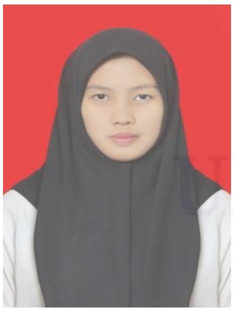
# *TRACE* MATRIKS SIMETRIS BENTUK KHUSUS $n \times n$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT NEGATIF

## TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

**SITI MARYAM**
**11754201906**



UIN SUSKA RIAU

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU**
**PEKANBARU**
**2022**

# LEMBAR PERSETUJUAN

**_TRACE_ MATRIKS SIMETRIS BENTUK KHUSUS**
**$n \times n$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT NEGATIF**

**TUGAS AKHIR**

oleh:

**SITI MARYAM**
**11754201906**

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 13 Juli 2022

| Ketua Program Studi | Pembimbing |
| --- | --- |
| Wartono, M.Sc. | Fitri Aryani, M.Sc. |
| NIP. 19730818 200604 1 003 | NIP. 19770913 200604 2 002 |

# LEMBAR PENGESAHAN

## *TRACE* MATRIKS SIMETRIS BENTUK KHUSUS $n \times n$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT NEGATIF

**TUGAS AKHIR**

oleh:

**SITI MARYAM**
**11754201906**

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada 13 Juli 2022

Pekanbaru, 13 Juli 2022
Mengesahkan

| Dekan | Ketua Jurusan |
|---|---|
| **Dr. Hartono, M.Pd.** | **Wartono, M.Sc.** |
| NIP. 19640301 199203 1 003 | NIP. 19730818 200604 1 003 |

**DEWAN PENGUJI**

**Ketua** : Nilwan Andiraja, S.Pd., M.Sc

**Sekretaris** : Fitri Aryani, M.Sc

**Anggota I** : Corry Corazon Marzuki, M.Si

**Anggota II** : Rahmawati, S.Si., M.Sc

Lampiran Surat :
Nomor : Nomor 25/2021
Tanggal : 27 Juli 2022

**SURAT PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | Siti Maryam |
| NIM | : | 11754201906 |
| Tempat/Tgl. Lahir | : | Sungai Piyai/07 Oktober 1998 |
| Fakultas/sarjana | : | Sains dan Teknologi/S1 |
| Prodi | : | Matematika |
| Judul Thesis | : | ***Trace* Matriks Simetris Bentuk Khusus $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Negatif** |

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan Skripsi dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah di sebutkan sumbernya
3. Oleh karena itu Skripsi saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat
4. Apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan Skripsi saya tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan perundang-undangan.

Demikan Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru , 27 Juli 2022
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
10000
10BB6AJX926799262

Siti Maryam
NIM. 11754201906

# LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

# LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan disuatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 13 Juli 2022
Yang membuat pernyataan,

**SITI MARYAM**
**11754201906**

# LEMBAR PERSEMBAHAN

## LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'aalamin, segala puji bagi Allah Subhanahu Wa Ta'ala yang telah melimpahkan rahmat dan nikmat-Nya. Sehingga penulis dapat menuntut ilmu dan belajar banyak hal. Semoga kita semua selalu dalam lindungan Allah Subhanahu Wa Ta'ala. Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi kita, Muhammad Shalallahu 'Alaihi Wasalam dengan mengucapkan "Allahhummaa shalli'alaa sayyidinaa muhammad wa'alaa aalii sayyidinaa muhammad". Beliau telah membawa kita dari zaman jahiliyah menuju zaman yang penuh ilmu pengetahuan.

## ABDUL RAHIM

Terimakasih yang tak terhingga kepada ayah, sosok pahlawan dalam hidupku. Ayah yang penuh tanggung jawab, ayah yang sangat sabar dalam mendidik dan membesarkan ku. Terimakasih yang sedalam-dalamnya untuk ayah karena telah menjadi sosok yang baik, yang selalu mengajarkan untuk selalu tahan banting terhadap kerasnya hidup. Terimakasih banyak untuk semua yang telah ayah lakukan yang tak akan pernah bisa saya balas kebaikan dan perjuanganmu yang tanpa pamrih. Ayah yang selalu bekerja banting tulang agar aku dapat mengenyam pendidikan, ayah yang selalu berdoa agar aku baik-baik saja di perantauan. Ayah yang selalu melindungi kami dan ayah sangat baik, ayah yang sangat sabar. Terimakasih yang tulus untuk ayahku dan semua rintih payahnya yang telah berjuang untuk keluarganya dengan ikhlas. Ayah adalah sosok yang saya kagumi dalam menjalani kerasnya hidup dan selalu mengajarkan untuk rendah hati, berbuat baik dan selalu minta pertolongan hanya kepada Allah Subhanahu Wa Ta'ala.

## KARTINI

Terimakasih yang tak terhingga juga saya sampaikan kepada ibu yang sangat saya cintai, sosok yang sangat baik hati, sabar dan sayang terhadap anak-anaknya. Ibu yang sangat saya kagumi dalam menjalani hidup. Ibu yang selalu mendoakan anak-anaknya, ibu yang siang dan malam selalu mendoakan yang terbaik agar anaknya bisa bertahan saat kesulitan. Ya Allah, terimakasih banyak telah melahirkan saya dari sosok ibu yang sangat berhati malaikat, beliau adalah ibu yang sangat mulia yang selalu mengajarkan kebaikan, sabar dan ikhlas dalam menjalani hidup. Ibu terimakasih sebanyak-banyaknya untuk jasa mu yang tak akan pernah bisa terbalas. Ibu engkau adalah alasan untuk saya tidak pernah menyerah dan selalu bangkit saat mengalami hal sulit. Ayah dan ibu adalah malaikat tanpa sayap, ya Allah terimakasih banyak atas segala nikmat-Mu yang telah memberikan saya sosok ayah dan ibu yang sangat baik hati dan penyayang. Ya Allah saya sangat bersyukur mempunyai orang tua seperti mereka. Ya Allah semoga saya dapat menjadi anak yang berbakti kepada orang tua. Terimalah persembahan karya sederhana ini sebagai bukti kesungguhan selama menuntut ilmu.

## Adik-adikku

Untuk adik-adikku tercinta yaitu Rosma, Idris, Agus, Harun dan Umar, terimakasih yang sangat dalam untuk kalian semua. Terimakasih telah menjadi sosok adik-adik yang sayang terhadap kakaknya. Terimakasih banyak telah menjaga ayah dsn ibu selama saya di perantauan. Kalian adalah alasan saya untuk sukses agar dapat membahagiakan orang tua dan adik-adik saya. Semoga kalian mempunyai masa depan yang cerah. Ya Allah semoga saya dapat menyekolahkan adik-adik kelak. Aamiin ya rabbal alamiin.

## Fitri Aryani, M.Sc

Terimakasih banyak kepada ibu yang sangat baik hati dan sabar yang telah meluangkan waktunya untuk membimbing saya, ibu yang selalu sabar dalam memberikan pengarahan dan dorongan dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Terimakasih tak terhingga kepada ibu yang sangat banyak memberikan nasihat dan saran selama membimbing.

## Nilwan Andiraja,S.Pd., M.Sc

Terimakasih banyak kepada bapak yang telah meluangkan waktunya untuk memberi bimbingan, pengarahan dan selalu sabar mendengarkan keluhan dari mahasiswa bimbingannya. Pembimbing yang selalu membantu jika ada kesulitan dalam akademik.

## Sahabat-Sahabatku

Terimakasih banyak kepada sahabat-sahabat yang selalu membantu dalam kesulitan selama masa kuliah. Semoga kita dapat menjadi sosok yang bermanfaat bagi orang lain. Semoga kita sukses dimasa depan. Aamiin ya rabbal alamiin.

# *TRACE* MATRIKS SIMETRIS BENTUK KHUSUS $n \times n$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT NEGATIF

**SITI MARYAM**
**11754201906**

Tanggal Sidang : 13 Juli 2022
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

## ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang *trace* matriks simetris bentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat negatif. Untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matiks simetris bentuk khusus $n \times n$ yang berpangkat bilangan bulat negatif maka dilakukan perpangkatan matriks simetris $A_n^{-m}$ dengan $6 \le n \le 8$ dan $1 \le m \le 10$. Selanjutnya menduga bentuk umum perpangkatan matriks $A_n^{-m}$ dan dibuktikan menggunakan aturan invers. Setelah diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks simetris $A_n^{-m}$ maka diperoleh *trace* matriks simetris $A_n^{-m}$. Diberikan contoh-contoh soal sebagai aplikasi.

**Kata Kunci** : Aturan Invers, Matriks Simetris, Perpangkatan Matriks, *Trace* Matriks.

# *TRACE OF NEGATIVE INTEGER POWER OF $n \times n$ SPESIFIC SYMMETRIC MATRIX*

***SITI MARYAM***
***11754201906***

*Date of Final Exam : 13th July 2022*
*Date of Graduation :*

*Department of Mathematics*
*Faculty of Science and Technology*
*State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau*
*Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru*

## ABSTRACT

*This final project discusses the symmetric trace matrix* $n \times n$ *of a special form to the power of negative integers. To obtain the general form of a symmetrical trace matrix* $n \times n$ *with a special form that has the power of a negative integer, then the power of the symmetric matrix is performed* $A_n^{-m}$ by $6 \le n \le 8$ and $1 \le m \le 10$. *Next, estimate the general form of the exponential of matrix* $A_n^{-m}$ *and prove it by the inverse rule. After obtaining the general form of a symmetric trace matrix* $A_n^{-m}$, *then a symmetric trace matrix* $A_n^{-m}$ *is obtained. An example problem is given as an application.*

**Keywords** : *Inverse Rule, Symmetric Matrix, Exponents of Matrix, Trace Matrix.*

# KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh*

Puji dan syukur atas kehadirat Allah *subhanahu wata'ala* yang telah melimpahkan rahmat serta kasih sayangnya kepada hambanya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"*Trace* Matriks Simetris Bentuk Khusus $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Negatif".** Shalawat serta salam tak lupa pula kita hadiahkan kepada baginda Nabi Muhammad *shalallahu 'alaihi wasalam* yang atas pertolongannya ilmu pengetahuan dapat kita rasakan hingga saat ini.

Terimakasih juga saya ucapkan kepada semua pihak yang membantu dalam proses penyusunan Tugas Akhir ini. Terutama kepada ayah saya Abdul Rahim dan ibu saya Kartini terimakasih banyak yang tak terhingga untuk segala hal yang dilakukan dan perjuangannya dalam mendidik dan membesarkan penulis. Terimakasih banyak atas kasih sayang yang tiada batasnya, atas nasihat yang sangat berguna dan untuk segalanya yang tak pernah bisa penulis balas, terimakasih untuk doa-doa tulus kalian yang agar segala urusan penulis dipermudah oleh Allah *subhanahu wata'ala*. Kemudian ucapan terimakasih sebanyak-banyaknya untuk:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd., M.Sc. selaku Sekretaris dan Pembimbing Akademik Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku pembimbing yang atas bimbingan, arahan, nasehat serta motivasinya yang selalu diberikan kepada saya dengan sabar sehingga dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.
6. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si dan Ibu Rahmawati, S.Si., M.Sc selaku Penguji I dan II yang atas kritik dan sarannya sehingga Tugas Akhir ini dapat diselesaikan.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
8. Adik-adik saya yang tercinta yaitu Rosma, Idris, Agus, Harun dan Umar yang telah menyayangi dan mendukung saya selama kuliah. Adik-adik yang menjadi alasan saya untuk sukses.
9. Kakek saya H. Rafi dan Alm. Daeng Pagessa yang telah memberikan saya semangat dalam belajar. Paman saya M. Akbar dan bibi saya Kasmawati yang selalu membantu saya selama kuliah.
10. Teman-teman saya yang selalu memotivasi saya untuk tidak menyerah dan terus belajar yaitu Daniyyell, Talha Zaman, Fitri Kurniyawati, Rita Sari, Siti Nur Khasanah, Atiqah Qonita dan Were Tendrisanna.
11. Teman-teman Fakultas Sains dan Teknologi Khususnya Program Studi Matematika Angkatan 2017.

Penelitian ini dikerjakan semaksimal mungkin oleh penulis. Tetapi sangat memungkinan adanya kesalahan dalam penyampaian materi atau penulisan sehingga diharapkan kritik dan saran yang mendukung perbaikan dari berbagai pihak agar lebih sempurnanya penelitian ini. *Aamiin Yaa Rabbal 'Alamiin. Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh*

Pekanbaru, 13 Juli 2022

**SITI MARYAM**
**11754201906**

# DAFTAR IS I

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Suatu matriks yang jika ditransposkan menghasilkan matriks itu sendiri disebut matriks simetris. Matriks simetris merupakan salah satu dari beberapa jenis matriks. Pembahasan mengenai matriks simetris salah satunya yaitu tentang *trace* matriks simetris.

Pembahasan mengenai *trace* matriks berpangkat banyak dilakukan oleh beberapa peneliti sebelumnya. Terdapat penelitian mengenai bentuk umum *trace* matriks berpangkat. Tahun 2015 oleh [1] dilakukan penelitian tentang *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan yaitu matriks real ukuran $2 \times 2$. Bentuk matriksnya yaitu:

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in R.$$

Adapun bentuk umum *trace* matriks real berpangkat bilangan bulat positif, sebagai berikut:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)]\,[n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}$$ , untuk $n$ genap.

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)]\,[n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}$$ , untuk $n$ ganjil.

Dari penelitian [1], pada tahun 2017 penelitian [2] membahas tentang *trace* matriks real yang berukuran sama namun berpangkat bilangan bulat negatif. Bentuk matriksnya yaitu:

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in R.$$

Adapun diperoleh bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif sebagai berikut:

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n},$$

untuk $n$ genap.

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}$$

, untuk $n$ ganjil.

Tahun 2018 penelitian oleh [3] juga membahas tentang *trace* matriks $2\times2$ berpangkat bilangan bulat negatif, namun matriks yang digunakan matriks berbentuk khusus yaitu:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall a,b \in R.$$

Pada penelitian tersebut diperoleh hasil sebagai berikut:

$$tr\left(A^{-n}\right) = \begin{cases} 0, untuk\ \ n\, ganjil \\ \dfrac{2}{(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}}, untuk\ \ n\, genap \end{cases}$$

Di tahun yang berbeda yaitu 2019 dilakukan penelitian oleh [4] tentang *trace* matriks real berpangkat bilangan bulat berbentuk khusus $3\times3$. Matriks yang digunakan yaitu:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a,b \in R.$$

Pada penelitian tersebut diperoleh hasil sebagai berikut:

$$tr\left(A_3^{-n}\right)=\begin{cases} a^{-n}, untuk\ \ n\, ganjil \\ a^{-\frac{n}{2}}\left(2b^{-\frac{n}{2}}+a^{-\frac{n}{2}}\right), untuk\ \ n\, genap \end{cases}$$

Tahun 2020 penelitian oleh [5] juga membahas *trace* matriks berpangkat bilangan bulat, namun bentuk matriks yang digunakan yaitu matriks segitiga $4\times 4$ yang mana berbeda dari penelitian oleh [4]. Matriks yang digunakan yaitu:

$$A_4=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in R.$$

$$B_4=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in R.$$

Pada penelitian tersebut diperoleh hasil sebagai berikut:

$$tr\left(A_4^n\right)=tr\left(B_4^n\right)=4\left(a^n\right), \forall n\in Z^+$$

$$tr\left(A_4^{-n}\right)=tr\left(B_4^{-n}\right)=\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^n}=4\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Penelitian tentang *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif juga dilakukan oleh [6] pada tahun 2021, namun bentuk matriks yang digunakan matriks $n\times n$ yaitu:

$$A_n=\begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix} \text{dengan } a\in R.$$

Pada penelitian tersebut diperoleh hasil sebagai berikut:

$$tr\left(A_n^m\right)=tr\begin{bmatrix} n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{m-1}a^m & n^{m-1}a^m & \dots & n^{m-1}a^m \end{bmatrix}=n.n^{m-1}a^m=n^m a^m=\left(na\right)^m.$$

Pada tahun yang sama yaitu tahun 2021, [7] juga membahas tentang *trace* matriks $3\times 3$ berpangkat bilangan bulat. Namun, jenis matriks yang digunakan adalah matriks simetris yaitu:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R, b \neq 0.$$

Pada penelitian tersebut diperoleh hasil sebagai berikut:

$tr(A_3^n) = (2^n - (-1)^{n+1}2)b^n$, untuk $n$ positif

$tr(A_3^{-n}) = \dfrac{(-1)^n 2^{n+1} + 1}{2^n b^n}$, untuk $n$ negatif

Penelitian selanjutnya di tahun yang sama 2021 oleh [8] melakukan penelitian tentang *trace* matriks berpangkat bilangan bulat dengan ukuran yang diperbesar dari penelitian sebelumnya oleh [7] yaitu $4\times 4$. Bentuk matriks yang digunakan yaitu:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R, b \neq 0.$$

Pada penelitian tersebut diperoleh hasil sebagai berikut:

$tr(A_4^n) = (3^n - (-1)^{n+1}3)b^n$, untuk $n$ positif

$tr(A_4^{-n}) = \dfrac{(-1)^n 3^{n+1} + 1}{3^n b^n}$, untuk $n$ negatif

Dengan pembahasan yang sama dengan peneliti [7] dan [8], maka peneliti [9] menggunakan matriks simetris dengan ukuran yang diperbesar dari sebelumnya yaitu $5\times 5$. Bentuk matriks yang digunakan yaitu:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix} \forall b \in R, b \neq 0.$$

Pada penelitian tersebut diperoleh hasil sebagai berikut:

$tr(A_5^n) = \left(4^n - (-1)^{n+1} 4\right) b^n$, untuk $n$ positif

$tr(A_5^{-n}) = \dfrac{(-1)^n 4^{n+1} + 1}{4^n b^n}$, untuk $n$ negatif

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh [7], [8] dan [9] tentang *trace* matriks simetris berpangkat bilangan bulat, maka penulis tertarik untuk meneliti tentang *trace* matriks simetris bentuk khusus $n \times n$ dengan pangkat bilangan bulat negatif. Dengan demikian, penulis mengambil judul tugas akhir **"*Trace* Matriks Simetris Bentuk Khusus $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Negatif"**.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas maka diperoleh suatu rumusan masalah yaitu bagaimana bentuk umum dari *trace* matriks simetris bentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat negatif?

## 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini adalah matriks yang digunakan yaitu matriks simetris bentuk khusus $n \times n$ sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & \cdots b \\ b & 0 & b & b & \cdots b \\ b & b & 0 & b & \cdots b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ b & b & b & b & \cdots 0 \end{bmatrix} \forall b \in R, b \neq 0 \qquad (1.1)$$

## 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian pada tugas akhir ini adalah mendapatkan bentuk umum *trace* matriks simetris bentuk khusus $n \times n$ dari Persamaan (1.1) berpangkat bilangan bulat negatif.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Adapun beberapa manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memberikan wawasan kepada penulis dan pembaca tentang *trace* matriks simetris bentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat negatif.
2. Sebagai referensi baru dalam dunia pendidikan khususnya dalam bidang ilmu matematika.

## 1.6 Sistematika Penelitian

**BAB I PENDAHULUAN**

Pada bab ini berisikan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

**BAB II LANDASAN TEORI**

Bab ini menjelaskan landasan teori yang digunakan yaitu matriks simetris, perkalian matriks, determinan matriks, invers matriks, *trace* matriks, *trace* matriks berpangkat dan aturan invers.

**BAB III METODE PENELITIAN**

Pada bab ini berisikan langkah-langkah yang digunakan untuk mendapatkan bentuk umum dari *trace* matriks simetris bentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat negatif.

**BAB IV PEMBAHASAN**

Bab ini menjelaskan bagaimana mendapatkan bentuk umum *trace* matriks simetris bentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat negatif.

**BAB V PENUTUP**

Bab ini berisi kesimpulan dari semua pembahasan pada tugas akhir ini dan saran dari penulis.

# BAB II
# LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas teori-teori pendukung yang berkaitan dengan materi matriks yang akan digunakan pada bab selanjutnya. Adapun teori tersebut yaitu mengenai matriks simetris, perkalian matriks, determinan matriks, invers matriks, *trace* matriks, *trace* matriks berpangkat dan pembuktian dengan aturan invers.

## 2.1 Matriks Simetris

Diberikan definisi mengenai matriks simetris yang berkaitan dengan transpos matriks pada Definisi 2.1 sebagai berikut:

**Definisi 2.1** [10] Jika $A$ adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari $A$ (*transpose of* $A$), dinyatakan dengan $A^T$, didefinisikan sebagai $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari $A$; sehingga kolom pertama dari $A^T$ adalah baris pertama dari $A$, kolom kedua dari $A^T$ adalah baris kedua dari $A$, dan seterusnya.

Selanjutnya, diberikan penjelasan tentang matriks simetris yang berkaitan dengan matriks bujur sangkar pada Definisi 2.2 berikut:

**Definisi 2.2** [10] Suatu matriks bujursangkar $A$ adalah simetris (*symmetric*) jika $A = A^T$.

Diberikan contoh mengenai matriks simetris pada Contoh 2.1 sebagai berikut:

**Contoh 2.1** Misalkan diberikan suatu matriks yaitu matriks $A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

dan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 10 \\ 5 & 0 & 6 & 12 \\ -7 & 6 & 3 & 8 \\ 10 & 12 & 8 & -4 \end{bmatrix}$. Tentukan transpos kedua matriks tersebut!

**Penyelesaian:**

Diketahui

$$A=\begin{bmatrix} -7 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 10 \\ 5 & 0 & 6 & 12 \\ -7 & 6 & 3 & 8 \\ 10 & 12 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh transpos dari matriks $A$ dan $B$ yaitu

$$A^T=\begin{bmatrix} -7 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B^T=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 10 \\ 5 & 0 & 6 & 12 \\ -7 & 6 & 3 & 8 \\ 10 & 12 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Dari operasi transpos matriks diatas terbukti bahwa $A = A^T$ dan $B = B^T$. Hal itu menunjukkan bahwa matriks $A$ dan $B$ adalah matriks simetris.

## 2.2 Perkalian Matriks

### 2.2.1 Perkalian Matriks dengan Skalar

Berikut diberikan definisi mengenai perkalian matriks dengan skalar pada Definisi 2.3 berikut:

**Definisi 2.3** [10] Jika $A$ adalah matriks sebarang dan $c$ adalah skalar sebarang, maka hasilkali-nya (*product*) $cA$ adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks $A$ dengan bilangan $c$. Matriks $cA$ disebut sebagai kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari $A$.

Diberikan contoh mengenai perkalian matriks dengan skalar pada Contoh 2.2 sebagai berikut:

**Contoh 2.2** Misalkan diberikan suatu matriks $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, matriks $B=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ dan $k=8$. Tentukan $kA$ dan $kB$ matriks tersebut!

**Penyelesaian:**

$kA = 8\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8(5) & 8(7) \\ 8(4) & 8(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 56 \\ 32 & 16 \end{bmatrix}$ dan $kB = 8[2 \quad 5 \quad 9] = [16 \quad 40 \quad 72]$.

### 2.2.2 Perkalian Matriks dengan Matriks

Berikut diberikan definisi mengenai perkalian matriks dengan matriks pada Definisi 2.4 berikut:

**Definisi 2.4** [10] Jika $A$ adalah matriks $m \times r$ dan $B$ adalah matriks $r \times n$ maka hasilkali (*product*) *AB* adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris $i$ dan kolom $j$ dari *AB*, pisahkan baris $i$ dari matriks $A$ dan kolom $j$ dari matriks $B$. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

Selanjutnya diberikan contoh mengenai perkalian matriks dengan matriks pada Contoh 2.3 sebagai berikut:

**Contoh 2.3** Diberikan suatu matriks yaitu matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 9 \\ 7 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan

$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ tentukan hasil kali matriks $A$ dan $B$ !

**Penyelesaian:**

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 9 \\ 7 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ sehingga hasil kali matriks $A$ dan $B$ adalah

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 9 \\ 7 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 24 & 21 & 53 \\ 14 & 33 & 23 & 56 \\ 29 & 56 & 32 & 91 \\ 30 & 30 & 19 & 91 \end{bmatrix}.$$

Diberikan teorema mengenai sifat-sifat matriks simetris pada Teorema 2.1 berikut:

**Teorema 2.1** [10] Jika $A$ dan $B$ adalah matriks-matriks simetris dengan ukuran yang sama, dan jika $k$ adalah skalar sebarang, maka:

1. $A^T$ adalah simetris
2. $A+B$ dan $A-B$ adalah simetris
3. $kA$ adalah simetris

Selanjutnya, diberikan contoh mengenai sifat-sifat matriks simetris pada Contoh 2.4 sebagai berikut:

**Contoh 2.4** Diberikan suatu matriks yaitu matriks $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -11 & 7 & 15 \\ 2 & 7 & 21 & -1 \\ 8 & 15 & -1 & 25 \end{bmatrix}$ dan

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 \\ -5 & 9 & -10 & 12 \\ 2 & -10 & -6 & 19 \\ 7 & 12 & 19 & 13 \end{bmatrix}.$$

Buktikan bahwa:

1. $A$ dan $B$ adalah simetris
2. $A+B$ dan $A-B$ adalah simetris
3. $kA$ dan $kB$ adalah simetris

**Penyelesaian:**

1. Akan dibuktikan bahwa $A$ dan $B$ adalah simetris.

Diketahui bahwa matriks $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -11 & 7 & 15 \\ 2 & 7 & 21 & -1 \\ 8 & 15 & -1 & 25 \end{bmatrix}$ dan hasil transpos

$$A^T = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -11 & 7 & 15 \\ 2 & 7 & 21 & -1 \\ 8 & 15 & -1 & 25 \end{bmatrix}$$

maka $A = A^T$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 \\ -5 & 9 & -10 & 12 \\ 2 & -10 & -6 & 19 \\ 7 & 12 & 19 & 13 \end{bmatrix}$ dan hasil transpos

$B^T = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 \\ -5 & 9 & -10 & 12 \\ 2 & -10 & -6 & 19 \\ 7 & 12 & 19 & 13 \end{bmatrix}$, maka $B = B^T$.

Dapat disimpulkan bahwa $A$ dan $B$ adalah simetris. Hal ini terbukti dari $A = A^T$ dan $B = B^T$.

2. Akan dibuktikan bahwa $A+B$ dan $A-B$ adalah simetris

a. Akan ditunjukkan bahwa $A+B = (A+B)^T$

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -11 & 7 & 15 \\ 2 & 7 & 21 & -1 \\ 8 & 15 & -1 & 25 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 \\ -5 & 9 & -10 & 12 \\ 2 & -10 & -6 & 19 \\ 7 & 12 & 19 & 13 \end{bmatrix}$.

Sehingga

$$A+B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -11 & 7 & 15 \\ 2 & 7 & 21 & -1 \\ 8 & 15 & -1 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 \\ -5 & 9 & -10 & 12 \\ 2 & -10 & -6 & 19 \\ 7 & 12 & 19 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 4 & 15 \\ -5 & -2 & -3 & 27 \\ 4 & -3 & 15 & 18 \\ 15 & 27 & 18 & 38 \end{bmatrix}$$

dan $(A+B)^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 4 & 15 \\ -5 & -2 & -3 & 27 \\ 4 & -3 & 15 & 18 \\ 15 & 27 & 18 & 38 \end{bmatrix}$.

b. Akan dibuktikanbahwa $A-B = (A-B)^T$

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -11 & 7 & 15 \\ 2 & 7 & 21 & -1 \\ 8 & 15 & -1 & 25 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 \\ -5 & 9 & -10 & 12 \\ 2 & -10 & -6 & 19 \\ 7 & 12 & 19 & 13 \end{bmatrix}$.

Sehingga

$$A-B=\begin{bmatrix}-5 & 0 & 2 & 8\\ 0 & -11 & 7 & 15\\ 2 & 7 & 21 & -1\\ 8 & 15 & -1 & 25\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -5 & 2 & 7\\ -5 & 9 & -10 & 12\\ 2 & -10 & -6 & 19\\ 7 & 12 & 19 & 13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 5 & 0 & 1\\ 5 & -20 & 17 & 3\\ 0 & 17 & 27 & -20\\ 1 & 3 & -20 & 12\end{bmatrix}$$

dan $(A-B)^T=\begin{bmatrix}-6 & 5 & 0 & 1\\ 5 & -20 & 17 & 3\\ 0 & 17 & 27 & -20\\ 1 & 3 & -20 & 12\end{bmatrix}$.

Dari hasil operasi penjumlahan dan pengurangan matriks $A$ dan $B$ kemudian hasil tersebut di transposkan maka $A+B$ dan $A-B$ adalah simetris. Hal ini dikarenakan $A+B=(A+B)^T$ dan $A-B=(A-B)^T$.

3. Akan dibuktikan bahwa $kA$ dan $kB$ adalah simetris.

Diketahui matriks $A=\begin{bmatrix}-5 & 0 & 2 & 8\\ 0 & -11 & 7 & 15\\ 2 & 7 & 21 & -1\\ 8 & 15 & -1 & 25\end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix}1 & -5 & 2 & 7\\ -5 & 9 & -10 & 12\\ 2 & -10 & -6 & 19\\ 7 & 12 & 19 & 13\end{bmatrix}$.

Sehingga, hasil kali skalar terhadap matriks $A$ yaitu

$kA=k.\begin{bmatrix}-5 & 0 & 2 & 8\\ 0 & -11 & 7 & 15\\ 2 & 7 & 21 & -1\\ 8 & 15 & -1 & 25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5k & 0 & 2k & 8k\\ 0 & -11k & 7k & 15k\\ 2k & 7k & 21k & -k\\ 8k & 15k & -k & 25k\end{bmatrix}$ dan transpos dari $kA$

yaitu $(kA)^T=\begin{bmatrix}-5k & 0 & 2k & 8k\\ 0 & -11k & 7k & 15k\\ 2k & 7k & 21k & -k\\ 8k & 15k & -k & 25k\end{bmatrix}$.

Hasil kali skalar terhadap matriks $B$ yaitu

$$kB = k.\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 \\ -5 & 9 & -10 & 12 \\ 2 & -10 & -6 & 19 \\ 7 & 12 & 19 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -5k & 2k & 7k \\ -5k & 9k & -10k & 12k \\ 2k & -10k & -6k & 19k \\ 7k & 12k & 19k & 13k \end{bmatrix}$$ dan transpos dari

$kB$ yaitu $$(kB)^T = \begin{bmatrix} k & -5k & 2k & 7k \\ -5k & 9k & -10k & 12k \\ 2k & -10k & -6k & 19k \\ 7k & 12k & 19k & 13k \end{bmatrix}.$$

Dari hasil perkalian skalar terhadap matriks $A$ dan $B$ diatas maka diperoleh bahwa $kA = (kA)^T$ dan $kB = (kB)^T$. Sehingga terbukti bahwa $kA$ dan $kB$ adalah simetris.

### 2.2.3 Perpangkatan Matriks

Perpangkatan matriks akan dijelaskan pada Definisi 2.5 seperti berikut:

**Definisi 2.5** [10] Jika $A$ adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat integer taknegatif dari $A$ adalah

$$A^0 = I, \quad A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{n\ faktor} \ (n > 0).$$

Selanjutnya, jika $A$ dapat dibalik, maka definisi dari pangkat integer negatif dari $A$ adalah

$$A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n, \quad A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{n\ faktor}$$

Selanjutnya, diberikan contoh soal tentang perpangkatan matriks sebagai berikut:

**Contoh 2.5** Misalkan diberikan suatu matriks dengan ukuran $4\times 4$ yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ dan $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-19}{6} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{-11}{6} \\ \frac{7}{6} & -1 & -1 & \frac{5}{6} \\ \frac{-1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{-1}{6} \end{bmatrix}$$ tentukan $A^2$, $A^3$ dan $A^{-3}$!

**Penyelesaian:** Dengan menggunakan aturan perkalian matriks maka diperoleh:

$$A^2 = A.A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 44 & 56 & 44 \\ 22 & 58 & 24 & 30 \\ 5 & 15 & 60 & 47 \\ 10 & 26 & 32 & 38 \end{bmatrix}$$

dan

$$A^3 = A^2.A$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 44 & 56 & 44 \\ 22 & 58 & 24 & 30 \\ 5 & 15 & 60 & 47 \\ 10 & 26 & 32 & 38 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 172 & 460 & 592 & 588 \\ 100 & 276 & 672 & 604 \\ 172 & 456 & 328 & 352 \\ 112 & 304 & 400 & 360 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = \left(A^{-1}\right)^3$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-19}{6} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{-11}{6} \\ \frac{7}{6} & -1 & -1 & \frac{5}{6} \\ \frac{-1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{-1}{6} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{-19}{6} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{-11}{6} \\ \frac{7}{6} & -1 & -1 & \frac{5}{6} \\ \frac{-1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{-1}{6} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{-19}{6} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{-11}{6} \\ \frac{7}{6} & -1 & -1 & \frac{5}{6} \\ \frac{-1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{-1}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-20573}{432} & \frac{5645}{144} & \frac{281}{6} & \frac{-14593}{432} \\ \frac{1931}{108} & \frac{-265}{18} & \frac{-211}{12} & \frac{2741}{216} \\ \frac{-209}{96} & \frac{57}{32} & \frac{17}{8} & \frac{-145}{96} \\ \frac{923}{432} & \frac{-251}{144} & \frac{-25}{12} & \frac{637}{432} \end{bmatrix}.$$

## 2.3 Determinan dan Invers Matriks

Berikut dijelaskan definisi mengenai determinan matriks pada Definisi 2.6 yaitu:

**Definisi 2.6** [10] Misalkan $A$ adalah suatu matriks bujursangkar. *Fungsi determinan* (*determinant function*) dinotasikan dengan det dan kita mendefinisikan det ($A$) sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari $A$. Angka det ($A$) disebut *determinan dari* $A$ (*determinant of* $A$).

Ada beberapa metode yang dapat digunakan dalam menghitung determinan suatu matriks salah satunya yaitu ekspansi kofaktor. Berikut adalah definisi dan teorema yang berkaitan dengan ekspansi kofaktor.

Selanjutnya, diberikan Definisi 2.7 tentang ekspansi kofaktor yang dapat digunakan dalam menghitung determinan matriks yaitu:

**Definisi 2.7** [10] Jika $A$ adalah suatu matriks bujursangkar, maka minor dari entri $a_{ij}$ dinyatakan sebagai $M_{ij}$ dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ dihilangkan dari $A$. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan sebagai $C_{ij}$ dan disebut sebagai kofaktor dari entri $a_{ij}$.

Diberikan Definisi 2.8 yang membahas tentang matriks kofaktor seperti berikut:

**Definisi 2.8** [10] Jika $A$ adalah matriks $n \times n$ sebarang dan $C_{ij}$ adalah kofaktor dari $a_{ij}$, maka matriks $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$ disebut matriks kofaktor dari $A$ (*matrix of cofactors from A*). Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari $A$ (*adjoint of* $A$) dan dinyatakan sebagai $\operatorname{adj}(A)$.

Selanjutnya, diberikan contoh tentang mencari minor matriks pada Contoh 2.6 berikut:

**Contoh 2.6** Misalkan diberikan suatu matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan minor dari entri $a_{23}$!

**Penyelesaian:**

$M_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = 13$, maka kofaktor dari $a_{23}$ adalah

$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = -13.$

Diberikan Teorema 2.2 tentang determinan matriks seperti berikut:

**Teorema 2.2** [10] Determinan dari matriks $A$, $n \times n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasilkali-hasilkali yang diperoleh; dimana untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$.

Berikut dipaparkan rumus tentang ekspansi kofaktor tersebut.

1. Ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke- $j$

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \tag{2.1}$$

2. Ekspansi kofaktor sepanjang baris ke- $i$

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \tag{2.2}$$

Selanjutnya diberikan contoh tentang mencari determinan matriks menggunakan ekspansi kofaktor seperti Contoh 2.7 berikut:

**Contoh 2.7** Misalkan diberikan suatu matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, maka hitunglah $\det(A)$ menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama dari $A$!

**Penyelesaian:**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0(0-6) - 4(10-2) + 7(15-0)$$

$$= 0 - 32 + 105$$

$$= 73$$

Sehingga, determinan dari matriks $A$ adalah 73.

Berikut penjelasan tentang invers matriks pada Definisi 2.9 yaitu:

**Definisi 2.9** [10] Jika $A$ adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks $B$ yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka $A$ disebut dapat dibalik (*invertible*) dan $B$ disebut sebagai *invers* ( *inverse*) dari $A$. Jika matriks $B$ tidak dapat didefinisikan, maka $A$ dinyatakan sebagai ***matriks singular.***

Selanjutnya diberikan teorema mengenai invers matriks pada Teorema 2.3 berikut:

**Teorema 2.3** [10] Jika $A$ adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Selanjutnya diberikan contoh tentang mencari invers matriks seperti pada Contoh 2.8 berikut:

**Contoh 2.8** Misalkan diberikan suatu matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan invers dari matriks $A$ tersebut !

**Penyelesaian:**

Berdasarkan Contoh 2.7 maka diperoleh hasil $\det(A) = -5$ dan $kof(A) = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -1 \end{bmatrix}$, selanjutnya untuk mencari invers matriks diperlukan nilai adjoin. Untuk menentukan $adj(A)$ dapat menggunakan Definisi 2.8 yaitu $kof(A)^T = adj(A)$. Sehingga diperoleh:

$$A^{-1} = \frac{1}{`\det(A)} adj(A) = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 10 & 0 & -15 \\ -4 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0.8 & 0.2 & -1.2 \\ 0.2 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0.8 & 0.2 & -1.2 \\ 0.2 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

## 2.4 *Trace* Matriks

Diberikan definisi mengenai *trace* matriks pada Definisi 2.10 berikut:

**Definisi 2.10** [10] Jika $A$ adalah sebuah matriks bujursangkar, maka *trace* dari $A$ (*trace of* $A$) yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama $A$. *Trace* dari $A$ tidak dapat didefinisikan jika $A$ bukan matriks bujursangkar.

Selanjutnya diberikan contoh yang membahas *trace* matriks seperti Contoh 2.9 berikut:

**Contoh 2.9** Misalkan diberikan suatu matriks $A=\begin{bmatrix}1&2&1&6\\2&3&0&5\\0&7&2&1\\4&5&1&6\end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(A)$ dan $tr(A)^2$ dari matriks tersebut!

**Penyelesaian:**

Untuk mencari $tr(A)$ dan $tr(A)^2$ kita dapat menggunakan definisi tentang *trace*. Berdasarkan Definisi 2.10, maka $tr(A)$ dan $tr(A)^2$ adalah sebagai berikut:

$tr(A)=1+3+2+6=12.$

Untuk menentukan $tr(A)^2$, maka matriks $A$ harus dikalikan terlebih dahulu terhadap matriks $A$ agar menghasilkan $A^2$ dan setelah mendapatkan perpangkatannya maka kita dapat mencari *trace* matriks tersebut.

$$A^2 = A\cdot A$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&1&6\\2&3&0&5\\0&7&2&1\\4&5&1&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&1&6\\2&3&0&5\\0&7&2&1\\4&5&1&6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}29&45&9&53\\28&38&7&57\\18&40&5&43\\38&60&12&86\end{bmatrix}$$

maka diperoleh:

$tr(A)^2=29+38+5+86=158.$

## 2.5 *Trace* Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Penelitian sebelumnya membahas tentang bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif dengan menggunakan matriks simetris bentuk khusus $5 \times 5$ yang diteliti oleh [9]. Berikut uraian tahapan dalam memperoleh *trace* matriks tersebut.

a. Diberikan suatu matriks simetris bentuk khusus $5 \times 5$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix} \forall b \in R, b \neq 0$$

b. Menentukan $A_5^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} \\ \frac{1}{4b} & -\frac{3}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & -\frac{3}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & -\frac{3}{4b} & \frac{1}{4b} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & -\frac{3}{4b} \end{bmatrix}$

c. Menentukan $A_5^{-1}$ sampai $A_5^{-10}$ dengan menggunakan Maple 13.

d. Menduga bentuk umum $A_5^{-n}$ sebagai berikut:

$$A_5^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis $A_5^{-n} = [c_{i,j}]$ dengan

$$c_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n 4^{n+1} + 1}{5.4^n b^n}, i = j \\ \dfrac{(-1)^{n+1} 4^n + 1}{5.4^n b^n}, i \neq j \end{cases}$$

Langkah selanjutnya, setelah memperoleh dugaan bentuk umum, maka dilakukan pembuktian dengan menggunakan definisi invers yang akan disajikan pada Teorema 2.4 sebagai berikut:

**Teorema 2.4** [9] Diberikan suatu matriks $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix} \forall b \in R, b \neq 0$ maka:

$$A_5^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis $A_5^{-n} = [c_{i,j}]$ dengan

$$c_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n 4^{n+1} + 1}{5.4^n b^n}, i = j \\ \dfrac{(-1)^{n+1} 4^n + 1}{5.4^n b^n}, i \neq j \end{cases}.$$

**Bukti**: Pembuktian Teorema 2.4 telah dibuktikan di halaman 51-105 pada laporan Tugas Akhir [9].

Pembuktian menggunakan aturan invers yaitu: $A_5^n A_5^{-n} = A_5^{-n} A_5^n = I$ .

Untuk membuktikan teorema tersebut maka diperlukan $A_5^n$ dengan $n$ bilangan bulat positif yang telah diperoleh pada penelitian [9].

1) Akan ditunjukkan $A_5^n A_5^{-n} = I$ yaitu:

$$A_5^n A_5^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n \end{bmatrix}$$

$$A_5^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} \end{bmatrix}$$

Dari perkalian matriks tersebut diperoleh:

$$A_5^n A_5^{-n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

2) Akan ditunjukkan $A_5^{-n}A_5^n = I$ yaitu:

$$A_5^{-n}A_5^n = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5.4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5.4^n b^n} \end{bmatrix}$$

$$A_5^n = \begin{bmatrix} \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n \end{bmatrix}$$

Dari perkalian matriks tersebut diperoleh:

$$A_5^{-n}A_5^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Dari hasil perkalian entri-entri matriks $A_5^n A_5^{-n} = A_5^{-n}A_5^n = I$ berdasarkan definisi aturan invers, dapat dibuktikan bahwa Teorema 2.4 benar.

Setelah mendapatkan bentuk umum dari perpangkatan matriks simetris bentuk khusus $5\times 5$ berpangkat bilangan bulat negatif dan telah terbukti pada Teorema 2.4, maka dapat diperoleh *trace* matriks simetris berpangkat bilangan bulat negatif pada Teorema 2.5 berikut:

**Teorema 2.5** [9] Diberikan matriks $A_5^{-n} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} \\ \frac{1}{4b} & -\frac{3}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & -\frac{3}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & -\frac{3}{4b} & \frac{1}{4b} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & -\frac{3}{4b} \end{bmatrix}$,

$\forall b \in R, b \neq 0$, maka $tr\left(A_5^{-n}\right) = \dfrac{(-1)^n 4^{n+1} + 1}{4^n b^n}$ dengan $n$ bilangan bulat positif.

**Bukti:** Pembuktian Teorema 2.5 telah dibuktikan pada laporan Tugas Akhir pada halaman 106 [9].

# BAB III
# METODE PENELITIAN

Metodologi penelitian adalah urutan langkah-langkah penting yang dilakukan dalam menyelesaikan tugas akhir ini untuk memperoleh bentuk umum *trace* matriks simetris bentuk khusus $A_n^{-m}$ dengan $6 \leq n \leq 8$ dan $1 \leq m \leq 10$. Berikut langkah-langkah yang digunakan dalam mencari bentuk umum *trace* matriks yaitu:

1. Diberikan matriks simetris bentuk khusus pada Persamaan (1.1).
2. Bentuk umum $A_3^{-m}$, $A_4^{-m}$ dan $A_5^{-m}$ telah diperoleh dari penelitian sebelumnya yaitu [7], [8] dan [9].
3. Menentukan $A_n^{-m}$ dengan $6 \leq n \leq 8$ dan $1 \leq m \leq 10$.
4. Pendugaan untuk $A_n^{-m}$.
5. Membuktikan dengan aturan invers $A_n^m A_n^{-m} = A_n^{-m} A_n^m = I$ dengan $A_n^m$ telah diperoleh pada Tugas Akhir Rapika Duri Nasution [11].
6. Mengaplikasikan bentuk umum $tr(A_n)^{-m}$ dalam contoh soal.

# BAB V
# PENUTUP

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang terdapat pada Bab IV mengenai *trace* matriks simetris bentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat negatif, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Diberikan matriks bentuk khusus pada Persamaan (1.1). Sehingga diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks simetris $n \times n$ berpangkat bilangan bulat negatif, yaitu:

$$A_n^{-m} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^m (n-1)^{m+1}+1}{n(n-1)^m b^m} & \frac{(-1)^{m+1}(n-1)^m+1}{n(n-1)^m b^m} & \frac{(-1)^{m+1}(n-1)^m+1}{n(n-1)^m b^m} & \cdots & \frac{(-1)^{m+1}(n-1)^m+1}{n(n-1)^m b^m} \\ \frac{(-1)^{m+1}(n-1)^m+1}{n(n-1)^m b^m} & \frac{(-1)^m (n-1)^{m+1}+1}{n(n-1)^m b^m} & \frac{(-1)^{m+1}(n-1)^m+1}{n(n-1)^m b^m} & \cdots & \frac{(-1)^{m+1}(n-1)^m+1}{n(n-1)^m b^m} \\ \frac{(-1)^{m+1}(n-1)^m+1}{n(n-1)^m b^m} & \frac{(-1)^{m+1}(n-1)^m+1}{n(n-1)^m b^m} & \frac{(-1)^m (n-1)^{m+1}+1}{n(n-1)^m b^m} & \cdots & \frac{(-1)^{m+1}(n-1)^m+1}{n(n-1)^m b^m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(-1)^{m+1}(n-1)^m+1}{n(n-1)^m b^m} & \frac{(-1)^{m+1}(n-1)^m+1}{n(n-1)^m b^m} & \frac{(-1)^{m+1}(n-1)^m+1}{n(n-1)^m b^m} & \cdots & \frac{(-1)^m (n-1)^{m+1}+1}{n(n-1)^m b^m} \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis $A_n^{-m} = [g_{i,j}]$ dengan

$$g_{i,j} = \begin{cases} \frac{(-1)^m (n-1)^{m+1}+1}{n(n-1)^m b^m}, i = j \\ \frac{(-1)^{m+1}(n-1)^m+1}{n(n-1)^m b^m}, i \neq j \end{cases}, \; m \text{ bilangan bulat positif}$$

2. Bentuk umum *trace* matriks simetris bentuk khusus pada Persamaan (1.1) yaitu sebagai berikut:

$$tr(A_n)^{-m} = \frac{(-1)^m (n-1)^{m+1}+1}{(n-1)^m b^m}.$$

## 5.2 Saran

Pembahasan pada Tugas Akhir ini yaitu tentang *trace* matriks simetris bentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat negatif. Pembaca dapat menjadikan Tugas Akhir ini sebagai referensi untuk mengembangkan topik yang berkaitan dengan bentuk matriks yang lainnya sehingga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

# DAFTAR PUSTAKA


[1] J. Pahade dan M. Jha, "Trace of Positive Integer Power of Real 2x2 Matrices," *Advances in Linear Algebra and Matrix Theory*, vol. 05, no. 04, hal. 150–155, 2015.

[2] F. Aryani dan M. Solihin, "Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 3, no. 2, 2017.

[3] F. Aryani dan Yulianis, "Trace Matriks Berbentuk Khusus 2x2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 4, no. 2, 2018.

[4] Rahmawati, Wartono, dan M. Jelita, "Trace of Integer Power of Real 3x3 Specific Matrices," *International Journal of Advances in Scientific Research and Engineering*, vol. 5, no. 3, hal. 48–56, 2019.

[5] F. Aryani, M. Zawarni, K. Susilowati, Y. Muda, C. C. Marzuki, dan Rahmawati, "Trace Matriks Segitiga 4x4 Berpangkat Bilangan Bulat," *Seminar Nasional TeknologiInformasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 12*, 2020.

[6] C. C. Marzuki, F. Aryani, dan Rahmawati, "Trace Matriks nxn Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 7, no. 1, hal. 28–37, Jan 2021.

[7] F. Aryani, F. B. Cenia, Y. Muda, dan Zukrianto "Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus Orde 3 Berpangkat Bilangan Bulat," *Seminar Nasional TeknologiInformasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 13*, 2021.

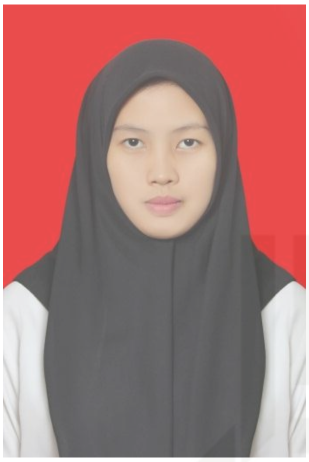
[8] F. Aryani, Hartina, Y. Muda, dan Zukrianto "Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus 4x4 Berpangkat Bilangan Bulat," *Seminar Nasional TeknologiInformasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 13*, 2021.

[9] F. Aryani, S. Putri Alfianov, C.C. Marzuki, dan A. N. Rahma "Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus 5x5 Berpangkat Bilangan Bulat," *Seminar Nasional TeknologiInformasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 13*, 2021.

[10] H. Anton dan C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer*, 8 ed. Jakarta: Erlangga, 2004.

[11] R. Nasution, "Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus nxn Berpangkat Bilangan Bulat Positif," 2022.

# DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan pada tanggal 07 Oktober 1998 di Sungai Piyai, sebagai anak pertama dari enam bersaudara dari pasangan Abdul Rahim dan Kartini. Penulis menyelesaikan pendidikan formal di Sekolah Dasar Negeri 034 Sungai Piyai dan melanjutkan Sekolah Tingat Pertama (SMP) di SMPN 1 Batang Tuaka. Penulis menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas (SMA) di SMAN 1 Batang Tuaka pada tahun 2017 dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA). Pada tahun 2017 Penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika.

Pada tahun 2020, tepatnya pada semester VI Penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Dinas Kependudukan dan Pencatatan Sipil dengan judul **"Peramalan Jumlah Pembuatan Kartu Keluarga (KK) Menggunakan Metode *Single Exponential Smoothing*"** yang dibimbing oleh Ibu Rahmadeni, M.Si. dari tanggal 13 Januari sampai 13 Februari 2020 dan diseminarkan pada Juni 2020. Selanjutnya pada tahun yang sama penulis juga mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN).