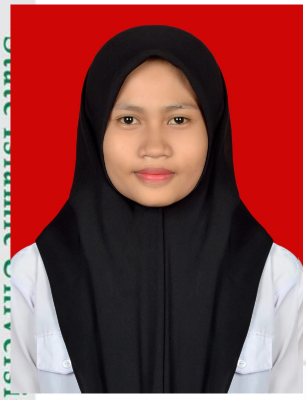
TRACE MATRIKS HANKEL KE-*n* BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh :

REZA AMELIA
11850422431



UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2022

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS HANKEL KE−n BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

oleh :

REZA AMELIA
11850422431

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir di Pekanbaru, pada tanggal 13 Juli 2022

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIP. 19770913 200604 2 002

ii

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS HANKEL KE-n BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

oleh :

REZA AMELIA
11850422431

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 13 Juli 2022

Pekanbaru, 13 Juli 2022
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Sri Basriati, M.Sc.**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota I	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si.**
Anggota II	**: Rahmawati, M.Sc.**

Lampiran Surat :
Nomor : Nomor 25/2021
Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini :

Nama : Reza Amelia

NIM : 11850422431

Tempat/ Tgl. Lahir : Pekanbaru / 11 April 2000

Fakultas/Pascasarjana : Sains dan Teknologi

Prodi : Matematika

~~Judul Disertasi~~/~~Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~*:

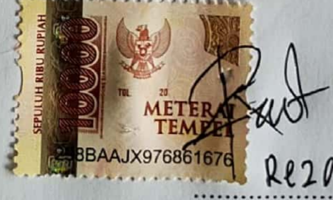
TRACE MATRIKS HANKEL KE-n BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan ~~Disertai~~/~~Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~* dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu ~~Disertasi~~/~~Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~* saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan ~~Disertasi~~/~~Thesis~~/Skripsi/(~~Karya Ilmiah lainnya~~)* saya tersebut, maka saya besedia menerima sanksi sesuai peraturan peraturan perundang-undangan.

Demikian Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 28 Juli 2022
Yang membuat pernyataan



Reza Amelia

NIM : 11850422431

*** pilih salah salah satu sesuai jenis karya tulis**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 13 Juli 2022
Yang membuat pernyataan,

REZA AMELIA
11850422431

LEMBAR PERSEMBAHAN

Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. (QS Al-Insyira: 5-6)

Alhamdulillah. Alhamdulillah. Alhamdulillahirabbil'alamiin.

Pertama –tama saya panjatkan puji dan syukur saya kepada Allah SWT yang telah melimpahkan segala rahmatnya dan hidayahnya kepada penulis, tidak lupa pula saya panjatkan puji dan syukur kepada Nabi Muhammad SAW yang memberikan suri tauladannya kepada penulis sehingga saya bisa menyelesaikan tugas akhir saya dengan baik. Karya ini saya persembahkan untuk :

Kedua orang tua saya yang tercinta yakni ayahanda (Rahmad) dan ibunda (Rosliana Lubis), serta abang dan adek saya yang selalu memberikan saya semangat dan mendoakan saya dalam segala hal untuk bisa lancar dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Kepada ibuk Fitri Aryani, M.Sc selaku pembimbing saya yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan untuk menyelesaikan tugas akhir ini.

Kepada teman-teman seperjuangan saya yang memberi saya motivasi dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Terimakasih untuk seluruh Dosen Fakultas Sains Dan Teknologi UIN SUSKA RIAU terkhusus Jurusan Matematika.

TRACE MATRIKS HANKEL KE-n BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

REZA AMELIA
11850422431

Tanggal Sidang : 13 Juli 2022
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks Hankel ke-n bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif. Untuk mendapatkan bentuk umum tersebut, terlebih dahulu melakukan perpangkatan dari $(A_n)^2$ sampai $(A_n)^7$ dan dapat diduga dua bentuk umum perpangkatan yaitu $(A_n)^m$ untuk m ganjil dan m genap, kemudian dibuktikan dengan induksi matematika. Selanjutnya, diperoleh bentuk umum *trace* matriks Hankel ke-n bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif dengan menggunakan definisi *trace* matriks. Diberikan contoh pengaplikasian dari $tr(A_n)^m$.

Kata Kunci : matriks Hankel, pembuktian langsung, *trace* matriks.

TRACE MATRIX nth HANKEL SPECIAL FORM TO THE POWER OF POSITIVE INTEGERS

REZA AMELIA
11850422431

Date of Final Exam : July 13, 2022
Date of Graduation :

Dapartment of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No. 155 Pekanbaru-Indonesia

ABSTRACT

This final project aims to obtain the general form of the nth Hankel trace matrix, a special form with the power of positive integers. To get the general form, first do the power from $(A_n)^2$ to $(A_n)^7$ and get two general forms of exponents can be guessed, namely $(A_n)^m$ for m odd and m even, then proved by mathematical induction. Then, we get the general form of the nth hankel tarce matrix of the special form of positive integer power by using the definition of the trace matrix. Given an example of the application of $tr(A_n)^m$.

Keywords: *Hankel matrix, direct proof, trace matrix.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Alhamdulillahirrobbil 'alamin. Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah s.w.t, karena atas rahmat, karunia, nikmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"*Trace* Matriks Hankel ke-*n* Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif"**. Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Shalallahu 'Alahi Wasallam, semoga kita semua mendapat syafaat-nya. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis banyak sekali mendapatkan bimbingan, arahan, dan masukan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih khususnya kepada kedua orang tua tercinta Ayahanda Rahmad dan Ibunda Rosliana yang selalu mendo'akan dan melimpahkan kasih sayang kepada penulis. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, penjelasan serta petunjuk kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.

6. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si. selaku Penguji I yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
7. Ibu Rahmawati, M.Sc. selaku Penguji II yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
8. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
9. Teman-teman seperjuangan Tugas Akhir penulis kelas C angkatan 2018 yang telah memberikan motivasi.
10. Teman-teman seperjuangan di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi khususnya angkatan 2018 yang telah banyak memberikan bantuan, masukan serta dukungan.
11. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal penyusunan tugas akhir hingga selesai, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua. *Aamiin ya Rabbal'alamin.*

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 13 Juli 2022

REZA AMELIA
11850422431

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang didalamnya mempelajari tentang matriks. Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam bentuk baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang. Penulisan susunan tersebut dibatasi oleh kurung siku atau kurung biasa. Terdapat berbagai jenis matriks, diantaranya matriks Hankel, matriks identitas, matriks diagonal, dan matriks simetris. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang matriks Hankel. Matriks Hankel ke-n dengan $n \geq 0$ adalah matriks $(n+1) \times (n+1)$ yang entri (i,j) adalah a_{i+j} dengan $i = 0,1,2,\cdots,n$ dan $j = 0,1,2,\cdots,n$. Sehingga bentuk umum dari matriks Hankel sebagai berikut :

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}_{n+1} \tag{1.1}$$

Menentukan perkalian matriks, transpose matriks, determinan matriks, *trace* matriks dan operasi matriks lainnya adalah operasi yang biasa digunakan pada suatu matriks. Menentukan *trace* dari suatu matriks tidak begitu sulit, tetapi untuk *trace* matriks berpangkat maka diperlukan bentuk matriks berpangkatnya terlebih dahulu. Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujursangkar, *trace* matriks A merupakan penjumlahan setiap elemen pada diagonal utama matriks bujur sangkar dan diberi notasi $tr(A)$.

Pembahasan tentang *trace* matriks berpangkat sudah banyak dikaji oleh para penetili terdahulu. Diantaranya dibahas oleh [1] mengenai *trace* matriks berpangkat dan mendapatkan dua bentuk umum *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat positif, sebagai berikut :

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \ldots [n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}, n \text{ genap}$$

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \ldots [n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}, n \text{ ganjil}$$

Selanjutnya [2] telah mendapatkan bentuk umum dari *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif, yaitu :

$$tr(A^{-n}) = \frac{\sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\ldots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}, n \text{ genap}$$

$$tr(A^{-n}) = \frac{\sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\ldots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}, n \text{ ganjil}$$

Kedua penelitian tersebut menggunakan bentuk umum matriks real sebagai berikut :

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c, d \in R \tag{1.2}$$

Pada tahun 2019, [3] juga melakukan penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat, tetapi pada penelitian ini bentuk umum matriks yang digunakan berbeda dari penelitian [1] dan [2], bentuk umum matriks yang digunakan yaitu matriks toeplitz simetris ordo 3×3 sebagai berikut:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a \in R \tag{1.3}$$

dengan pangkat yang ditentukan adalah pangkat bilangan bulat positif sehingga diperoleh bentuk umum *trace* matriks toeplitz simetris bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif, sebagai berikut:

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & , n\ ganjil \\ 2^{\frac{n}{2}+1} a^n & , n\ genap \end{cases}$$

Penelitian [4] juga masih membahas mengenai *trace* matriks berpangkat, tetapi bentuk umum matriks yang digunakan berbeda dari penelitian [3] pada penelitian ini menggunakan bentuk umum matriks toeplitz kompleks ukuran 3×3 sebagai berikut :

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & a+bi & 0 \\ a+bi & 0 & a+bi \\ 0 & a+bi & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a, b \in R, i = imajiner \tag{1.4}$$

dengan pangkat yang ditentukan adalah pangkat bilangan bulat positif dan memperoleh bentuk umum *trace* matriks toeplitz kompleks 3×3 berpangkat bilangan bulat positif sebagai berikut :

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & ,n\ ganjil \\ 2^{\frac{n}{2}+1}(a+bi)^n & ,n\ genap \end{cases}$$

Pada tahun 2017, [5] juga melakukan penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat, tetapi dalam penelitian ini bentuk umum matriks yang digunakan berbeda dari penelitian [4] dan ukuran matriks yang digunakan diperbesar dari penelitian sebelumnya yaitu $n \times n$, penelitian ini menggunakan bentuk umum dari matriks ketetanggaan $n \times n$ dari graf lengkap sebagai berikut :

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

pangkat yang ditentukan dari penelitian ini yaitu berpangkat bilangan bulat positif sehingga bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ dari graf lengkap berpangkat bilangan bulat positif yaitu :

Jika k genap, maka diperoleh :

$$tr(A^k) = \sum_{r=1}^{n/2} S(k,r)n(n-1)^r(n-2)^{k-2r}$$

Jika k ganjil, maka diperoleh :

$$tr(A^k) = \sum_{r=1}^{n-1/2} S(k,r)n(n-1)^r(n-2)^{k-2r}$$

$S(k,r)$ adalah bilangan yang bergantung pada k dan r yang didefinisikan oleh :

$$S(k,1) = 1, S\left(k,\frac{k}{2}\right) = 1, S\left(k,k-\frac{1}{2}\right) = \frac{k-1}{2}$$

$$S(k,r) = S(k-1,r) + S(k-2,r-1).$$

Penelitian serupa juga dapat dilihat pada [6] yang masih membahas mengenai *trace* matriks berpangkat, tetapi dalam penelitian ini diperoleh pangkat bilangan bulat negatif yang melanjutkan dari penelitian [5] yaitu *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat -2, -3, dan -4 dari graf lengkap sesuai Persamaan (1.5). Penelitian tersebut memperoleh bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat -2, -3, dan -4 dari graf lengkap, sebagai berikut :

$$tr(A_n^{-2}) = \frac{n((n-1)+(n-2)^2)}{(n-1)^2}, n \geq 2$$

$$tr(A_n^{-3}) = \frac{n[-2(n-1)(n-2)-(n-2)^3]}{(n-1)^3}, n \geq 2$$

$$tr(A_n^{-4}) = \frac{n[(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4]}{(n-1)^4}, n \geq 2$$

Pada tahun 2021, [7] melakukan penelitian tentang determinan matriks Hankel bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan ekspansi kofaktor. Berdasarkan hasil penelitian didapatkan bentuk umum determinan matriks Hankel dengan bentuk khusus matriks yang digunakan sebagai berikut :

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan latar belakang di atas tentang *trace* matriks berpangkat, maka penulis tertarik ingin mengkaji mengenai bentuk umum **"*Trace* Matriks Hankel ke-n Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif".**

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah "Bagaimana Bentuk Umum *Trace* Matriks Hankel ke-n Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif ?".

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah agar penelitian pada tugas akhir ini lebih terarah dan tepat dalam penyelesaiannya digunakan matriks Hankel ke-n bentuk khusus sebagai berikut :

$$A_n = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n+1}, \text{ dengan } a \in R \text{ dan } n \geq 3 \qquad (1.6)$$

1.4 Tujuan Masalah

Tujuan penelitian ini adalah untuk memdapatkan bentuk umum *trace* matriks Hankel ke-n bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif.

1.5 Manfaat Penelitian

Berikut adalah manfaat dari penelitian ini :

1. Memberikan pemahaman baru kepada penulis maupun pembaca mengenai *trace* matriks terutama tentang *trace* matriks Hankel ke-n bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif.
2. Memperdalam pengetahuan dibidang matematika murni khususnya tentang *trace* matriks.
3. Diharapkan menjadi sebuah referensi baru untuk dunia pendidikan dalam menentukan nilai *trace* dari sebuah matriks.

1.6 Sistematika Penelitian

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup berbagai permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penelitian.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisikan teori-teori dasar yang digunakan dalam penelitian. Teori-teori tersebut berkaitan dengan pengertian matriks, matriks Hankel, operasi matriks, *trace* matriks, induksi matematika dan *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini berisikan langkah-langkah penulis untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks Hankel ke-n bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi penjelasan bagaimana mendapatkan bentuk umum *trace* matriks Hankel ke-n bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil pembahasan yang telah dilakukan pada Bab IV dan saran dari penulis.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Definisi 2.1 [8] Matriks adalah suatu susunan elemen-elemen yang disusun berbentuk empat persegi panjang yang terdiri dari beberapa baris dan beberapa kolom dan diberi kurung biasa atau dikurung siku.

Suatu elemen a_{ij} dalam sebuah matriks, i menunjukan baris dan j menunjukkan kolom. Suatu matriks yang terdiri dari m baris dan n kolom disebut matriks berukuran $m \times n$ dan dilambangkan dengan notasi $A_{m\times n}$ atau $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. Bentuk umum suatu matriks $A_{m\times n}$ adalah suatu matriks yang terdiri dari m baris dan n kolom sebagai berikut :

$$A_{m\times n} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Beberapa jenis matriks, diantaranya sebagai berikut:

a. Matriks Diagonal

Suatu matriks bujur sangkar yang semua elemen di luar diagonal utama nilainya nol dan paling tidak terdapat satu elemen pada diagonal utama yang tidak nol. Matriks diagonal biasanya dinotasikan dengan D. Bentuk matriks diagonal :

$$D_4 = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{bmatrix}$$

b. Matriks identitas

Matriks kuadrat berukuran $n \times n$ yang elemen-elemen pada diagonal utama bernilai 1 dan pada tempat lain di luar diagonal utama bernilai 0. Matriks identitas ditulis sebagai I_n . Secara umum dapat ditulis

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c. Matriks Simetris

Suatu matriks bujur sangkar A disebut simetris jika $A = A^T$, yaitu jika $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap nilai i dan j. Suatu matriks simetris secara umum dapat ditulis sebagai berikut :

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.2 Matriks Hankel

Definisi 2.2 [9] Matriks Hankel ke-n dengan $n \geq 0$ adalah matriks $(n+1) \times (n+1)$ yang entri (i,j) adalah a_{i+j} dengan $i = 0,1,2,\cdots,n$ dan $j = 0,1,2,\cdots,n$.

Matriks Hankel adalah matriks persegi dimana setiap diagonal miring menaik dari kiri ke kanan adalah konstan. Secara umum, bentuk matriks Hankel $(n+1) \times (n+1)$ sebagai berikut :

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}_{n+1}$$

Dari segi komponen, jika (i,j) elemen dari A dilambangkan dengan a_{ij}, dan diasumsikan $i \leq j$, maka: $a_{i,j} = a_{i+k,j-k}$, untuk semua $k = 0,\dots,j-i$. Matriks Hankel adalah matriks simetris.

Contoh 2.1 :

Diberikan matriks Hankel ordo ke-3 sebagai berikut :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Dapat dilihat bahwa matriks A mempunyai semua elemen disepanjang diagonal a_{i+j} konstan, sesuai dengan Definisi 2.2 maka matriks A disebut matriks Hankel.

2.3 Operasi Matriks

Adapun beberapa cara Operasi Matriks yaitu perkalian dengan skalar, perkalian matriks dengan matriks dan perpangkatan matriks.

2.3.1 Perkalian Matriks dengan Skalar

Definisi 2.3 [10] Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times n$ dan c adalah skalar, maka perkalian skalar dari A dengan c adalah matriks $m \times n$ yang didefinisikan dengan:

$$cA = [ca_{ij}] = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

Dengan kata lain, $cA = [ca_{ij}]$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap entri dari A dengan c.

Contoh 2.2 :

Diketahui matriks A dan skalar c sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } c = 2$$

maka

$$cA = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & 14 & 10 \\ -8 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Perkalian Matriks dengan Matriks

Definisi 2.4 [11] Dua buah matriks dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua. Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times n$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks $n \times p$. Maka, perkalian A dan B, dilambangkan dengan AB, menghasilkan matriks $C = [c_{ij}]$ yang berukuran $m \times p$, yang dalam hal ini :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Contoh 2.3 :

Diketahui matriks A dan matriks B. Tentukan AB!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -5 & 6 & -8 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Karena matriks A berordo 3×3 dan matriks B berordo 3×2, maka hasil kali AB adalah matriks berodo 3×2, yaitu:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -5 & 6 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -10 & 11 \\ 27 & -24 \end{bmatrix}$$

2.3.3 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.5 [12] Misalkan A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AAA \dots A}_{n\ faktor}\ (n > 0)$$

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n\ faktor}$$

Contoh 2.4 :

Diketahui matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, hitunglah pangkat dari A_3^2!

Penyelesaian :

Didapatkan hasil dari A_3^2 sebagai berikut :

$$A_3^2 = A.A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 43 & 27 & 27 \\ 16 & 24 & 19 \\ 28 & 32 & 47 \end{bmatrix}$$

2.4 *Trace* Matriks

Definisi 2.6 [13] Misal A adalah suatu matriks kuadrat, maka *trace* A yang dinotasikan dengan $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah elemen-elemen pada diagonal utama A. *Trace* A tidak terdefinisi jika A bukan matriks kuadrat. Suatu *trace* matriks secara umum dapat ditulis sebagai berikut:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$.

Contoh 2.5 :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan $tr(A)$!

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} tr(A) &= 1 + 3 + 5 + 7 + 3 \\ &= 19 \end{aligned}$$

Teorema 2.1 [13] Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks-matriks kuadrat n dengan k adalah suatu skalar, maka :

a. $tr(A^T) = tr(A)$
b. $tr(kA) = k\,tr(A)$
c. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
d. $tr(AB) = tr(BA)$

Bukti :

a. Akan dibuktikan bahwa $tr(A^T) = tr(A)$

Ambil sembarang matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, maka

$$tr(A^T) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^T\right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

$$= tr(A)$$

b. Akan dibuktikan bahwa $tr(kA) = k\, tr(A)$

Ambil sembarang matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, dan skalar k, maka:

$$tr(kA) = tr\left(k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \dots & ka_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= ka_{11} + ka_{22} + ka_{33} + \cdots + ka_{nn}$$

$$= k(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn})$$

$$= k\, tr(A)$$

c. Akan dibuktikan bahwa $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

Ambil sembarang matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

dan matriks $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$

maka

$$tr(A+B) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}+a_{33}+b_{33}+\cdots+a_{nn}+b_{nn}$$

$$= (a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn})+(b_{11}+b_{22}+b_{33}+\cdots+b_{nn})$$

$$= tr(A)+tr(B)$$

d. Akan dibuktikan bahwa $tr(AB) = tr(BA)$

Ambil sembarang matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ dan

matriks $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$

maka

$$tr(AB) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}+\cdots+a_{1n}b_{n3} & \cdots & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+a_{13}b_{3n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}+\cdots+a_{2n}b_{n3} & \cdots & a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+a_{23}b_{3n}+\cdots+a_{2n}b_{nn} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}+\cdots+a_{3n}b_{n1} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+\cdots+a_{3n}b_{n2} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}+\cdots+a_{3n}b_{n3} & \cdots & a_{31}b_{1n}+a_{32}b_{2n}+a_{33}b_{3n}+\cdots+a_{3n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+a_{n3}b_{31}+\cdots+a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+a_{n3}b_{32}+\cdots+a_{nn}b_{n2} & a_{n1}b_{13}+a_{n2}b_{23}+a_{n3}b_{33}+\cdots+a_{nn}b_{n3} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+a_{n3}b_{3n}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + \cdots + a_{2n}b_{n2}$

$+ a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} + \cdots + a_{3n}b_{n3} + \cdots + a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + a_{n3}b_{3n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}$

$= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} + \cdots + b_{1n}a_{n1} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} + \cdots + b_{2n}a_{n2}$

$+ b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33} + \cdots + b_{3n}a_{n3} + \cdots + b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + b_{n3}a_{3n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}$

$= tr(BA)$

Contoh 2.6 :

Diberikan matriks bujursangkar 5×5 dibawah ini :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 9 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Buktikan :

a. $tr(A^T)$

b. $tr(2A)$

c. $tr(A + B)$

d. $tr(AB)$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan Teorema 2.1 maka :

a. $tr(A^T) = tr(A)$

$= 2 + 1 + 7 + 5 + 6$

$= 21$

b. $tr(2A) = 2tr(A)$

$= 2(21)$

$= 42$

c. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

$= (2 + 1 + 7 + 5 + 6) + (5+2+2+1+4)$

$= 21 + 14$

$= 35$

d. $tr(AB) = tr(BA)$

$= (14.21) = 294$

2.5 Induksi Matematika

Definisi 2.7 [14] Misalkan $p(n)$ adalah suatu proposisi yang akan dibuktikan benar untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika sebagai berikut :

1. Ditunjukkan bahwa $p(1)$ benar.
2. Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar.

Jika langkah-langkah (1) dan (2) berhasil menunjukkan kebenarannya, maka selanjutnya disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n. Langkah (1) diatas sering disebut **basis(dasar) induksi,** dan langkah (2) disebut **langkah induksi.**

Contoh 2.7 :

Dengan induksi matematika, buktikan bahwa :

$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, untuk semua $n \geq 1$.

Bukti :

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan $1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

1. Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, yaitu :

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1(2)(3)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Sehingga $p(1)$ benar.

2. Asumsikan $p(k)$ benar dan memperoleh hipotesis induksi sebagai berikut :

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Hipotesis ini digunakan untuk membuktikan bahwa $p(k+1)$ menyatakan

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + k(k+1) + (k+1)[(k+1)+1] = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}$$

Pembuktian dimulai dari :

$$\begin{aligned} 1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + k(k+1) + (k+1)[(k+1)+1] &= [1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + k(k+1)] + (k+1)[(k+1)+1] \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right) \\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{k+3}{3}\right) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}$$

Berdasarkan langkah 1 dan 2, dapat disimpulkan dengan menggunakan induksi matematika bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

2.6 *Trace* Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pada tahun 2021, [15] membahas mengenai *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat, namun disini lebih menekankan langkah dari *trace* matriks simetris berpangkat bilangan bulat positif. Berikut adalah langkah-langkah penyelesaiannya :

a. Diberikan matriks simetris 5×5 sebagai berikut :

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, b \in R, b \neq 0$$

b. Menduga bentuk matriks A_5^n

Untuk menduga bentuk umum matriks A_5^n, maka dilakukan dengan perpangkatan matriks A_5^2 sampai A_5^{10}. Maka dari hasil matriks A_5^2 sampai A_5^{10} dapat diduga bentuk umum matriks A_5^n sebagai berikut :

$$A_5^n = \begin{bmatrix} \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n \end{bmatrix}$$

atau

$$A_5^n = [a_{ij}] = \begin{cases} \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n, i = j \\ \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n, i \neq j \end{cases}$$

c. Membuktikan bentuk umum matriks A_5^n.

Pada penelitian ini, digunakan metode induksi matematika dalam pembuktian bentuk umum matriks A_5^n. Berikut langkah-langkah dalam pembuktiannya yaitu:

Misal :

$$p(n): A_5{}^n = \begin{bmatrix} \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n \end{bmatrix}$$

1. Akan ditunjukkan $n = 1$, maka $p(1)$ benar, yaitu :

$$p(1): A_5{}^1 = \begin{bmatrix} \frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 \\ \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 \\ \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 \\ \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 \\ \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}b^1 \end{bmatrix}$$

$$A_5{}^1 = \begin{bmatrix} \frac{4-(-1)^2 4}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b \\ \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4-(-1)^2 4}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b \\ \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4-(-1)^2 4}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b \\ \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4-(-1)^2 4}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b \\ \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4+(-1)^2}{5}b & \frac{4-(-1)^2 4}{5}b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}$$

Terbukti $p(1)$ benar.

2. Asumsikan bahwa $p(k)$ benar, yaitu :

$$p(k): A_5^k = \begin{bmatrix} \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan $p(k+1)$ juga benar, yaitu :

$$p(k+1): A_5^{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa :

$$A^{k+1} = A^k A = [a_{ij}]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} \end{bmatrix}$$

Dengan melihat hasil matriks A^{k+1} maka $p(k+1)$ benar. Karena langkah 1 dan 2 telah dibuktikan benar, maka bentuk umum matriks A_5^n terbukti benar.

d. Membuktikan bentuk umum *trace* matriks A_5^n.

Berdasarkan hasil bentuk umum matriks A_5^n, maka dapat diperolah *trace* matriks A_5^n sebagai berikut :

$$tr(A_5^n) = (4^n - (-1)^{n+1}4)b^n$$

Bukti :

$$tr(A_5^n) = \begin{bmatrix} \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n \end{bmatrix}$$

$$tr(A_5^n) = \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n + \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n + \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n + \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n + \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n$$

$$= 5\left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n$$

$$= (4^n - (-1)^{n+1}4)b^n$$

Sehingga diperoleh :

$$tr(A_5^n) = (4^n - (-1)^{n+1}4)b^n$$

BAB III
METODE PENELITIAN

Penulisan tugas akhir ini menggunakan metode studi pustaka dengan mengumpulkan informasi dari buku maupun jurnal yang terkait dengan penelitian ini. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu:

1. Diberikan matriks Hankel pada Persamaan (1.6).
2. Menentukan perpangkatan matriks $(A_n)^2$ sampai $(A_n)^7$.
3. Menduga bentuk umum perpangkatan matriks $(A_n)^m$ dengan m bilangan bulat positif.
4. Membuktikan bentuk umum matriks $(A_n)^m$ dengan m bilangan bulat positif menggunakan induksi matematika.
5. Membuktikan bentuk umum $tr(A_n)^m$ dengan m bilangan bulat positif menggunakan pembuktian langsung.
6. Mengaplikasikan bentuk umum $tr(A_n)^m$ dengan m bilangan bulat positif dalam bentuk contoh soal.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah di paparkan pada Bab IV tentang *trace* matriks Hankel ke-n bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif dengan matriks pada Persamaan (1.6), maka diperoleh :

1. Bentuk umum perpangkatan matriks Hankel ke-n bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif yaitu :

Untuk m bilangan bulat positif ganjil, diperoleh :

$$(A_n)^m = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}\right)a^m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m}\right)a^m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^m & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a^m & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^m & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m}\right)a^m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}\right)a^m \end{bmatrix}_{n+1}$$

atau $(A_n)^m = [a_{i,j}]$ dengan :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}\right)a^m & , untuk\ \ i = j = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m}\right)a^m & , untuk\ \ i = 0, j = n\ atau \\ & \qquad i = n, j = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}\right)a^m & , untuk\ \ i = j = n \\ a^m & , untuk\ i = 1,2,\cdots,n-1\ dan\ j = n-1,\cdots,1 \\ 0 & , untuk\ lainnya \end{cases}$$

Untuk m bilangan bulat positif genap, diperoleh :

$$(A_n)^m = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}\right)a^m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m}\right)a^m \\ 0 & a^m & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^m & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^m & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m}\right)a^m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}\right)a^m \end{bmatrix}_{n+1}$$

atau $(A_n)^m = [a_{i,j}]$ dengan :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}\right)a^m & , untuk\ i = j = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m}\right)a^m & , untuk\ i = 0, j = n\ atau \\ & \quad i = n, j = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}\right)a^m & , untuk\ \ i = j = n \\ a^m & , untuk\ \ i = j = 1,2,3,\cdots, n-1 \\ 0 & , untuk\ \ lainnya \end{cases}$$

2. Bentuk umum *trace* matriks Hankel ke-n bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif yaitu :

$$tr(A_n)^m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m}(\sqrt{5}) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m}(-\sqrt{5})\right)a^m & , untuk\ n\ \ ganjil\ , m\ ganjil \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m}(\sqrt{5}) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m}(-\sqrt{5})\right)a^m + a^m & , untuk\ n\ genap, m\ ganjil \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m}(\sqrt{5}) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m}(-\sqrt{5})\right)a^m + (n-1)a^m & , untuk\ n\ ganjil\ , m\ genap \\ & , untuk\ n\ genap, m\ genap \end{cases}$$

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini penulis membahas mengenai *trace* matriks Hankel ke-n bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif. Disarankan bagi pembaca untuk melanjutkan perpangkatan negatif ataupun mencari bentuk umum *trace* matriks Hankel untuk entri yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

[1] J. Pahade and M. Jha, “Trace of Positive Integer Power of Real,” no. December, pp. 150–155, 2015.

[2] F. Aryani and M. Solihin, “Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif,” *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 3, no. 2, pp. 16–23, 2017.

[3] Rahmawati, N. A. Putri, F. Aryani, and A. N. Rahma, “Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif,” *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, 2019.

[4] F. Aryani, D. R. Sari, C. C. Marzuki, and S. Gemawati, “Trace Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif,” *Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi dan Industri*, 2018.

[5] J. K. Pahade and M. Jha, “Trace of Positive Integer Power of Adjacency Matrix,” *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, no. 6, pp. 2079–2087, 2017.

[6] F. Aryani, A. A. Nugraha, M. Faisal, and C. C. Marzuki, “Trace Matriks Ketetanggaan Berpangkat,” pp. 543–553, 2020.

[7] J. Hal, A. N. Rahma, and Z. Aqilah, “Jurnal Sains Matematika dan Statistika Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo Berpangkat Bilangan Bulat Positif,” vol. 7, no. 1, pp. 96–104, 2021.

[8] A. Andari, *Aljabar Linear Elementer*. Malang: Universitas Brawijaya Press, 2017.

[9] I. J. P. Appl, “Hankel determinants of the generalized factorials,” vol. 49, no. June, pp. 217–225, 2018, doi: 10.1007/s13226-018-0264-9.

[10] M. Marjono, *Aljabar Linear*. Malang: Universitas Brawijaya Press, 2012.

[11] R. Munir, “Buku Teks Ilmu Komputer Matematika Diskrit Edisi Ketiga,” *Penerbit Informatika. Bandung*, 2005.

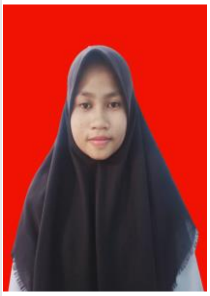
[12] H. Anton and C. Rorres, “Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi,” *Edisi Ketujuh, Erlangga, Jakarta*, 2004.

[13] R. Rifa’i, *Aljabar Matriks Dasar*. Yogyakarta, 2016.

[14] H. Sukirman, “Pengantar Teori Bilangan.” Yogyakarta, 2004.

[15] S. P. Alfianov, “Trace Matriks Simetris 5x5 Berpangkat Bilangan Bulat.” Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, 2021.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis lahir pada tanggal 11 April 2000 di Pekanbaru, Sebagai anak keempat dari enam bersaudara pasangan Bapak Rahmad dan Ibu Rosliana Lubis. Penulis menyelesaikan pendidikan formal pada Sekolah Dasar Negeri 145 Pekanbaru, Provinsi Riau 2012. Pada tahun 2015 penulis menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di SMPN 22 Pekanbaru dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas dengan jurusan Teknik Kimia Industri di SMKN 2 Pekanbaru pada tahun 2018. Pada tahun 2018 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi denagn Program Studi Matematika.

Pada bulan Januari 2021 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di rumah dengan judul penelitian **“Trace Matriks Kompleks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif”** yang dibimbing oleh Bapak M.Marizal, M.Sc dan diseminarkan pada tanggal 02 Juli 2021. Pada bulan Juli-Agustus 2021 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Harjosari, Kecamatan Sukajadi, Kabupaten Pekanbaru. Bulan Juli Tahun 2022 penulis telah menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **“Trace Matriks Hankel Ke-n Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif”** dibawah bimbingan Ibu Fitri Aryani, M.Sc di Fakultas Sains dan Teknologi Program Studi Matematika.