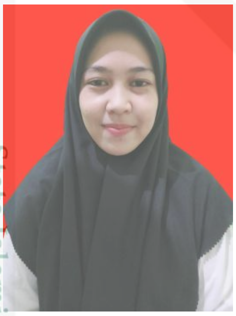
DETERMINAN MATRIKS $RSFPLRcircfr\ (b, b, 0, 0, \dots, 0)$ BENTUK KHUSUS $n \times n, (n \geq 3)$ MENGGUNAKAN EKSPANSI KOFAKTOR

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh :



YOLA SUNDARI
11554202762

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2022

LEMBAR PERSETUJUAN

DETERMINAN MATRIKS $RSFPLRcircfr\ (b, b, 0, 0, \ldots, 0)$ BENTUK KHUSUS $n \times n, (n \geq 3)$ MENGGUNAKAN EKSPANSI KOFAKTOR

TUGAS AKHIR

oleh:

YOLA SUNDARI
11554202762

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 05 Juli 2022

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Ade Novia Rahma, M.Mat.**
NIP. 19730818 200604 1 003	**NIP. 130517048**

LEMBAR PENGESAHAN

DETERMINAN MATRIKS $RSFPLRcircfr\,(b, b, 0, 0, \ldots, 0)$ BENTUK KHUSUS $n \times n, (n \geq 3)$ MENGGUNAKAN EKSPANSI KOFAKTOR

TUGAS AKHIR

oleh:

YOLA SUNDARI
11554202762

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 05 Juli 2022

Pekanbaru, 05 Juli 2022
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua : Nilwan Adiraja, S.Pd,. M.Sc.

Sekretaris : Ade Novia Rahma, M.Mat.

Anggota I : Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.

Anggota II : Rahmawati, S.Si., M.Sc.

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

Lampiran Surat :
Nomor : Nomor 25/2021
Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini :

Nama : YOLA SUNDARI
NIM : 11554202762
Tempat/ Tgl. Lahir : KAMPAR, 4 JANUARI 1997
Fakultas/Pascasarjana : SAINS DAN TEKNOLOGI
Prodi : MATEMATIKA

Judul Disertasi/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya*:
DETERMINAN MATRIKS RSPPLR circfr (b, b, 0, 0, ..., 0) BENTUK KHUSUS $n \times n$, ($n \geq 3$) MENGGUNAKAN EKSPANSI KOFAKTOR

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan Disertai/~~Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah~~ lainnya * dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu Disertasi/~~Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah~~ lainnya , *saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan Disertasi/~~Thesis~~/Skripsi/(~~Karya Ilmiah~~ lainnya)*saya tersebut, maka saya besedia menerima sanksi sesuai peraturan peraturan perundang-undangan.

Demikian Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 26 Juli 2022
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
10000
E2AJX977056768

NIM : 11554202762

* pilih salah salah satu sesuai jenis karya tulis

LEMBAR PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Ku Persembahkan Kepada :

Allah SWT yang telah memberikan nikmat yang luar biasa.

Kedua orang tuaku (Akmal (Alm) dan Sumarni) yang tidak henti-hentinya selalu memberikan kasih saying, motivasi dan cintanya kepadaku, yang selalu memberikan semangat untuk mewujudkan cita-citaku, serta yang telah mendidik dan mengerjakan untuk selalu hidup dengan sabr dan jujur.

Suami (Muhamad Arsyad) yang selalu memberikan semangat disaat aku sedih, putus asa dan ingin menyerah, serta yang selalu memberikan perhatiannya kepadaku.

Buat pembimbing serta dosen-dosen yang telah membimbingku, dan telah banyak memberi banyak ilmu pengetahuan, sehingga dapat merubah diriku menjadi lebih baik dari sebelumnya sehingga aku bisa menjadi seperti saat ini.

Sahabat-sahabat ku tercinta (Dewi, Tika, Bobi, Doni, Rahmat) terima kasih atas support dan do’anya.

Teman-teman seangkatan dan seperjuangan angkatan 2015 khususnya lokal D yang tidak dapat disebut satu persatu terima kasih support, semangan, do’a dan sarannya dalam menyusun skripsi ini, begitu banyak kenangan yang telah kalian berikan kepada saya selama duduk di bangku kuliah.

Terima Kasih…..

DETERMINAN MATRIKS $\boldsymbol{RSFPLRcircfr\ (b, b, 0, 0, \dots, 0)}$ BENTUK KHUSUS $\boldsymbol{n \times n, (n \geq 3)}$ MENGGUNAKAN EKSPANSI KOFAKTOR

YOLA SUNDARI
11554202762

Tanggal Sidang : 05 Juli 2022
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum determinan matriks $RSFPLRcircfr\ (b, b, 0, 0, \dots, 0)$ bentuk khusus $n \times n, n \geq 3$ menggunakan ekspansi kofaktor. Untuk mendapatkan bentuk umum ini, proses dimulai dengan mencari determinan matriks $RSFPLRcircfr\ (b, b, 0, 0, \dots, 0)$ orde 3×3 hingga 12×12 dengan metode ekspansi kofaktor. Berdasarkan perhitungan tersebut diperoleh pola dan mendapatkan bentuk umum determinan yaitu $|A_n| = (2(-1)^n + 1)b^n$ matriks $RSFPLRcircfr\ (b, b, 0, 0, \dots, 0)$. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bentuk umum yang disajikan dalam suatu teorema dan disertai pembuktian. Lebih lanjut implementasi rumus tersebut disajikan dalam bentuk contoh.

Kata Kunci = induksi matematika, matriks *RSFPLRcircfr*, ekspansi kofaktor.

DETERMINANTS OF THE MATRIX $\boldsymbol{RSFPLRcircfr(b, b, 0, 0, \dots, 0)}$ SPACIAL FORM $\boldsymbol{n \times n, (n \geq 3)}$ USING CAFACTOR EXPANSION

YOLA SUNDARI
11554202762

Date of Final Exam : 05 July 2022
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street. No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This study aims to obtain the general form of the determinant matrix $RSFPLRcircfr(b, b, 0,0, \dots, 0)$ special form $n \times n, (n \geq 3)$ using cofactor expansion. To obtain this general form, the process begins by finding the determinant of the $RSFPLRcircfr(b, b, 0,0, \dots, 0)$ of the orde 3×3 to 12×12 using the cofactor expansion method. Based on these calculation, the pattern is obtained and the general form of the determinant matrix $|A_n| = (2(-1)^n + 1)b^n$ $RSFPLRcircfr(b, b, 0,0.., 0)$ is obtained. Based on the results of the study obtained a general form which is presented in a theorem and accompanied by proof. Furthermore, the implementation of the formula is preseted in the form of an example.

***Keywords** = mathematical induction, matrix $RSFPLRcircfr$, cofactor expansion*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikumwarahmatullahiwabarakatuh

Puji syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini tepat pada waktunya dengan judul **"Determinan Matriks $RSFPLRcircfr\ (b, b, 0, 0, \dots, 0)$ Bentuk Khusus $n \times n, (n \geq 3)$ Menggunakan Ekspansi Kofaktor"** Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana. Shalawat beriring salam kepada Nabi Besar Muhammad SAW yang mana sehingga kita dapat merasakan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi seperti sekarang ini. Selanjutnya dalam penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini penulis tidak terlepas dari bantuan berbagaipihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu sudah sepantasnya penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta, Ayahanda Akmal (Alm) dan Ibunda Sumarni. Mereka yang tidak pernah lelah dan tiada henti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi yang membuat penulis mampu untuk terus melangkah serta materi yang tidak mungkin mampu terbalas. Semoga Allah SWT selalu merahmati Ayahanda dan Ibunda, memberikan kebahagiaan dunia dan akhirat, Aamiin. Kemudian penulis juga mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sainsdan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau sekaligus sebagai Pembimbing Akademik.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Ibu Corry Corazon Marzuki, M. Si., selaku Kepala Laboratorium Program

Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau sekaligus sebagai Penguji yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga selesainya tugas akhir ini.

6. Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat selaku Pembimbing Tugas Akhir yang telah memberi bimbingan, pengarahan serta ilmunya.
7. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M. Sc dan Rahmawati, S.Si, M.Sc., selaku Penguji yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga selesainya tugas akhir ini.
8. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, khususnya di Jurusan Matematika yang telah banyak membantu penulis dalam berbagai hal.
9. My Support System, yaitu Sartika Tri Susanty Pribadi, Rahmat Illahi, Boby Fahlezi, Doni Canra, Siska Dara Wulandari, Dewi Sartika, yang turut memberi dukungan dan membantu penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman-teman Jurusan Matematika khususnya angkatan 2015 kelas D yang selalu memberikan semangat kepada penulis. Dan semua pihak yang telah banyak membantu baik secara langsung maupun tidak langsung.

Tugas Akhir ini telah disusun semaksimal mungkin oleh penulis. Namun, tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan dalam penulisan maupun penyajian materi. Oleh karena itu, kritik dan saran dari berbagai pihak masih sangat diharapkan oleh penulis demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.

Wassalamu'alaikumwarahmatullahiwabarakatuh

Pekanbaru, 05 Juli 2022

YOLA SUNDARI
11554202762

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Determinan merupakan salah satu pokok bahasan yang termasuk dalam Aljabar Linear. Determinan dari suatu matriks A biasanya dinyatakan oleh (A) atau $|A|$. Determinan suatu matriks menggunakan beberapa metode diantaranya Metode Ekspansi Kofaktor, aturan Sarrus, aturan Segitiga. Mengenai determinan suatu matriks telah banyak diteliti pada tahun sebelumnya , Pada tahun 2020 terdapat sebuah skripsi yang membahas tentang determinan matriks dengan judul "*Determinan Matriks* $FLDcirc_r$ *Bentuk Khusus* $n \times n, n \geq 3$ *Dengan Menggunakan Ekspansi Kofaktor"* [1].

Dalam perhitungan determinan suatu matriks dapat dilakukan salah satunya dengan cara menggunakan metode ekspansi kofaktor yang mana ekspansi kofaktor merupakan perkalian entri-entri pada baris atau kolom dari A dengan kofaktor-kofaktornya yang bersesuain dan menjumlahkan hasilkali-hasilkali yang diperoleh. Secara umum, strategi yang paling baik untuk menghitung determinan dengan ekspansi sepanjang baris atau kolom yang memiliki bilangan nol yang terbanyak. Pada tahun 2019 terdapat penelian yang membahas determinan suatu matris dengan judul "*Determinan Matriks* $FLScirc_r$ *Bentuk Khusus* $n \times n, n \geq 3$ *Menggunakan Metode Kondensasi Chio*" [2]. Kemudian pada tahun 2017 juga terdapat penelitian sebuah penilitian yang membahas invers suatu matriks dengan judul " *Invers Matriks Positif Menggunakan Metode Adjoin"* [3].

Adapun beberapa jenis matriks, diantaranya matriks $Circulant$. Matriks $Circulant$ merupakan matriks bujur sangkar yang setiap elemen dari baris identik dengan baris sebelumnya, namun secara pengulangan pindah satu posisi ke kanan. Terdapat beberapa jenis matriks sirkulan, diantaranya adalah matriks sirkulan $RSFPLR(RowSkewLast - Plus - LastRight)$, $FLScirc_r$, dan lain sebagainya.

Matriks sirkulan $RSFPLR$ adalah matriks bujur sangkar dengan baris pertama $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ yang dinotasikan dengan $RSFPLRcircfr\ (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, dengan bentuk umum:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 + a_{n-1} & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_3 & -a_4 + a_3 & \cdots & a_1 & a_2 \\ -a_2 & -a_3 + a_2 & \cdots & a_0 + a_{n-1} & a_1 \\ -a_1 & -a_2 + a_1 & \cdots & -a_{n-1} + a_{n-2} & a_0 + a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Pada tahun 2018, Fitri Aryani dan Corry Corazon Marzuki [4] melakukan penelitian tentang matriks Toeplitz dengan judul ”Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor” dengan bentuk khusus sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/a & 1/a & 1/a & 1/a & \cdots & 1/a \\ a & 0 & 1/a & 1/a & 1/a & \cdots & 1/a \\ a & a & 0 & 1/a & 1/a & \cdots & 1/a \\ a & a & a & 0 & 1/a & \cdots & 1/a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1/a \\ a & a & a & a & a & \cdots & 0 \end{bmatrix} dengan\ a \neq 0 \in R$$

Adapun hasil dari penelitian tersebut adalah sebagai berikut:

$$|A_n| = \begin{cases} 0 & jika\ n \equiv 6\ (mod\ 2)\ atau\ n = 6\ (mod\ 5) \\ 1 & jika\ n \equiv 6\ (mod\ 0)\ atau\ n = 6\ (mod\ 1) \\ -1 & jika\ n \equiv 6\ (mod\ 3)\ atau\ n = 6\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Kemudian pada tahun 2020, Nela Afrianti [5] pada penelitiannya membahas “ Determinan Matriks $FLScirc_r$ Bentuk Khusus $n \times n, (n \geq 3)$ menggunakan Ekspansi Kofaktor” dengan bentuk khusus sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a & a & \cdots & a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & a & \cdots & a & a & a & a & a \\ ra & a & a & a & a & \cdots & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & a & a & a & \cdots & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & a & a & a & \cdots & a & a & a & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & ra+a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & ra+a & ra+a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & ra+a & ra+a & ra+a & a & a \end{bmatrix}, \forall a, r \in R \quad (1.2)$$

Dapat ditulis dengan $A_n = FLScirc_r(a, a, a, a, a, \dots, 0)$.

Pada tahun 2020, Rahmawati, dkk [6] melakukan penelitian tentang invers matriks $RSFPLRcircfr(0, b, \ldots, b)$ dengan bentuk umum pada Persamaan (1.1). Penelitian ini membahas mengenai salah satu bentuk khusus matriks sirkulan yaitu matriks $RSFPLRcircfr(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ dengan mengganti $a_0 = 0, a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = b, b \neq 0,\ \ b \in R,$ pada Persamaan (1.1) sehingga menjadi matriks $RSFPLRcircfr(0, b, \ldots, b)$, sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & b & b & \cdots & b & b & b \\ -b & b & b & \cdots & b & b & b \\ -b & 0 & b & \cdots & b & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b & 0 & 0 & 0 & b & b & b \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & b & b \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Adapun hasil dari penelitian tersebut adalah sebagai berikut:

$$A_n^{-1} = [a_{ij}]; \qquad i, j = 1,2, \ldots, n$$

Dengan

$$|A_n| = \begin{cases} b^{-1}, & jika\ i = j\ atau\ (i = n, j = 1) \\ -b^{-1}, & jika (j = i + 1, i = 1,2, \ldots, n-1)\ atau\ (i = n, j = 2) \\ 0, & untuk\ i, j\ lainnya \end{cases}$$

Berdasarkan penelitian diatas penulis tertarik untuk mengkaji Penelitian Rahmawati dkk tentang matriks $RSFPLRcircfr$ berdasarkan Persamaan (1.1) dengan bentuk khusus seperti berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} b & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b & b \\ -b & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}_n \tag{1.4}$$

Dapat ditulis $A_n = RSFPLRcircfr(b, b, 0, 0, \ldots, 0)$.

Sehingga tugas akhir ini diberi judul "Determinan matriks $RSFPLRcircfr$ $(b, b, 0,0, \ldots,0)$ bentuk khusus dengan ekspansi kofaktor".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan suatu masalah yaitu bagaimana menentukan bentuk umum determinan matriks $RSFPLRcircfr(b, b, 0,0, \dots, 0)$ bentuk khusus menggunakan Ekspansi kofaktor.

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah, permasalahan yang diperoleh dari penelitian ini adalah menentukan determinan matriks $RSFPLRcircfr(b, b, 0,0, \dots, 0)$ bentuk khusus sesuai Persamaan (1.4) menggunakan ekspansi kofaktor.

1.4 Tujuan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan maka tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah mendapatkan bentuk umum dari determinan $RSFPLRcircfr(b, b, 0,0, \dots, 0)$ menggunakan ekspansi kofaktor.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penilitian diatas, maka manfaat dari penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi penulis

   Adapun manfaat yang didapat melalui penelitian ini adalah memperdalam pemahaman penulis mengenai matriks dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji suatu permasalahan aljabar linear khususnya dalam hal menyelesaiakan determinan matriks $RSFPLRcircfr(b, b, 0,0 \dots, 0)$.
2. Bagi lembaga Pendidikan

   Sebagai referensi dalam memecahkan masalah yang berkaitan dengan masalah yang dikaji dalam penilitian ini, yaitu menentukan determinan matriks $RSFPLRcircfr(b, b, 0,0, \dots, 0)$.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penelitian tugas akhir ini terdiri dari pokok-pokok permasalahan yang masing-masing akan diuraikan menjadi beberapa bagian sebagai berikut : Adapun sistematika pada saat penulisan Tugas Akhir ini yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisiskan teori-teori pendukung yang berkaitan dengan matriks, determinan matriks $RSFPLRcircfr(b, b, 0,0, \ldots ,0)$ matriks kofaktor.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini berisi tahapan-tahapan yang dilakukan penulis untuk mencari determinan matriks $RSFPLRcircfr(b, b, 0,0, \ldots ,0)$ menggunakan ekspansi kofaktor.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi uraian langkah-langkah untuk memperoleh bentuk umum matriks $RSFPLRcircfr(b, b, 0,0, \ldots ,0)$ bentuk khusus $n \times n, (n \geq 3)$ menggunakan ekspansi kofaktor.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisiskan kesimpulan dan saran dari keseluruhan pembahasan.

BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang berkaitan dengan matriks, determinan matriks $RSFPLRcircfr$ $(b, b, 0,0, \dots ,0)$ dan induksi matematika.

2.1 Pengertian Matriks dan Operasinya

Definisi 2.1 [7] Jika$A$ dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri B dengan entri-entri bersesuaian dengan A dan selisi $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Contoh 2.1: Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} dan\ A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Pernyataan $A + C, B + C$, dan $B - C$ tidak terdefinisi.

Definisi 2.2 [7] Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkanlah matriks i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan jumlahkan hasil yang diperoleh.

Contoh 2.2: Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena matriks A adalah matriks 2×3 dan B adalah matriks 3×4, maka hasil kali AB adalah matriks 2×4. Untuk menentukan, misalkan, entri pada baris 2 dan kolom 3 dari AB, dimisalkan baris 2 dan kolom 3 dari B. Kemudian sebagaimana dijelaskan berikut ini, mengalikan entri-entri yang bersesuaian kemudian menjumlahkan hasil kalinya. Sehingga diperoleh hasilnya sebagai berikut:

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3 [7] Jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasil kali cA adalah matriks yang peroleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan c. Matriks cA disebut dengan kelipatan skalar.

Jika $A = [a_{ij}]$, maka$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$

Contoh 2.3

Misalkan terdapat matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan skalar $c = 2$

Maka:

$$2A = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4 [10] Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasil kali AB adalah matriks berukuran $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut: untuk mencari enri pada baris i dan kolom ke j dan AB, pisahkanlah baris i dari matriks AB dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang sesuai dari baris dan kolom tersebut secara bersamaan kemudian jumlahkan hasil kali yang diporoleh:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

Entri $(AB)_{ij}$ pada baris i dan kolom j dari AB diperoleh melalui:

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_2 + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

Contoh 2.4

Diberikan suatu matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Maka:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.5 [7] Jika A adalah suatu matriks kuadrat, maka didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif dari matriks A adalah:

$$A^0 = 1$$

$$A^n = \underbrace{AAA \ldots A}_{n\ faktor}$$

Jika A dapa dibalik, maka pangkat bilangan bulat negatif dari A adalah:

$$A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n\ faktor}$$

Contoh 2.5

Tentukan matriks A^2 dari matriks berukuran 2×2 berikut ini:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} A^2 &= A.A \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 20 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorema 2.1 [7] Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka:

1. A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$
2. A^n dapat dibalik dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
3. Untuk setiap skalar k yang tak sama dengan nol, maka kA dapat dibalik dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

2.2 Matriks *Circulant*

Definisi 2.6 [8] Matriks *circulant* adalah matriks bujur sangkar berorde yang setiap elemen dari baris identik dengan baris sebelumnya, namun dipindahkan satu posisi kekanan. Matriks *circulant* dari $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ adalah.

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-3} & b_{n-2} \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_0 & \cdots & b_{n-4} & b_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.6 Diberikan matriks $circulant\ B = (0,1,2,2,1)$ dengan $n = 5$, yaitu:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks $circulant$ dapat dibagi menjadi beberapa macam salah satunya adalah matriks $RSFPRLcircfr$, sebagai berikut.

2.3 Matriks $RSFPLRcircfr$

Definisi 2.7 [9] Suatu matriks bujur sangkar dikatakan matriks $RSFPRLcircfr$ jika memenuhi formula pada Persamaan (1.1), yaitu:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 + a_{n-1} & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_3 & -a_4 + a_3 & \cdots & a_1 & a_2 \\ -a_2 & -a_3 + a_2 & \cdots & a_0 + a_{n-1} & a_1 \\ -a_1 & -a_2 + a_1 & \cdots & -a_{n-1} + a_{n-2} & a_0 + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

dan dapat ditulis dengan $A = RSFPRLcircfr(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.

Untuk mendapatkan entri-entri pada baris $i + 1$, entri pertama dimulai dengan mengambil entri terakhir dari baris $ke - i$ yang dikalikan dengan -1. Setelah diporelah entri pertama dari baris $i + 1$, maka entri kedua diperoleh dengan cara menjumlahkan entri pertama dan entri terakhir pada baris $ke - i$, dan kemudian menggeser entri-entri dari baris $ke - i$ (secara siklis) satu posisi ke kanan.

Contoh 2.7 : Diberikan matriks $RSFPRLcircfr$ dengan $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, dan\ a_4 = 5$, yang memenuhi Persamaan (1.1) sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -5 & 6 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -1 & 6 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 & 6 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

2.4 Determinan Matriks

Definisi 2.8 [7] Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut determinan dari A.

Contoh 2.8 Akan ditentukan determinan dari matriks $2x2$ dengan

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$|A_2| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Contoh 2.9 Akan ditentukan determinan dari matriks $3x3$ dengan

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} |A_3| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} \\ &\quad - a_{32}a_{21}a_{12} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \end{aligned}$$

Teorema 2.2 [7] Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka determinan A adalah hasil kali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut, yaitu $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}, \dots, a_{nn}$.

Contoh 2.10 Akan ditentukan determinan dari matriks diagonal $2x2$ dengan

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 2.1 maka $|A_2| = a_{11}a_{22}$.

Contoh 2.11 Akan ditentukan determinan dari matriks segitiga atas $3x3$ dengan

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 2.1 maka $|A_3| = a_{11}a_{22}a_{33}$

Teorema 2.3 [7] Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar. Jika A memiliki suatu baris atau satu kolom bilangan nol, maka $|A| = 0$.

Contoh 2.12 Akan ditentukan determinan dari matriks $2x2$ dengan

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 2.2 maka $|A_2| = 0$.

Contoh 2.13 Akan ditentukan determinan dari matriks 3×3 dengan

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 2.2 maka $|A_3| = 0$

Defenisi 2.9 [7] Suatu matriks persegi A dikatakan singular apabila $\det(A) = 0$, jika $\det(A) \neq 0$ maka dikatakan matriks nonsingular. Matriks nonsingular memiliki invers dan matriks singular tidak memiliki invers.

Definisi 2.10 [7] Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-I dan kolom ke$-j$ dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Berdasarkan penjelasan dari minor dan kofaktor diatas, maka dapat dibentuk rumus determinan menggunakan ekspansi kofaktor dalam teorema berikut.

Teorema 2.4 [7] Determinan dari matriks A berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang diperoleh, dimana setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-i)

BAB III
METODE PENELITIAN

Metode penelitian adalah sebuah langkah-langkah sistematis yang digunakan penulisan dalam menyelesaikan tugas akhir ini, pada bab ini akan dijelaskan mengenai jenis-jenis penelitian dan proses penelitian, selengkapnya dijelaskan pada Subbab 3.1 sampai 3.2.

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang penulis gunakan adalah studi literatur dengan referensi seperti jurnal, buku referensi, internet dan lainnya.

3.2 Prosedur Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Diberikan matriks $RSFPLRcircfr\,(b, b, 0{,}0, \dots, 0)$ dengan bentuk khusus yang dibentuk dari Persamaan (1.4).
2. Menentukan nilai determinan dari matriks $RSFPLRcircfr\,(b, b, 0{,}0, \dots, 0)$ berorde 3×3 sampai 12×12 dengan menggunakan ekspansi kofaktor.
3. Menduga bentuk umum determinan $RSFPLRcircfr\,(b, b, 0{,}0, \dots, 0)$ dengan mengamati polanya.
4. Membuktikan bentuk umum determinan $RSFPLRcircfr\,(b, b, 0{,}0, \dots, 0)$ dengan menggunakan pembuktian langsung.
5. Mengaplikasikan matriks $RSFPLRcircfr\,(b, b, 0{,}0, \dots, 0)$ bentuk khusus ke dalam contoh soal.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dan pembahasan pada bab-bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai yaitu bentuk umum determinan suatu matriks $RSFPLRcircfr$ bentuk khusus yang sesuai dengan persamaan (1.4) adalah sebagai berikut.

$$|A_n| = (2(-1)^n + 1)b^n$$

5.2 Saran

Dalam pembahasan yang telah dikemukakan, penulis hanya membahas tentang lngkah-langkah dan cara dalam menentukan determinan dari suatu matriks $RSFPLRcircfr\ (b, b, 0,0, \dots ,0)$ bentuk khusus. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini dapat melanjukan pembahasan tentang menentukan determinan dari suatu matriks $RSFPLRcircfr$ bentuk khusus lain serta penerapannya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] P. M. Sari, “Determinan Matriks $\mathrm{FLDcirc_r}$ Bentuk Khusus $n \times n, n \geq 4$ Dengan Menggunakan Ekspansi Kofaktor”, 2020.

[2] Rahma. Ade Novia , dkk. ”Determinan Matriks $\mathrm{FLScirc_r}$ Bentuk Khusus $n \times n, n \geq 3$ Menggunakan Metode Kondensasi Chio”. Jurnal Sain Matematika dan Statistik, Vol 5, No 1, Januari 2019

[3] M. E. K. Putra dan F. Aryani, “Invers Matriks Positif Menggunakan Metode Adjoin”. Jurnal Matematika dan Statistik , Vol.3, 2017.

[4] F. Aryani, and C. C. Marzuki, "Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor" Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018.

[5] X. Cui and N. Jiang, “On Nonsingularity of RSFPLR Circulant Matrices,” *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, vol. 33, no. 5, pp. 1–7, 2019, doi: 10.9734/jamcs/2019/v33i530191.

[6] N. Fitri, A. N. Rahma, and O. B. Elementer, “Invers Matriks RSFPLRcircfr (0,b,...,b),” vol. 6, no. 1, pp. 113–121, 2020.

[7] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linier Elementer*, Kedelapan. Jakarta: Erlangga, 2004.

[8] R. M. Gray, *Toeplitz and Circulan Matrices*. 2005.

[9] K. Jiang, Xiaoyu dan Hong, “Exact Determinants Of Some Special Circulant Matrices Involving Four Kinds Of Famous Numbers,” *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, pp. 1–12, 2014.

[10] R. Munir, *Matematika Diskrit*, Ketiga. Bandung: Informatika Bandung, 2007.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Yola Sundari dengan panggilan Yola, lahir di Kampar, tanggal 04 Januari 1997. Sebagai anak ke tiga dari empat bersaudara pasangan Bapak Akmal (Alm) dan Ibu Sumarni. Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar (SD) pada tahun 2009. Lalu melanjutkan Pendidikan Madrasah Tsanawiyah (MTs) lulus pada tahun 2012. Pada tahun 2015 Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMAN 1 Kampar Timur, Kabupaten Kampar, Provinsi Riau dengan Jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA). Setelah menyelesaikan Pendidikan di SMAN 1 Kampar Timur, kemudian Penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Program Studi Matematika.

Dalam masa perkuliahan Penulis telah melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Dinar Peternakan dan Kesehatan Hewan Provinsi Riau dan Penulis juga telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sialang Godang, Kecamatan Pangkalan Kuras, Kabupaten Pelalawan.