cycle," *KARISMATIKA.*, vol. 5, no. 2, pp. 33–39, 2019.

[3] J. Gehrtz, J. Clipperton, Z. Szaniszlo, and D. Torkornoo, "L(3,2,1)-Labeling of Simple Graphs," pp. 1–14, 2005.

[4] M. D. Anggraeni, Mulyono, amd A. Suyitno "Pelabelan L(3,2,1) dari Pembentukan Graf Middle pada Beberapa Graf Khusus," *Ujme.*, vol. 3, no. 2, pp. 19–25, 2014.

[5] F. Xavier D, K. Yenoke, and P. S, "L(2,1) and L(3,2,1)-Labeling of Certain Star and Wheel Related Graphs ," *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology.*, vol. 09, no. 06, pp. 4712–4716, 2020.

[6] S. Amanathulla and M. Pal, "L(3,2,1) and L(4,3,2,1)-Labeling Problems on Interval Graphs," *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics.*, vol. 14, no. 3, pp. 205–215, 2017.

[7] M. P. Zubaidah Amir MZ, *Matematika Diskrit*. Pekanbaru: Zanafa Publishing, 2010.

[8] C. C. Marzuki and L. Yudianti, "Nilai Total Ketakteraturan Titik dari Graf Hasil Kali Korona Pm dan P_2," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.*, vol. 4, no. 2, pp. 45–53, 2018.

[9] H. Mursyidah and S. Rahmawati, "Dominating Number dari Graf Hasil Operasi Korona Graf Lintasan dengan Graf Sikel $P_n \odot C_m$ dan Sebaliknya $C_m \odot P_n$," pp. 1–10, 2014.

[10] M. Z. Ilmi, S. Pancahyani, and A. R. Soemarsono, "Pelabelan Total Sisi Ajaib Super dan (a, d) Anti Ajaib Super Pada Graf $C_n \odot P_m$," *Seminar Nasional Teknologi Informasi dan Matematika.*, vol. 1, no. 1, pp. 9–18, 2021.

[11] J. R. Griggs and R. K. Yeh, "Labeling Graphs with a Condition at Distance 2," *SIAM Journal on Discrete Mathematics.*, vol. 5, no. 4, pp. 586–595, 1992.

[12] M. Chia, D. Kuo, H. Liao, C. Yang, and R. K. Yeh, "L(3,2,1)-Labeling of Graph," *Taiwanese Journal of Mathematics.*, vol. 15, no. 6, pp. 2439–2457, 2011.

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

WINDYLIA SAPUTRI, lahir di Dharmasraya tanggal 24 Juni 2000. Anak sulung dari 2 bersaudara, dari pasangan bapak Sriyanto dan ibu Harmini. Pendidikan formal penulis adalah SDN 05 Koto Besar lulus pada tahun 2013, SMPN 2 Koto Besar lulus pada tahun 2016, SMAN 1 Sitiung lulus pada tahun 2019. Kemudian, penulis melanjutkan jenjang pendidikan pada tahun 2019 ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau Fakultas Sains dan Teknologi Program Studi Matematika.

Pada awal tahun 2022, penulis melaksanakan kerja praktik di Dinas Komunikasi, Informatika dan Statistik Riau dengan judul laporan **"Peramalan Tingkat Pengangguran di Provinsi Riau dengan Metode Fuzzy K-Means"** yang dibimbing oleh bapak Sarbaini, M.Si. dan diseminarkan pada tanggal 20 Juni 2022. Pada tanggal 4 Juli - 31 Agustus 2022, penulis mengikuti pelaksanaan kegiatan Kuliah Kerja Nyata di Desa Sukadamai, Kecamatan Ujungbatu, Kabupaten Rokan Hulu, Riau. Penulis dinyatakan lulus ujian sarjana dengan judul Tugas Akhir **"Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Hasil Kali Korona C_m dan P_3"** dengan dosen pembimbing bapak Sarbaini, M.Si.

UIN SUSKA RIAU