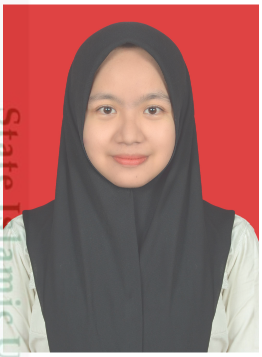
APLIKASI KENDALI OPTIMAL DALAM MASALAH INVENTORI DENGAN TINGKAT PERMINTAAN BERUPA FUNGSI EKSPONENSIAL

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Program Studi Matematika

Oleh :

<u>RATIH JULIANTI</u>
11754201937



FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2023

LEMBAR PERSETUJUAN

APLIKASI KENDALI OPTIMAL DALAM MASALAH INVENTORI DENGAN TINGKAT PERMINTAAN BERUPA FUNGSI EKSPONENSIAL

TUGAS AKHIR

oleh:

RATIH JULIANTI
11754201937

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 11 Januari 2023

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Nilwan Andiraja, S.Pd., M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIP. 19840803 201101 1 005

LEMBAR PENGESAHAN

APLIKASI KENDALI OPTIMAL DALAM MASALAH INVENTORI DENGAN TINGKAT PERMINTAAN BERUPA FUNGSI EKSPONENSIAL

TUGAS AKHIR

oleh:

RATIH JULIANTI
11754201937

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 11 Januari 2023

Pekanbaru, 11 Januari 2023
Mengesahkan

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si.**
Sekretaris	**: Nilwan Andiraja, S.Pd., M.Sc.**
Anggota I	**: Wartono, M.Sc.**
Anggota II	**: Irma Suryani, M.Sc.**

Lampiran Surat :
Nomor : Nomor 25/2021
Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Ratih Julianti
NIM : 11754201937
Tempat/Tgl. Lahir : Padang / 16 Juli 1999
Fakultas/~~Pascasarjana~~ : Fakultas Sains & Teknologi
Prodi : Matematika

Judul ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~*:
Aplikasi Kendali Optimal Dalam Masalah Inventori dengan Tingkat Permintaan Berupa Fungsi Eksponensial

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~* dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~* saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/~~(Karya Ilmiah lainnya)~~* saya tersebut, maka saya besedia menerima sanksi sesua peraturan perundang-undangan.

Demikianlah Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, ...
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL 10000 B410EAKX179354111

Ratih Julianti
NIM : 11754201937

*pilih salah satu sasuai jenis karya tulis

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan ssepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 04 Januari 2023
Yang membuat pernyataan,

RATIH JULIANTI
11754201937

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

"Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat"
(QS. Al-Mujadalah:11)

Alhamdulillahirrabil'alamin
Langkah demi langkah telah usai aku lalui. Satu persatu satu cita-citaku telah ku capai.
Namun…. Itu belum akhir dari perjalanan, melainkan awal dari perjuangan.
Aku merasa cukup bukan karena aku sudah memiliki segalanya, tapi itu karena aku bisa mensyukuri dan menikmati apa yang aku punya.

▪▪▪Sujud syukurku, kupersembahkan kepada Allah SWT▪▪▪

Sebuah karya kecil ini ku persembahkan untuk

▪▪▪Ayahanda Azwardi Chan dan Ibundaku Surahma Yetni,S.Pd.▪▪▪
Mungkin ucapan terima kasihku tak cukup untuk membalas semua kasih sayangmu kepadaku, namun hanya itu yang dapat aku lanturkan untuk membalas semua pengorbanan dan do'a kalian terhadapku.
Terima kasih Ayah, Terima kasih Ibu…

▪▪▪Keluarga Besarku▪▪▪
Terima kasih telah menjadi panutan yang memberikan ku motivasi untuk terus berjuang demi membahagiakan kedua orang tua ku.

▪▪▪Dosen Pembimbingku Bapak Nilwan Adiraja,S.Pd., M.Sc dan Dosen-Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi▪▪▪
Terima kasih atas waktu dan tenaga kalian untuk membimbing saya dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

▪▪▪Sahabat-Sahabatku▪▪▪
Terima kasih untuk sahabat-sahabatku yang telah menemaniku, menasehatiku, dan memberikan pengalaman yang luar biasa selama aku berada di kampus ini.

APLIKASI KENDALI OPTIMAL DALAM MASALAH INVENTORI DENGAN TINGKAT PERMINTAAN BERUPA FUNGSI EKSPONENSIAL

RATIH JULIANTI
NIM : 11754201937

Tanggal Sidang :11 Januari 2023
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas KM 15 No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Ketidakseimbangannya antara persediaan dan permintaan barang merupakan hal umum yang sering terjadi di suatu perusahaan. Hal ini disebabkan karena adanya faktor kerusakan dan perubahan permintaan. Oleh karena itu, perlu adanya pengendalian terhadp persediaan barang yang dilakukan dengan teori kendali optimal yang bertujuan untuk mendapatkan persamaan tingkat persediaan yang optimal. Penelitian ini membahas tentang penerapan teori kendali optimal pada model persediaan barang yang mengalami penurunan. Model persediaan barang yang digunakan adalah persamaan differensial dinamik dimana fungsi permintaannya diubah menjadi fungsi eksponensial. Berdasarkan persamaan differensial dinamik dan fungsi tujuan diberikan bentuk persamaan Hamilton dan persamaan Lagrange. Persamaan yang ada digunakan untuk mendapatkan solusi persamaan tingkat persediaan yang optimal. Berdasarkan contoh yang telah diberikan diperoleh tingkat persediaan kurva menurun atau stabil asimtotik pada waktu yang telah ditentukan.

Kata kunci: Differensial Dinamik, Kendali, Kestabilan, Penurunan, Persediaan, Optimal.

OPTIMAL CONTROL APPLICATION IN INVENTORY PROBLEM WITH EXPONENTIAL DEMAND LEVEL

RATIH JULIANTI
NIM : 11754201937

Date of Final Exam :11 January 2023
Date of Graduation :

Mathematics Program Study
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

The imbalance between supply and demand for goods is a common thing that often occurs in a company. This is due to the factor of damage and changes in demand. Therefore, it is necessary to control the inventory of goods carried out with optimal control theory which aims to obtain the optimal inventory level equation. This study discusses the application of optimal control theory to a declining inventory model. The supply model used is a dynamic differential equation where the demand function is converted into an exponential function. Based on the dynamic differential equation and the objective function, the Hamilton equation and Lagrange equation are given. The existing equation is used to obtain the optimal inventory level equation solution. Based on the examples that have been given obtained inventory level of the curve decreases or stabilizes at a given time.

Keywords: *Dynamic Differential, Control, Stability, Decreasing, Inventory, Optimal..*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamiin. Puji syukur kepada Allah Subhanahu Wa Ta'ala karena atas rahmat, karunia, nikmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"Aplikasi Kendali Optimal Dalam Masalah Inventori dengan Tingkat Permintaan Berupa Fungsi Eksponensial".** Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Shalallahu 'Alahi Wasallam, semoga kita semua mendapat syafaat-nya. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis banyak sekali mendapatkan bimbingan, arahan, dan masukan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih khususnya kepada kedua orang tua tercinta Ayahanda Aswardi Chan dan Ibunda Surahma Yetni,S.Pd. yang selalu mendo'akan dan melimpahkan kasih sayang kepada penulis. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Khairunnas Rajab, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr.Hartono,M.Pd., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Bapak Nilwan Adiraja,S.Pd.,M.Sc., selaku Pembimbing sekaligus Sekretaris Akademik Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, penjelasan serta petunjuk kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Ibu Corry Corazon Marzuki,M.Si, selaku Ketua sidang dalam pelaksanaan tugas akhir ini.
6. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Penguji I yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.

7. Ibu Irma Suryani,M.Sc., selaku Penguji II yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
8. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
9. Keluarga tercinta dan terkasih yang telah memberikan dukungan, materi dan doa yang tak henti- hentinya serta kasih sayang yang tulus kepada penulis
10. Kakanda Emelia selaku senior yang telah memberikan bantuan dan dukungan kepada penulis.
11. Sahabat-sahabat terbaik seperjuangan penulis Putri Anggraini, Resi Arisanti dan Hernita, terima kasih atas bantuan, masukan dan segala dukungan yang telah diberikan kepada penulis..
12. Teman-teman seperjuangan di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi khususnya angkatan 2017 yang telah banyak memberikan bantuan, masukan serta dukungan.
13. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal penyusunan tugas akhir hingga selesai, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua. *Aamiin ya Rabbal'alamiin*.

Pekanbaru, Januari 2023

Ratih Julianti

DAFTAR ISI

LEMBAR PERSETUJUAN .... **ii**
LEMBAR PENGESAHAN .... **iii**
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL .... **iv**
LEMBAR PERNYATAAN .... **v**
LEMBAR PERSEMBAHAN .... **vi**
ABSTRAK .... **vii**
ABSTRACT .... **viii**
KATA PENGANTAR .... **ix**
DAFTAR ISI .... **xi**
DAFTAR SIMBOL .... **xiii**
DAFTAR GAMBAR .... **xiv**
PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Batasan Masalah 2
1.4 Tujuan Penelitian 3
1.5 Manfaat Penelitian 3
1.6 Sistematika Penelitian 3
LANDASAN TEORI **5**
2.1 Model Persediaan Barang 5
2.2 Kendali Optimal Waktu Kontinu 6
2.3 Bentuk Kuadratik 7
2.4 Persamaan Differensial Biasa 8
2.4.1 Persamaan Differensial Biasa Nonhomogen Koefisien Konstanta 9
2.5 Kestabilan 12
METODOLOGI PENELITIAN **15**
PEMBAHASAN **16**
4.1 Kendali Optimal dalam Masalah Persediaan Barang 16
4.2 Simulasi Numerik 25
PENUTUP **32**

5.1 Kesimpulan..32
5.2 Saran...34
DAFTAR PUSTAKA **35**
LAMPIRAN **36**
DAFTAR RIWAYAT HIDUP..**38**

DAFTAR SIMBOL

$I(t)$	: tingkat fungsi persediaan
$P(t)$	: tingkat fungsi produksi
$D(t)$	: fungsi permintaan
I_0	: tingkat nilai awal persediaan
$m(t)$	: rata-rata fungsi kenaikan
$\theta(t)$	: rata-rata fungsi kemerosotan
$v(t)$	: selisih rata-rata fungsi kenaikan dan penurunan
$\hat{P}$	: tingkat produksi tujuan
$\hat{I}$	: tingkat persediaan tujuan
h	: koefisien biaya penyimpanan
K	: koefisien biaya produksi
J	: fungsi tujuan dari model persediaan barang yang mengalami penurunan
H	: fungsi Hamilton
L	: fungsi Lagrange
$\frac{\partial H}{\partial P}$	: turunan H terhadap parsial P
$\frac{\partial L}{\partial I}$	: turunan L terhadap parsial I
$\frac{\partial L}{\partial P}$	: turunan L terhadap parsial P

DAFTAR GAMBAR

Gambar		Halaman
2.1	Model Persediaan Barang dengan Perubahan Fase [4]	5
2.2	Grafik fungsi $f(t) = e^{-6t}$	14
4.1	Grafik Fungsi $I(t)$ untuk $t \to 15$	27
4.2	Grafik Fungsi $I(t)$ untuk $t \to 18$	30

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Banyak permasalahan yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari yang melibatkan teori kendali optimal. Salah satunya berupa penerapan teori kendali optimal pada masalah tingkat persediaan, dimana permasalahan tersebut sering terjadi pada perusahaan yang bergerak dalam bidang perdagangan maupun manufaktur. Persediaan didefenisikan sebagai barang yang disimpan untuk digunakan atau dijual pada periode mendatang. Persediaan termasuk bagian terpenting dalam menjaga kelancaran agar produksi barang dengan permintaan konsumen terpenuhi secara optimal. Ada beberapa faktor dalam suatu model persediaan, diantaranya faktor kerusakan dan permintaan barang.

Hal umum yang sering terjadi dalam sistem persediaan salah satunya berupa kerusakan barang. Mutu dan kualitas barang yang menurun selama periode penyimpanan dapat menyebabkan kerugian terhadap perusahaan. Akibatnya, perusahaan akan menanggung resiko kekurangan persediaan yang menyebabkan produksi barang dan permintaan konsumen tidak terpenuhi secara optimal dan menurunnya keuntungan. Maka dari itu, pengendalian terhadap persediaan perlu dilakukan guna menyeimbangkan tingkat permintaan dan persediaan dengan menerapkan aplikasi teori kendali.

Kendali optimal pada persediaan menggunakan teori kendali optimal dapat diketahui dari beberapa jurnal penelitian, diantaranya pada jurnal penelitian [1] Penelitian tersebut membahas mengenai penerapan teori kendali untuk masalah persediaan yang menitikberatkan pada analisis sistem persediaan barang dalam bentuk nonlinier dengan memperhitungkan tingkat kerusakan sebagai fungsi waktu dengan jumlah yang tersedia untuk mencapai hasil yang optimal. Penelitian lainnya yang juga dilakukan oleh [2] membahas tentang pengendalian persediaan yang mengalami peningkatan dan penurunan barang yang tergarap menggunakan teknik kendali optimal agar persediaan dapat diatur sesuai tingkat permintaan secara optimasi dengan biaya penyimpanan.

Pada penelitian yang dilakukan oleh [3] menyebutkan bahwa perusahaan mengalami penurunan yang disebabkan oleh kerusakan dan permintaan. Akibatnya, perusahaan tersebut melakukan produksi secara terus menerus untuk meningkatkan kembali persediaan sehingga tingkat permintaan terpenuhi. Peneliti juga menyebutkan bahwa penelitian tersebut dapat dikembangkan dengan merubah tingkat kerusakan menggunakan metode eksponensial.

Berdasarkan uraian dari beberapa penelitian yang telah dipaparkan, penulis tertarik melakukan penelitian mengenai penerapan teori kendali pada masalah persediaan barang yang mengalami penurunan dengan mengubah fungsi permintaan dan fungsi kerusakan barang pada penelitian [3] ke dalam bentuk fungsi eksponensial. Sehingga penulis mengambil judul “**Aplikasi Kendali Optimal Dalam Masalah Inventori Dengan Tingkat Permintaan Berupa Fungsi Eksponensial**”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan tingkat persediaan barang untuk model persediaan yang mengalami penurunan dalam waktu berhingga dengan tingkat permintaan berupa fungsi eksponensial?
2. Bagaimana analisis kestabilan bentuk model persediaan barang yang mengalami penurunan untuk waktu berhigga dengan tingkat permintaan berupa fungsi eksponensial?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Permasalahan difokuskan pada persediaan yang mengalami penurunan.
2. Fungsi tujuan berbentuk kuadratik untuk waktu berhingga.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan persamaan tingkat persediaan yang optimal pada model persediaan yang mengalami penurunan untuk waktu berhingga dengan tingkat permintaan berupa fungsi eksponensial.
2. Mendapatkan kestabilan model matematika dari model persediaan yang mengalami penurunan untuk waktu berhingga dengan tingkat permintaan berupa fungsi eksponensial.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Sebagai sarana menambah wawasan dan ilmu pengetahuan mengenai teori kendali optimal.
2. Memberi kontribusi terhadap pembaca dalam mempelajari dan memperdalam masalah kestabilan barang yang mengalami penurunan untuk waktu berhingga.
3. Sebagai *literature* penunjang khususnya bagi mahasiswa yang menempuh mata kuliah teori kendali.

1.6 Sistematika Penelitian

Agar penulisan Proposal Tugas Akhir inilebih terarah dan mudah dipahami maka digunakaan sistematika penulisan yang mencakup tiga bab, diantaranya sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang landasan pengambilan ide penelitian yang akan dijelaskan melalui latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang teori dasar mengenai hal-hal yang dapat digunakan sebagai acuan dan landasan untuk mengembangkan penelitian ini. Konsep dan teori terkait perlu dijelaskan, seperti: tuliskan konsep dan teori terkait dan kajian terkait sebelumnya.

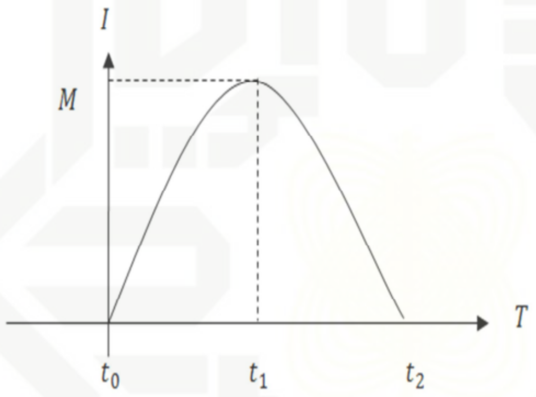
BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi tahapan-tahapan yang dilakukan penulis untuk mencapai tujuan penelitian mulai dari metode penelitian, teknik penggalian data sampai tahapan penelitian.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Model Persediaan Barang

Berdasarkan [4] pembentukan model ini didasarkan pada sistem persediaan yang mengalami kenaikan dan penurunan barang. Diasumsikan bahwa fase pertama dari t_0 hingga t_1 untuk tingkat persediaan yang meningkat, kemudian fase kedua dari t_1 hingga t_2 untuk tingkat persediaan yang menurun. Berikut ini digambarkan model persediaan sebagai berikut :



Gambar 2.1 Model Persediaan Barang dengan Perubahan Fase [4]

Pada Gambar 2.1 di atas ada dua kasus model persediaan yang dibahas, yaitu kasus model kenaikan barang dan model penurunan barang. Namun dalam penelitian ini yang akan dibahas hanya pada kasus penurunan barang. Berdasarkan [2] membahas bahwa kasus penurunan barang dapat didefenisikan dalam persamaan differensial, yaitu:

$$\dot{I} = P(t) - D(t) + v(t)I(t) \quad , \quad t \in [t_1, t_2] \tag{2.1}$$

dengan $v(t) = m(t) - \theta(t), P(t) \geq 0$. Kemudian, untuk memastikan tingkat persediaan menurun dari t_1 hingga t_2, lebih lanjut Persamaan (2.1) memenuhi :

$$P(t) - D(t) + v(t)I(t) > 0 \tag{2.2}$$

dengan

$I(t)$: tingkat fungsi persediaan

$P(t)$: tingkat fungsi produksi

$D(t)$: fungsi permintaan

I_0 : tingkat nilai awal persediaan

$m(t)$: rata-rata fungsi kenaikan

$\theta(t)$: rata-rata fungsi kemerosotan

$v(t)$: selisih rata-rata fungsi kenaikan dan penurunan

Selanjutya dari [2], diketahui fungsi tujuan dari model persediaan barang yang mengalami penurunan sebagai berikut :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t \left\{h\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2\right\} dt \tag{2.3}$$

dengan

$\hat{P}$: tingkat produksi tujuan

$\hat{I}$: tingkat persediaan tujuan

h : koefisien biaya penyimpanan

K : koefisien biaya produksi

Persamaan dinamik (2.1) dan fungsi tujuan (2.3) akan dicari kendali optimal tingkat produksi menggunakan aplikasi kendali optimal.

2.2 Kendali Optimal Waktu Kontinu

Berdasarkan [5] diberikan persamaan diferensial dinamik yaitu sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{2.4}$$

Pada bagian ini akan dibahas mengenai kendali optimal waktu kontinu. Dengan $x(t)$ vektor state dan $u(t)$ fungsi kendali dimana $x(t), u(t) \in R^n$. Kemudian persamaan fungsi tujuannya yaitu :

$$J(t) = q\left(x\left(T_f\right)\right) + \int_{t_0}^{T_f} g(x(t), u(t), t)dt \tag{2.5}$$

Dimana :

t_0 : waktu awal

T_f : waktu akhir

Selanjutnya, didefenisikan fungsi Hamilton sebagai berikut :

$$H = g(x(t), u(t), t) + \lambda f(x, u, t) \tag{2.6}$$

Berdasarkan [6] diberikan persamaan State, Costate, dan Stasioner sebagai berikut:

1. Persamaan State: $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$
2. Persamaan Costate: $-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x}$
3. Persamaan Stasioner: $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$

Kemudian dibentuk fungsi Lagrange sebagai berikut:

$$L = g(x(x), u(x), t) + (\lambda - \mu) f(x, u, t) \quad , \quad t \in [t_1, T] \tag{2.7}$$

Dengan syarat kondisi optimal:

$H_u = 0$

$L_I = -\lambda$

$L_u = 0$

$\mu \geq 0\,, \mu g \geq 0$

2.3 Bentuk Kuadratik

Pada bagian ini dipaparkan bentuk kuadratik suatu matriks yang memiliki sifat definit. Diberikan bentuk kuadratik sebagai berikut :

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \tag{2.8}$$

Dengan entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j. Selanjutnya untuk $\boldsymbol{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ maka Persamaan (2.8) dapat diuraikan menjadi :

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \tag{2.9}$$

Persamaan (2.9) memiliki n banyak variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan $i = j = n$ dan $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Menurut [7] dijelaskan bahwa sifat definit dari Persamaan (2.8) dapat diperoleh dengan menghitung nilai eigen dari matriks A. Jika matriks A berukuran n x n dan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A, maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ memenuhi:

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0$ untuk semua i.
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq 0$ untuk semua i.

3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk semua i.
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0$ untuk semua i.
5. Sifat undefinit tidak memenuhi sifat di atas.

Berikutnya untuk melengkapi pembahasan bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.1:

Bentuklah persamaan $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$ ke dalam bentuk kuadratik dan tentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian :

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 4x_2^2 \\
&= x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 4x_2x_2 \\
&= (x_1 + 2x_2)x_1 + (2x_1 + 4x_2)x_2 \\
&= [x_1 + 2x_2 \quad 2x_1 + 4x_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Kemudian untuk sifat definit didapat penyelesaiannya sebagai berikut:

Dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ diperoleh nilai eigennya

$$Det\ (\lambda \mathrm{I} - A) = 0$$

$$Det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$Det\begin{bmatrix} (\lambda - 1) & -2 \\ -2 & (\lambda - 4) \end{bmatrix} = 0$$

$$\big((\lambda - 1)(\lambda - 4)\big) - (-2 - 2) = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5$$

Sehingga, dari nilai eigen diatas dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik di atas bersifat semi definit positif.

2.4 Persamaan Differensial Biasa

Berdasarkan Persamaan differensial biasa merupakan suatu persamaan differensial yang melibatkan hanya satu variabel bebas. Persamaan differensial biasa dibagi menjadi persamaan differensial biasa orde satu dan persamaan differensial orde dua. Bentuk persamaan differensial biasa yang orde satu seperti pada persamaan berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.10}$$

Dengan $f(x,y)$ adalah fungsi dalam dua variabel yang diberikan dan kontinu di x dan y. Menurut [8], apabila fungsi $f(x,y)$dalam Persamaan (2.10) berbentuk linear pada varibel bebas y, maka persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx}P(x)y = Q(x) \tag{2.11}$$

Dimana P dan Q dalam fungsi x. Sehingga solusi untuk Persamaan (2.11) dapat ditulis ke dalam bentuk beriku:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C\right] \tag{2.12}$$

2.4.1 Persamaan Differensial Biasa Nonhomogen Koefisien Konstanta

Bentuk umum dari persamaan differensial nonhomogen ditulis sebagai berikut:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{2.13}$$

Apabila $g(x) = 0$ maka persamaan tersebut merupakan persamaan differensial homogen, sedangkan jika $g(x) \neq 0$ maka persamaan tersebut merupakan persamaan differensial nonhomogen. Selanjutnya dimisalkan $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ adalah penyelesaian dari persamaan homogen

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.14}$$

Persamaan (2.14)dapat diselesaikan dengan memisalkan $y = e^{rx}$, sehingga diperoleh:

$$a\frac{d^2(e^{rx})}{dx^2} + b\frac{(e^{rx})}{dx} + ce^{rx} = 0$$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(ar^r + br + c) = 0$$

Sehingga didapat $e^{rx} = 0$, maka $y(x) = e^{rx}$ merupakan penyelesaian dari Persamaan (2.14) jika dan hanya jika r memenuhi persamaan karakteristik berikut:

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.15}$$

Adapun penyelesaian dari Persamaan karakteristik (2.15) adalah sebagai berikut:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{a^2 - 4ac}}{2a}$$

dan

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{a^2 - 4ac}}{2a}$$

Penyelesaian persamaan karakteristik pada Persamaan (2.15) bergantung pada nilai diskriminan. Adapun bentuk-betuk penyelesaian berdasarkan nilai diskriminan adalah sebagai berikut:

a. Akar-akar Real dan Berbeda $(b^2 - 4ac > 0)$

Apanila akar-akar r_1 dan r_2 dalam persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ merupakan bilangan real dan berbeda, maka didapat penyelesaian umum dari Persamaan (2.14) adalah:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{2.16}$$

Dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang

b. Akar-akar Berulang $(b^2 - 4ac = 0)$

Apabila akar-akar r_1 dan r_2 dalam persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ adalah $(r_1 = r_2)$, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.14) adalah:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_2 x} \tag{2.17}$$

Dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang

c. Akar-akar Imajiner $(b^2 - 4ac < 0)$

Apabila akar-akar r_1 dan r_2 dalam persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ merupakan bilangan kompleks $(r_1 = \alpha + i\beta\ dan\ r_2 = \alpha - i\beta)$, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.14) adalah:

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \tag{2.18}$$

Dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang

Selanjutnya penyelesaian dari persamaan nonhomogen disimbolkan dengan $y_p(x)$. Sehingga, penyelesaian umum dari Persamaan Nonhomogen (2.13) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \tag{2.19}$$

Contoh 2.2 :

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan differensial nonhomogen berikut :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 10y = x^2$$

Penyelesaian :

Langkah awal yang harus dilakukan adalah menentukan penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 10y = 0$$

Selanjutnya dibentuk persamaan karakteristik untuk persamaan homogen yaitu :

$$r^2 + 3r - 10 = 0$$

$$(r-2)(r+5) = 0$$

$$r_1 = 2\,, r_2 = -5$$

Sehingga diperoleh penyelesaian :

$$y_c(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}$$

Kemudian untuk penyelesaian $y_p(x)$ diberikan oleh:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Maka,

$y_p'(x) = 2Ax + B$ dan $y_p''(x) = 2A$

Untuk menentukan nilai A, B, dan C maka disubstitusikan nilai-nilai $y(x)$, $y_p'(x)$, dan $y_p''(x)$ ke dalam persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 10y = x^2$ sehingga diperoleh:

$$2A + 3(2Ax + B) - 10(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

Dengan menggunakan kesamaan koefisien untuk persamaan diatas maka didapat nilai $A = -\frac{1}{10}$, $B = -\frac{3}{50}$, dan $C = -\frac{19}{500}$, sehingga:

$$y_p(x) = -\frac{1}{10}x^2 - \frac{3}{50}x - \frac{19}{500}$$

Jadi, penyelesaian umum untuk persoalam diatas adalah menjumlahkan persamaan $y_c(x)$ dengan persamaan $y_p(x)$ sehingga diperoleh :

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x} - \frac{1}{10}x^2 - \frac{3}{50}x - \frac{19}{500}$$

2.5 Kestabilan

Sebelum membahas tentang kestabilan, terlebih dahulu dibahas tentang titik ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut:

Defenisi 2.5.1 [5] Diberikan persamaan diferensial orde satu yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $x(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenhi $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Untuk lebih memahami defenisi di atas diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.3 :

Tentukan titik ekuilibrium dari persamaan berikut:

$\dot{\boldsymbol{x}} = 6x$

Penyelesaian:

Diketahui

$\dot{\boldsymbol{x}} = 6x$

Sehingga diperoleh titik ekuilibriumnya:

$\bar{x} = 0$

Definisi titik ekuilibrium di atas diberikan untuk memudahkan dalam memahami pengertian dari kestabilan, diberikan definisi perihal kestabilan sebagai berikut:

Definisi 2.5.2 [5] Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil jika $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x_0} - \overline{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x_0}) - \overline{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\overline{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists\delta > 0$ sehingga $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x_0}) - \overline{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x_0} - \overline{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibrium dikatakan tidak stabil jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil dan bergerak menjauhi titik kesetimbangan seiring bertambahnya t.

Contoh 2.4 :

Tentukan kestabilan dari persamaan diferensial berikut $\dot{\boldsymbol{x}} = -6x$ dengan diperoleh titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$

Penyelesaian :

Sebelum dianalisa kestabilan, maka diberi solusi sebagai berikut

$\dot{\boldsymbol{x}} = -6x$

$\frac{dx}{x} = -6dt$

$\int \frac{dx}{x} = \int -6dt$

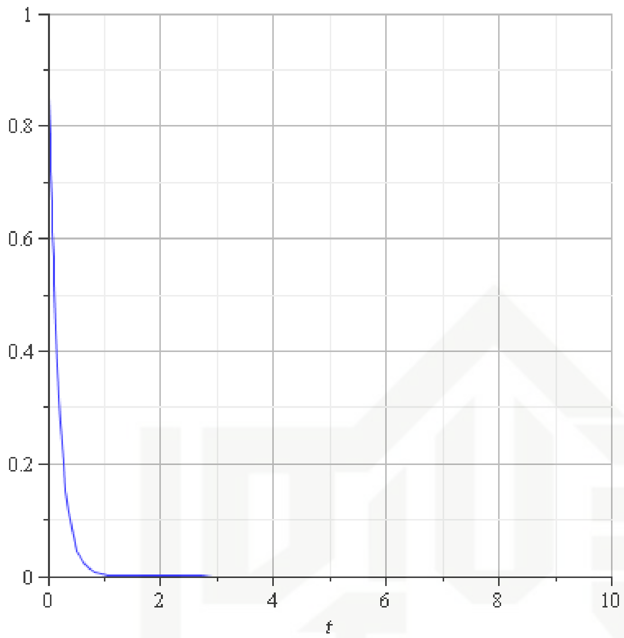
$\ln x = -6t + c$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

Sehingga:

$$\ln x - c = -6t$$
$$\ln x - \ln x_0 = -6t$$
$$\ln \frac{x}{x_0} = -6t$$
$$x = x_0 e^{-6t}$$

Kemudian, untuk melihat kecenderungan e^{-6t} dapat dilihat pada grafik berikut:



Gambar 2.2 Grafik fungsi $f(t) = e^{-6t}$

Berdasarkan Gambar 2.2 jika $t \to 10$ maka $x \to 0$ sehingga disimpulkan bahwa $\dot{x} = -6x$ stabil asimtotik karena solusinya menuju 0.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Tugas akhir ini membahas penyelesaian sistem kendali optimal persediaan barang yang mengalami penurunan dengan tingkat permintaan berupa fungsi eksponensial. Dalam penelitian ini akan dilakukan tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Diketahui persamaan differensial dinamik untuk penurunan barang dengan tingkat permintaan sebagai berikut:
   $\dot{I} = P(t) - D(t) - \theta(t)I(t) \quad , \quad t \in [t_1, t_2]$
   diubah fungsi permintaan nya dengan:
   $D(t) = e^{-\theta(t)}$
   dan diketahui fungsi tujuan pada Persamaan (2.3) sebagai berikut:
   $$J = \frac{1}{2}\int_0^t \left\{h\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2\right\} dt$$
2. Diperolah persamaan Hamilton dan fungsi Lagrange dari persamaan differensial dinamik untuk kasus penurunan barang.
3. Kemudian ditentukan kondisi optimal dengan syarat $H_P = 0$ sehingga didapat fungsi kendali yaitu tingkat produksi $P(t)$ dan ditentukan $L_1 = -\dot{\lambda}$, dan $L_P = 0$.
4. Selanjutnya, $P(t)$ disubstitusikan ke persamaan differensial dinamik yang telah dipaparkan pada langkah 1.
5. Membentuk turunan kedua dari persamaaan differensial dinamik yang telah disubstitusi kendali $P(t)$.
6. Mencari solusi persamaan diferensial orde dua pada langkah 5, sehingga didapat solusi tingkat inventori.
7. Berdasarkan nilai parameter yang diambil dari [3] dilakukan simulasi numerik.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan uraian yang dilakukan pada Bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan dari persamaan differensial dinamik dalam penurunan barang pada waktu berhingga sehingga diperoleh persamaan yaitu:

$$\dot{I} = P(t) - e^{-\theta(t)} - \theta(t)I(t) \quad , \quad t \in [t_1, t_2]$$

Dengan fungsi tujuan dari model persediaan barang yang mengalami penurunan barang yaitu sebagai berikut :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t \left\{h\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2\right\} dt$$

Kemudian, Persamaan Hamilton didefenisikan sebagai berikut:

$$H = \frac{1}{2}\left[h\left(I(t) - \hat{I}\right)^2 + K\left(P(t) - \hat{P}\right)^2\right] + \lambda\, P(t) - \lambda e^{-\theta(t)} - \theta(t)I(t)$$

Dan persamaan Lagrange yang didefenisikan sebagai berikut:

$$L = \frac{1}{2}\left[h\left(I(t) - \hat{I}\right)^2 + K\left(P(t) - \hat{P}\right)^2\right] + \lambda\, P(t) - \lambda e^{-\theta(t)} - \lambda\theta(t)I(t) - \mu\, P(t)$$
$$+\mu e^{-\theta(t)} + \mu\theta(t)I(t)$$

Kemudian, dinotasikan $\alpha_1(t) = \frac{-h\hat{I}}{K} - \theta(t)\hat{P} + e^{-\theta(t)}\dot{\theta}(t) + e^{-\theta(t)}\theta(t)$, sehingga diperoleh $\ddot{I} - \left(\frac{h}{K} - \dot{\theta}(t) + \left(\theta(t)\right)^2\right) I(t) = \alpha_1(t)$. Persamaan tersebut digunakan untuk mendapatkan tingkat persediaan yang optimal dengan mencari solusi dari persamaan diferensial orde dua nonhomogen tersebut. Lebih lanjut, solusi tersebut diamati dalam kasus dengan bentuk solusi eksplisit yaitu :

1. Tingkat produksi untuk model persediaan yang mengalami penurunan dan perubahan tingkat permintaan, maka persamaan tingkat produksi yaitu :

$$P(t) = -c_1\big(-r-\theta(t)\big)e^{rt} - c_2\big(r-\theta(t)\big)e^{-rt} + \dot{Q}(t) + \theta(t)Q(t)$$
$$+e^{-\theta(t)}$$

Kendali ini akan memberikan tingkat produksi optimal yang diperlukan pada tingkat persediaan yang mengalami penurunan dan perubahan tingkat permintaan.

Dengan persamaan tingkat persediaan yaitu:

$I(t) = c_1e^{rt} + c_2e^{-rt} + Q(t)$

$$Q(t) = \frac{h\hat{I} + K\left(-\theta(t)\hat{P} + e^{-\theta(t)}\dot{\theta}(t) + e^{-\theta(t)}\theta(t)\right)}{K\left(-\frac{h}{K} + \dot{\theta}(t) - (\theta(t))^2\right)}$$

$$c_1 = \frac{1}{(e^{rt_1-rt_2})\big(K(r-\theta(t_2))\big) + (e^{rt_2-rt_1})\big(K(r+\theta(t_2))\big)}$$

$$\big(K\big(r-\theta(t_2)\big)e^{-rt_2}\big)(M - Q(t_1)) + \big((e^{-rt_1})\big)$$

$$\Big(K\big(-Q(t_2) - \theta(t_2)Q(t_2) + \hat{P} - e^{-\theta(t_2)}\big)\Big)$$

dan

$$c_2 = \frac{1}{(e^{rt_1-rt_2})\big(K(r-\theta(t_2))\big) + (e^{rt_2-rt_1})\big(K(r+\theta(t_2))\big)}$$

$$\big(-K\big(r-\theta(t_2)\big)e^{rt_2}\big)(M - Q(t_1)) + \big((e^{rt_1})\big)$$

$$\Big(K\big(Q(t_2) + \theta(t_2)Q(t_2) - \hat{P} + e^{-\theta(t_2)}\big)\Big)$$

Dianalisis kestabilan untuk $t \in [t_1, t_2]$ pada persamaan $I(t) = c_1e^{rt} + c_2e^{-rt} + Q(t)$ akan mencapai kestabilan untuk $t \to t_2$. Tingkat persediaan berdasarkan parameter yang diberikan pada contoh 4.1 mengalami penurunan pada saat $t \to 15$ dan pada contoh 4.2 mengalami penurunan pada saat $t \to 18$. Artinya perusahaan mengalami penurunan yang disebabkan oleh permintaan barang.

5.2 Saran

Tugas akhir ini memaparkan tentang model persediaan barang yang mengalami penurunan dengan perubahan tingkat permintaan dan menyelesaikan dengan menggunakan teknik kendali optimal, maka diharapkan bagi pembaca yang tertarik dengan penelitian ini dapat mengembangkan penelitian dengan merubah tingkat permintaan dalam bentuk fungsi lainnya.

Demikian, saran yang siampaikan penulis, semoga pembaca bias mengembangkan lebih lanjut tentang persamaan differensial dinamik. Penulis juga meminta saran dan kritikan yang membangun dari pembaca demi kesempurnaan tugas akhir ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] P. Affandi, Faisal, and Y. Yulida, "Penerapan Teori Kendali Pada Masalah Inventori," *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, vol. 6, no. 2, pp. 38–46, 2012.

[2] P. A. Faisal, Y.Yulia, "Kendali Optimal Dari Sistem Inventori Dengan Peningkatan Dan Penurunan Barang," *Jurnal Mipa*, vol. 38, no. 1, pp. 79–88, 2015.

[3] N. Andiraja and D. Agustina, "Aplikasi Kendali Optimal Untuk Model Persediaan yang Mengalami Kerusakan pada Persediaan dan Perubahan Tingkat Permintaan," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 2, p. 12, 2020, doi: 10.24014/jsms.v6i2.10522.

[4] N. Andiraja and N. Mindiyarti, "Kendali Optimal Pada Model Persediaan Barang Yang Mengalami Weibull Deterioration Pada Waktu Berhingga," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 2, p. 52, 2020, doi: 10.24014/jsms.v6i2.10526.

[5] G.J. Olsder, *Mathematical System Theory*. Delft University Press, 1994.

[6] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Fifth Edit. Prentice Hall, 2009.

[7] F.L. Lewis and V.L. Syrmos, *Optimal Control Lewis*. Toronto: John Wiley & Sons, Inc, 1995.

[8] W. Xie, E. Engineering, A. Mathematics, T. E. Award, and D. T. Award, *Differential Equations for Engineers*. United States of America, 2010.

LAMPIRAN

1. Uji kestabilan untuk barang pada perusahaan ke-1 yang mengalami penurunan eksponensial dibantu dengan aplikasi maple.

> $with(plots)$

> $a := 30;\ b := 24;\ m := 30;\ h := 1.2;\ k := 50;\ c := 6\,t;\ d := 6;\ p := 0;\ s := 15$

> $r := \sqrt{\frac{h}{k} - 6 + (6(t))^2}$

> $$Q := \frac{1}{50\left(-\frac{1.2}{50} + 6 - (6(t))^2\right)}\big((1.2)(30) + 50((-6(24)(t)) + (6)\exp(-6(t)) + 6\exp(-6(t))((t)))\big)$$

> $$c_1 := \Big(\big((50((r-90)\,(\exp(-15\,r))))(30 - 1.124497992)\big) + \Big(\exp(0)\Big(50\Big(-\big(0.2667745982 - 0.01186060234e^{-90}\big) - (90)\big(0.2667745982 - 0.01186060234e^{-90}\big) + 24 - \exp(-90)\Big)\Big)\Big)\Big) \Big/ \left((\exp(r\cdot 0 - r\cdot 15))\left(k\left(\sqrt{\frac{h}{k} - d + (6(t))^2} - 90\right)\right) + (\exp(r\cdot 15 - r\cdot 0))\left(k\left(\sqrt{\frac{h}{k} - d + (6(t))^2} + 90\right)\right)\right)$$

> $$c_2 := \Big((-50((r-90)\exp(15\,r)))(30 - 1.124497992) + \exp(0)\Big(50\Big(\big(0.2667745982 - 0.01186060234e^{-90}\big) + (90)\big(0.2667745982 - 0.01186060234e^{-90}\big) - 24 + \exp(-90)\Big)\Big)\Big) \Big/ \left((\exp(r\cdot 0 - r\cdot 15))\left(k\left(\sqrt{\frac{h}{k} - d + (6(t))^2} - 90\right)\right) + (\exp(r\cdot 15 - r\cdot 0))\left(k\left(\sqrt{\frac{h}{k} - d + (6(t))^2} + 90\right)\right)\right)$$

> $f := c_1\cdot\exp(r\cdot t) + c_2\cdot\exp(-r\cdot t) + Q$

> $logplot(f, t = 0..15, color = blue)$

2. Uji kestabilan untuk barang pada perusahaan ke-2 yang mengalami penurunan eksponensial dibantu dengan aplikasi maple.

> $with(plots)$

> $a := 24;\ b := 30;\ m := 24;\ h := 1.6;\ k := 40;\ c := 4(t);\ d := 4;\ p := 0;\ s := 18$

> $r := \sqrt{\frac{h}{k} - d + (c)^2}$

> $$Q := \frac{1}{40\left(-\frac{1.6}{40} + 4 - (4(t))^2\right)}\big((1.6)(24) + 40((-4(30)(t)) + (4)\exp(-4(t)) + 4\exp(-4(t))((t)))\big)$$

>

$$c_1 := \Big(\big((40((r-72)\,(\exp(-18\cdot r))))(24-(0.7474747475))\big) + \big(\exp(0)\big(40\big(-\big(0.4167998703 - 0.0003860974046\,e^{-72}\big) - (72)\big(0.4167998703 - 0.0003860974046\,e^{-72}\big) + 30 - \exp(-72)\big)\big)\big)\Big) \Big/ \left((\exp(r\cdot 0 - r\cdot 18))\left(k\left(\sqrt{\frac{h}{k} - d + (4(t))^2} - 72\right)\right) + (\exp(r\cdot 18 - r\cdot 0))\left(k\left(\sqrt{\frac{h}{k} - d + (4(t))^2} + 72\right)\right)\right)$$

>

$$c_2 := \Big((-40((r-72)\exp(18\,r)))(24-(0.7474747475)) + \exp(0)\big(40\big(\big(0.4167998703 - 0.0003860974046\,e^{-72}\big) + (72)\big(0.4167998703 - 0.0003860974046\,e^{-72}\big) - 30 + \exp(-72)\big)\big)\Big) \Big/ \left((\exp(r\cdot 0 - r\cdot 18))\left(k\left(\sqrt{\frac{h}{k} - d + (4(t))^2} - 72\right)\right) + (\exp(r\cdot 18 - r\cdot 0))\left(k\left(\sqrt{\frac{h}{k} - d + (4(t))^2} + 72\right)\right)\right)$$

> $f := c_1\cdot\exp(r\cdot t) + c_2\cdot\exp(-r\cdot t) + Q$

> $logplot(f, t = 0\,..18, color = blue);$

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis lahir pada tanggal 16 Juli 1999 di Kota Padang, Sumatera Barat. Sebagai anak keempat dari empat bersaudara pasangan Bapak Aswardi Chan dan Ibu Surahma Yetni, S.Pd. Penulis menyelesaikan pendidikan Taman Kanak-kanak di Telkom Sandhy Putra Padang. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan formal pada Sekolah Dasar Negeri 15 Jati Tanah Tinggi, Kota Padang, Provinsi Sumatera Barat tahun 2011. Pada tahun 2014 penulis menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di SMP Negeri 9 Padang, Kota Padang, Provinsi Sumatera Barat dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas dengan Jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) di SMAN 14 Padang, Kota Padang, Provinsi Sumatera Barat pada tahun 2017. Pada tahun 2017 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Program Studi Matematika.

Pada bulan Januari tahun 2020 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Unit Pelaksana Teknis Perbanihan Tanaman Hutan Dinas Lingkungan Hidup dan Kehutanan Provinsi Riau dengan judul **"Peramalan Jumlah Permintaan Bibit Durian Menggunakan Metode Kuadrat Terkecil"** yang dibimbing oleh bapak Nilwan Adiraja,S.Pd.,M.Sc. dan diseminarkan pada tanggal 17 Juni 2020. Pada bulan Juli-Agustus 2020 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata-Dalam Jaringan (KKN-Daring) di Kelurahan Balai Gadang, Kec. Koto Tangah, Kota Padang, Provinsi Sumatera Barat. Bulan Desember Tahun 2022penulis telah menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"Aplikasi Kendali Optimal Dalam Masalah Inventori dengan Tingkat Permintaan Berupa Fungsi Eksponensial"** dibawah bimbingan bapak Nilwan Adiraja,S.Pd.,M.Sc. di Fakultas Sains dan Teknologi Program Studi Matematika.