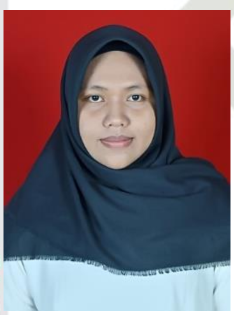
INVERS MATRIKS RSLPFL$_{circfr}$ BENTUK KHUSUS $(\boldsymbol{b}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \boldsymbol{b})$ BERORDO $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ DENGAN $\boldsymbol{n} \geq 3$ MENGGUNAKAN MATRIKS BLOK 2×2

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Program Studi Matematika

Oleh :

<u>RAHEL EDRIAN</u>
11850422162



FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2022

LEMBAR PERSETUJUAN

INVERS MATRIKS RSLPFL$_{circfr}$ BENTUK KHUSUS $(b, 0, \dots, 0, b)$ BERORDO $n \times n$ DENGAN $n \geq 3$ MENGGUNAKAN MATRIKS BLOK 2×2

TUGAS AKHIR

oleh:

RAHEL EDRIAN
11850422162

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 14 Juli 2022

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc	**Ade Novia Rahma, M.Mat**
NIP. 19730818 200604 1 003	**NIK. 130517048**

LEMBAR PENGESAHAN

INVERS MATRIKS RSLPFL$_{circfr}$ BENTUK KHUSUS $(b, 0, \dots, 0, b)$ BERORDO $n \times n$ DENGAN $n \geq 3$ MENGGUNAKAN MATRIKS BLOK 2×2

TUGAS AKHIR

oleh:

RAHEL EDRIAN
11850422162

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 14 Juli 2022

Pekanbaru, 14 Juli 2022
Mengesahkan

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Hartono, M.Pd	**Wartono, M.Sc**
NIP. 1964031 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI :

Ketua	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si**
Sekretaris	**: Ade Novia Rahma, M.Mat**
Anggota I	**: Fitri Aryani, M.Sc**
Anggota II	**: Rahmawati, M.Sc**

Lampiran Surat :
Nomor : Nomor 25/2021
Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini :

Nama : RAHEL EDRIAN
NIM : 11850422162
Tempat/ Tgl. Lahir : TEMBILAHAN, 10 JULI 2000
Fakultas/Pascasarjana : SAINS DAN TEKNOLOGI
Prodi : MATEMATIKA

Judul Disertasi/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya*:
INVERS MATRIKS RSLPFL circfr BENTUK KHUSUS (b,0,...,0,b) BERORDO nxn DENGAN n≥3 MENGGUNAKAN MATRIKS BLOK 2x2

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan Disertai/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya* dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu Disertasi/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya* saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan Disertasi/Thesis/Skripsi/(Karya Ilmiah lainnya)* saya tersebut, maka saya besedia menerima sanksi sesuai peraturan peraturan perundang-undangan.

Demikian Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 25 Juli 2022
Yang membuat pernyataan

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 9EED1AJX974700618

RAHEL EDRIAN
NIM : 11850422162

** pilih salah satu sesuai jenis karya tulis*

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan dengan mengikuti kaidah pengutipan yang berlaku.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan oleh saya maupun orang lain untuk keperluan lain, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak memuat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali disebutkan dalam referensi dan didalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 14 Juli 2022

Yang membuat pernyataan,

RAHEL EDRIAN

11850422162

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamiin.

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan nikmat-Nya. Semoga kita semua selalu dalam lindungan Allah SWT.

Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW dengan mengucapkan "Allahhummaa sholli'alaa syaidinaa muhammad wa'alaa aalii syaidinaa muhammad".

Tiada tempat yang pantas mengadu kecuali pada-Mu, Tiada tempat yang layak untuk meminta kecuali pada-Mu, Kini ku bersyukur ya Allah atas kemudahan dalam menyelesaikan pendidikan yang engkau berikan padaku. Untuk Rasulullah Shallallahu „alaihi wasallam terima kasih untuk ajaran kebaikan dan tauladanmu

Karya kecil ini dipersembahkan untuk:

Mama Papa orang tua tercinta dan adik-adik ku yang selalu memberikan kasih sayang tiada henti, semoga karya kecil tersebut dapat membawa kebahagiaan serta membuat mama papa dan adik-adik banngga.

INVERS MATRIKS RSLPFL$_{\boldsymbol{circfr}}$ BENTUK KHUSUS $(\boldsymbol{b}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \boldsymbol{b})$ BERORDO $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ DENGAN $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}$ MENGGUNAKAN MATRIKS BLOK $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$

RAHEL EDRIAN
11850422162

Tanggal Sidang : 14 Juli 2022
Periode Wisuda :

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers dari matriks RSLPFL$_{circfr}$ bentuk khusus $(b, 0, \dots, 0, b)$ berordo $n \times n$ dengan $n \geq 3$ menggunakan matriks blok 2×2. Dalam menentukan invers matriks RSLPFL$_{circfr}$ berbentuk khusus, terdapat tiga langkah yang dikerjakan. Pertama memblok atau mempartisi matriks RSLPFL$_{circfr}$ dari ordo 3×3 sampai 8×8 dengan dua alternative cara blok. Kedua, menentukan invers submatriks yang *invertible* dengan menerapkan komplemen *Schur* lalu menentukan invers matriks RSLPFL$_{circfr}$ dengan menerapkan kembali komplemen *Schur*. Ketiga, menentukan bentuk umum invers submatriks yang *invertible* dan bentuk umum matriks RSLPFL$_{circfr}$ dan membuktikan dengan aturan invers lalu menerapkan pada contoh soal sesuai dengan Teorema (4.1), Teorema (4.2), dan Teorema (4.3).

Kata kunci: blok 2×2, invers matriks, komplemen *Schur*, matriks RSLPFL$_{circfr}$.

INVERSE OF SPECIAL FORMS $(\boldsymbol{b}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \boldsymbol{b})$ RSLPFL$_{\boldsymbol{circfr}}$ MATRIX OF ORDER $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3})$ USING $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ BLOK MATRIX

RAHEL EDRIAN
11850422162

Date of Final Exam : 14th of July 2022
Date of Graduation :

Mathematics Department
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This study aims to determine the inverse of a special form RSLPFL$_{circfr}$ matrix $(b, 0, \dots, 0, b)$ of order $n \times n$ with $n \geq 3$using 2×2 block matrix. In determining the inverse of a special shaped RSLPFL$_{circfr}$ *matrix, there are three steps that are carried out. First, block or partition the RSLPFLcircfr matrix from the order 3×3 to 8×8 with two alternative block methods. Second, determine the inverse of an invertible submatrix by applying Schur's complement and then determine the inverse of the RSLPFLcircfr matrix by re-applying Schur's complement. Third, determine the general form of an invertible submatrix inverse and the general form of the* RSLPFL$_{circfr}$ *matrix and prove it with the inverse rule and then apply it to the example problems according to Theorem (4.1), Theorem (4.2), and Theorem (4.3).*

Keywords: *block 2×2, inverse of matrix,* RSLPFL$_{circfr}$ *matrix, Schur's complement.*

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum warahmatullahi wa barakatuh.

Alhamdulillahi Rabbil 'Alamin, puji syukur penulis panjatkan kepada Rabb, Dzat yang Maha Mulia yakni Allah *Subhanallahu wa Ta'ala*, yang selalu senantiasa memberikan rahmat yang tiada tara dan karunia-Nya yang tiada terhingga kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **"Invers Matriks RSLPFL$_{circfr}$ Bentuk Khusus (b,0,…,0,b) Berordo $n \times n$ dengan $n \geq 3$ Menggunakan Matriks Blok 2×2".** Shalawat dan salam semoga tetap tercurah kepada Nabi Muhammad *Shallallahu 'Alaihi Wasallam*, keluarga serta para Sahabat beliau, juga kepada orang-orang yang mengikuti sunnah mereka dengan baik hingga hari kiamat kelak. Tugas Akhir ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan dalam menyelesaikan Studi Strata 1 (S1) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Banyak sekali pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini, baik secara moril maupun materil. Untuk itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau yang telah memberikan izin kepada penulis untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Nilwan Adiraja, M.Si selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

5. Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat selaku Pembimbing Akademik dan Dosen Pembimbing Tugas Akhir yang senantiasa telah sabar dan ikhlas dalam meluangkan waktu, tenaga dan pikiran untuk membimbing serta memotivasi penulis dalam melaksanakan hingga menyelesaikan Tugas Akhir ini.
6. Bapak/Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu yang telah memberikan ilmu dan motivasi dalam pelaksanaan Tugas Akhir tersebut.
7. Orang tua tercinta ibunda Evarianti, A.Md dan ayahanda Edwin, SE penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga atas do’a dan dukungan yang selalu dicurahkan, perhatian dan kasih sayang yang tulus, serta memberikan semangat dan dorongan kepada penulis. Sehingga, berkat do’a dan dukungan tulus yang tiada henti penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.
8. Adinda Muhammad Irfan Edrian dan Aisya Edrian adik-adik penulis yang selalu menghibur dan memberi dukungan serta kasih sayang kepada penulis yang seringkali menjadi semangat bagi penulis untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
9. Kakanda dan ayunda senior yang telah membantu penulis dalam menjawab kebingungan ditengah menyelesaikan Tugas Akhir ini, penulis mengucapkan banyak terimakasih atas bantuan tulus yang diberikan kepada penulis.
10. Sahabat dan orang-orang terdekat penulis terima kasih penulis ucapkan untuk do’a, dukungan, dan semangat yang selalu diberikan serta teman-teman Tugas Akhir seperbimbingan yang telah bersama saling memberikan semangat, dan dorongan selama menyelesaikan Tugas Akhir.
11. Teman-teman seperjuangan Matematika Angkatan 2018, penulis mengucapkan terima kasih banyak atas kerjasama dan kebersamaan selama diperkuliahan tersebut.

Penulis memohon kepada Allah *Subhanahu wa Ta’ala* agar usaha ini dijadikan amal shalih sehingga berbuah pahala. Penulis menyadari dalam penulisan Tugas Akhir ini masih banyak terdapat kekurangan serta kesalahan, untuk itu penulis mengharapkan adanya masukan berupa kritik maupun saran dari berbagai pihak untuk kesempurnaan Tugas Akhir ini serta penulis berharap semoga laporan Tugas Akhir ini dapat berguna dan bermanfaat bagi siapa saja yang membacanya.

Wassalamu'alaikum wa rahmatullahi wa barakatuh.

Pekanbaru, 14 Juli 2022

Rahel Edrian
11850422162

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matriks memiliki beberapa jenis dan salah satunya yaitu matriks sirkulan yang merupakan suatu matriks dimana entri-entrinya identik dan diperoleh dengan menginput entri-entri pada baris pertama dan menggeser satu posisi untuk entri-entri pada baris selanjutnya. Beberapa matriks yang termasuk jenis matriks sirkulan antara lain yaitu matriks FLD$_{circr}$, matriks FLS$_{circr}$, matriks sirkulan RSFPLR, dan matriks sirkulan RSLPFL. Adapun beberapa penelitian terdahulu yang telah membahas mengenai matriks sirkulan diantaranya yaitu penelitian `[1] membahas tentang invers matriks sirkulan simetris atas *skew field* dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$W_{n\times n} = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & \cdots & w_{n-2} & w_{n-1} \\ w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_{n-1} & w_0 \\ w_2 & w_3 & w_4 & \cdots & w_0 & w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{n-2} & w_{n-1} & w_0 & \cdots & w_{n-4} & w_{n-3} \\ w_{n-1} & w_0 & w_1 & \cdots & w_{n-3} & w_{n-2} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

dari penelitian tersebut diperoleh beberapa hasil antara lain yaitu invers dari matriks sirkulan simetris adalah matriks sirkulan simetris juga. Selain itu terdapat penelitian [2] yang membahas persoalan determinan dari matriks sirkulan dengan menggunakan metode kondensasi dogson, dimana kasus matriks sirkulan merupakan suatu matriks khusus dari matriks Toeplitz, dengan bentuk:

$$C_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_{-(n-1)} & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_{-(n-2)} & t_{-(n-1)} & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & \cdots & t_0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

dan hasil penelitian memperoleh empat hasil antara lain yaitu hasil matriks kondensasi Dodgson pada matriks sirkulan berukuran n akan memiliki x entri berbeda sedemikian sehingga $x \leq n$ dan matriks kondendasi Dogson pertama pada matriks sirkulan memenuhi bentuk matriks Toplitz. Selain itu, terdapat pula penelitian [3] yang membahas mengenai matriks sirkulan dengan persoalan invers drazin menggunakan metode matriks kanonik Jordan, dengan matriks sirkulan (4×4) sebagai berikut:

$$C_{4\times4} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Dari penelitian tersebut diperoleh hasil yaitu matriks sirkulan yang berordo 4×4 dengan $\det(C_{4\times4}) = 0$ mempunyai invers yaitu invers Drazin (C^D). Invers Drazin dari matriks sirkulan yang berordo 4×4 yaitu:

$$C^D = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} \\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Beberapa penelitian yang membahas mengenai matriks sirkulan khususnya tentang matriks RSFPLR$_{circfr}$ dan RSLPFL$_{circfr}$ diantaranya penelitian [4] membahas tentang determinan eksak beberapa matriks sirkulan khusus yang melibatkan empat jenis bilangan terkenal yaitu Perrin, Padovan, Tribonacci, dan Lucas, penelitian tersebut memecahkan persoalan determinan dari matriks RSFPLR$_{circfr}$ dan RSLPFL$_{circfr}$ dengan menghasilkan determinan eksplisit yang disajikan dengan menggunakan bilangan-bilangan terkenal tersebut. Selanjutnya penelitian yang juga membahas mengenai matriks RSFPLR$_{circfr}$ dan RSLPFL$_{circfr}$ adalah penelitian [5] yang membahas mengenai invers matriks RSFPLR$_{circfr}$ $(0, b, \dots, b)$ menggunakan operasi baris elementer dimana bentuk umumnya sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & b & b & \cdots & b & b & b \\ -b & b & b & \cdots & b & b & b \\ -b & 0 & b & \cdots & b & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b & 0 & 0 & 0 & b & b & b \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & b & b \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

dari penelitian tersebut diperoleh bentuk umum inversnya yaitu:

$$A_n^{-1} = [a_{ij}]; \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} b^{-1}, & \text{jika } i = j \text{ atau } (i = n, j = 1) \\ -b^{-1}, & \text{jika } (j = i + 1, i = 1, 2, \dots, n-1) \text{atau } (i = n, j = 2) \\ 0, & \text{untuk } i, j \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Penelitian [6] juga merupakan salah satu penelitian yang membahas tentang matriks RSFPLR$_{circfr}$ dan RSLPFL$_{circfr}$ yaitu mengenai determinan matriks sirkulan RSFPLR dengan bilangan Jacobsthal, dimana penelitian tersebut menghitung determinannya menggunakan faktorisasi invers dari polynomial. Selain penelitian-penelitian tersebut terdapat pula penelitian lainnya yang membahas mengenai invers salah satu matriks sirkulan dengan menggunakan matrriks blok yaitu penelitian [7] membahas tentang penggunaan matriks blok 2×2 dalam persoalan invers dan matriks yang dibahas adalah matriks FLD$_{circr}$ berbentuk khusus sebagai berikut:

$$P_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ ra & -ra & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ra & -ra & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } a, r \in \mathbb{R} \qquad (1.6)$$

penelitian tersebut menerapkan matriks blok 2×2 dalam perhitungan invers sehingga diperoleh bentuk umum invers dari matriks FLD$_{circr}$.

Berdasarkan beberapa penelitian yang membahas mengenai matriks sirkulan khususnya matriks RSFPLR$_{circfr}$ dan RSLPFL$_{circfr}$, dan juga beberapa metode yang digunakan dalam perhitungan memperoleh invers suatu matriks, maka penelitian ini membahas invers matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(b, 0, \dots, 0, b)$ menggunakan matriks blok 2×2, dan bentuk umumnya sebagai berikut:

$$R_n = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2b & -b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2b & -b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & -b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2b & -b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

dengan judul penelitian **"Invers Matriks RSLPFL*circfr* Bentuk Khusus $(\boldsymbol{b}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \boldsymbol{b})$ Berordo $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ dengan $\boldsymbol{n} \geq 3$ Menggunakan Matriks Blok 2×2"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan penjabaran dari latar belakang tersebut, penelitian ini akan membahas suatu rumusan masalah yaitu bagaimana bentuk umum invers matriks RSLPFL*circfr* $(b, 0, \dots, 0, b)$ berordo $n \times n$ dengan $n \geq 3$ menggunakan matriks blok 2×2?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini dibahas dengan beberapa batasan masalah agar tujuan penelitian dapat terarah, dimana batasan-batasan masalah tersebut adalah sebagai berikut:

1. Matriks yang dibahas adalah matriks RSLPFL*circfr* yang berbentuk khusus pada Persamaan (1.7) dengan $b \neq 0$.
2. Mengaplikasikan komplemen *schur* pada submatriks yang bersifat *invertible*.
3. Menggunakan Teorema 2.3 (iii), 2.3 (iv), dan 2.4 (i) untuk memperoleh invers matriks RSLPFL*circfr* $(b, 0, \dots, 0, b)$ pada Persamaan (1.7) yang telah dipartisi dengan matriks blok 2×2.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian tersebut bertujuan untuk memperoleh bentuk secara umum invers matriks RSLPFL*circfr* $(b, 0, \dots, 0, b)$ berordo $n \times n$ dengan $n \geq 3$ pada Persamaan (1.7) menggunakan matriks blok 2×2.

1.5 Manfaat penelitian

Beberapa manfaat melalui penelitian tersebut yang dapat diperoleh antara lain sebagai berikut:

1. Bagi penulis penelitian ini bermanfaat untuk memperdalam wawasan mengenai matriks terkhusus matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(b, 0, \dots, 0, b)$ dan dapat megembangkan pengetahuan studi yang telah dikaji dalam penelitian sebelumnya mengenai matriks dan aplikasinya dalam penyelesaian persoalan aljabar linear.
2. Penelitian tersebut dapat menjadi salah satu referensi terhadap pembaca dalam pemecahan suatu masalah yang berhubungan dengan persoalan invers matsiks RSLPFL$_{circfr}$ $(b, 0, \dots, 0, b)$.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan tugas akhir penelitian tersebut memiliki sistematika yang mencakup lima bab, antara lain:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab I ini akan dibahas hal-hal yang mendasari penelitian tersebut antara lain latar belakang yang mencakup peneleitian-penelitian terdahulu yang berkaitan dengan matriks sirkulan, matriks blok, dan invers dimana hal tersebut menjadi rujukan penelitian ini, dilanjutkan dengan penjabaran rumusan dan batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian serta sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab II ini akan dibahas teori-teori yang menjadi landasan dalam penelitian tersebut antara lain matriks dan operasi matriks, matriks RSLPFL$_{circfr}$, matriks blok, komplemen *Schur*, dan invers.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab III ini akan dibahas langkah-langkah yang akan diambil dalam melakukan penelitian tersebut dimana terdapat 8 langkah yang akan digunakan dalam menentukan invers matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(b, 0, \ldots, 0, b)$ dengan menggunakan matriks blok 2×2.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini memberi penjelasan dan penjabaran dalam penyelesaikan tugas akhir untuk menentukan invers matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(b, 0, \ldots, 0, b)$ berbentuk khusus.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan yang telah dilakukan dan saran dari penulis.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada penelitian ini digunakan beberapa teori pendukung sebagai poin dasar yang menjadi landasan penelitian antara lain sebagai berikut:

2.1 Matriks dan Operasi Matriks

Definisi 2.1 [8] Suatu matriks (*matrix*) adalah jajaran bilangan persegi panjang. Bilangan-bilangan dari jajaran tersebut disebut entri matriks. Untuk ordo dari suatu matriks dapat dijabarkan dengan jumlah baris × jumlah kolom pada matriks, jika dimensi atau ordo dari dua matriks sama dan elemen-elemen seletaknya sama maka dapat dikatakan kedua matriks tersebut sama [9]. Biasanya huruf besar menotasikan matriks, dapat ditulis seperti $A, B, C,$ dan sebagainya [10] selanjutnya huruf kecil digunakan untuk menyatakan kuantitas numerik, tiap-tiap enti yang terletak pada suatu baris dan kolom dalam matriks dapat dinyatakan dengan memisalkan suatu matriks A dengan entri pada baris i kolom j maka dapat dinotasikan dengan a_{ij}, sehingga matriks umum $m \times n$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dapat dinotasikan secara singkat, menjadi:

$$[a_{ij}]_{m \times n} \text{ atau } [a_{ij}]$$

Notasi pertama digunakan untuk matriks yang penting diketahui ukurannya sedangkan notasi kedua digunakan jika ukuran matriks tidak terlalu penting diketahui ukurannya.

Dalam matriks terdapat beberapa operasi yang dapat dilakukan untuk memperoleh suatu hasil antara lain:

a. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Hasil jumlah (*sum*) $A + B$ akan didapat dengan menambah atau menjumlahkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B [8], dan operasi tersebut dapat dilakukan jika matriks A dan matriks B memiliki ukuran yang sama.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1:

Tentukan hasil penjumlahan dari matriks tersebut.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & 6 & 2 & -2 \\ 3 & 12 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasil selisih (*difference*) $A - B$ adalah suatu matriks yang didapat dengan menghitung selisih atau mengurangkan entri-entri pada matriks B dari entri-entri yang bersesuaian pada matriks A [8], operasi pengurangan tersebut tidak dapat dilakukan jika ukuran kedua matriks berbeda.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2:

Tentukan selisih dari matriks tersebut.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

b. Kelipatan Skalar

Hasil kelipatan skalar atau perkalian suatu matriks dengan sebarang skalar (*product*) cA dapat diperoleh dengan mengalikan skalar dengan setiap entri pada matriks. Misalkan suatu matriks A dan c adalah skalar sebarang, maka hasilkali adalah sebagai berikut:

Suatu bialangan c akan dikalikan dengan matriks A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

maka,

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.3:

Tentukan hasil perkalian skalar dari matriks berikut dengan suatu bilangan yaitu 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

maka,

$$3A = \begin{bmatrix} 3(2) & 3(1) & 3(0) & 3(3) \\ 3(-1) & 3(0) & 3(2) & 3(4) \\ 3(4) & 3(-2) & 3(7) & 3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 6 & 12 \\ 12 & -6 & 21 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika $A = [a_{ij}]$, maka perkalian cA dapat dinotasikan dengan $c(A) = c(A)_{ij} = ca_{ij}$

c. Perkalian Matriks

Hasil dari perkalian matriks (*product*) dapat diperoleh dengan melakukan perhitungan pencarian entri dalam baris i dan kolom j dari matriks hasilkali. Misalkan matriks A dan matriks B akan dikalikan maka untuk memperoleh hasilkali atau entri-

entri pada baris i dan kolom j pada AB didapat dengan memisahkan baris i terhadap matriks A dan kolom j terhadap matriks B lalu kalikan entri yang bertepatan atau bersesuaian dari baris dan kolom yang telah dipisahkan tersebut selanjutnya setiap hasilnya dijumlahkan maka akan diperoleh entri-entri untuk AB. Kedua matriks dapat dikalikan jika ukuran kolom pada matriks pertama bernilai sama dengan ukuran baris pada matriks kedua misalkan A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka dapat diperoleh AB [8].

Contoh 2.4:

Tentukan hasil perkalian dari matriks tersebut.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 18 & 9 & 19 & 24 \\ 20 & 44 & 36 & 20 \end{bmatrix}$$

Hasilkali tidak terdefinisikan apabila syarat ukuran dimana jumlah atau ukuran kolom pada matriks faktor pertama tidak bernilai sama dengan jumlah baris pada matriks faktor kedua.

2.2 Matriks RSLPFL$_{circfr}$

Suatu matriks yang berukuran $n \times n$ yang hanya memiliki satu entri masukan atau entri input pada baris pertama dan terbentuk dari n vektor, dimana untuk menghasilkan entri pada baris berikutnya yaitu dengan menggeser ke kanan satu posisi entri dari baris sebelumnya dan entri-entri yang terletak pada sepanjang diagonal matriksnya adalah sama disebut dengan matriks *circulant* [11]. Bentuk umum matriks sirkulan adalah sebagai berikut:

$$Z_{n \times n} = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-3} & z_{n-2} & z_{n-1} \\ z_{n-1} & z_0 & z_1 & \cdots & z_{n-4} & z_{n-3} & z_{n-2} \\ z_{n-2} & z_{n-1} & z_0 & \cdots & z_{n-5} & z_{n-4} & z_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_3 & z_4 & z_5 & \cdots & z_0 & z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 & z_4 & \cdots & z_{n-1} & z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_{n-2} & z_{n-1} & z_0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.5:

Berdasarkan bentuk umumnya, berikut adalah contoh matriks *circulant*.

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks *circulant* memiliki beberapa jenis salah satunya adalah matriks *RSLPFL$_{circfr}$*.

Definisi 2.2 [4] *Row Skew Last-Plus-First Left* adalah sebuah matriks bujur sangkar yang dinotasikan dengan matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ dimana untuk mendapatkan setiap pada baris $i+1$, diperoleh dengan mengambil entri pertama pada baris ke-i kemudian dikalikan dengan (-1) untuk kolom ke-n pada baris $i+1$, selanjutnya untuk entri kolom ke-$(n-1)$ diperoleh dengan menjumlahkan entri kolom terakhir dan entri kolom pertama pada baris ke-i, dan untuk entri-entri kolom pada baris $i+1$ selanjutnya diperoleh dengan menggeser satu posisi ke kiri entri-entri pada baris ke-i secara siklis. Matriks *Row Skew Last-Plus-First Left* atau matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ memiliki bentuk umum:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} + a_0 & -a_0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} + a_0 & \cdots & -a_{n-3} \\ a_{n-1} + a_0 & \cdots & -a_{n-3} + a_{n-2} & -a_{n-2} \end{bmatrix}$$

dan jika dijabarkan lebih luas akan berbentuk sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} + a_0 & -a_0 \\ a_2 & \iddots & a_{n-2} & \iddots & -a_0 + a_1 & -a_1 \\ \vdots & a_{n-2} & a_{n-1} + a_0 & \cdots & -a_1 + a_2 & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} + a_0 & -a_0 + a_1 & \cdots & \iddots & -a_{n-3} \\ a_{n-1} + a_0 & -a_0 + a_1 & -a_1 + a_2 & \cdots & -a_{n-3} + a_{n-2} & -a_{n-2} \end{bmatrix}$$

2.3 Matriks Blok

Definisi 2.3 [12] Matriks blok merupakan matriks yang diperoleh dengan membagi matriks benjadi beberapa submatriks yang ukurannya lebih kecil dengan cara memasukkan garis horizontal diantara baris-baris dan vertikal diantara kolom-kolom matriks. Untuk mencari determinan dan invers dapat diaplikasikan matriks blok, yang berguna untuk membuat matriks lebih sederhana atau lebih kecil dari ukuran sebelumnya sehingga mempermudah operasi pada matriks.

Matriks blok yang akan menjadi topik bahasan dari proposal penelitian ini adalah matriks blok 2×2 yaitu suatu matriks berbentuk persegi yang akan dipartisi oleh garis dengan dua baris dan dua kolom submatriks, dengan pejabaran secara umum sebagai berikut :

Misalkan P merupakan suatu matriks $m \times n$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{(m-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(n-k)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dipartisi atau diblok dengan memberi garis vertikal dan horizontal sehingga diperoleh hasil menjadi seperti berikut:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{(m-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ \hline a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(n-k)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

Sehingga diperoleh beberapa submatriks, dengan memisalkan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sehingga P terdiri dari beberapa submatriks:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Contoh 2.6:

Tentukan cara memblok matriks RSLPFL$_{circfr}$ berikut menjadi matriks blok 2×2.

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriks diatas merupakan matriks berordo 3×3 dimana terdapat 2 selang baris dan 2 selang kolom sehingga ada 4 kemungkinan cara memblok atau mempartisi matriks tersebut yaitu:

Cara 1:

$$R = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ \hline 4 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Cara 2:

$$R = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ \hline 4 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Cara 3:

$$R = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Cara 4:

$$R = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ \hline 4 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

2.4 Komplemen *Schur*

Komplemen *schur* didefinisikan dari matriks yang dipartisi menjadi blok-blok, salah satunya adalah persegi dan nonsingular dan itu membuat penggunaan invers dari matriks blok [13]. Suatu metode yang banyak digunakan dalam persoalan matriks yang seringnya mengandung pertidaksamaan pada matriks adalah komplemen *schur*. Dalam persoalan menyangkut matriks, komplemen *schur* umumnya difungsikan pada matriks bujur sangkar yang memiliki ukuran besar atau berukuran $n \times n$ dengan n biasanya lebih besar atau sama dengan tiga dan matriks tersebut sudah dipartisi.

Diberikan matriks:

$$\underset{(j+k)\times(l+m)}{P} = \begin{pmatrix} \underset{j\times l}{A} & \underset{j\times m}{B} \\ \underset{k\times l}{C} & \underset{k\times m}{D} \end{pmatrix}$$

1. Jika A adalah suatu matriks yang bersifat *invertible* maka akan dapat diperoleh komplemen *schur* dari A yaitu $D - CA^{-1}B$
2. Jika B adalah suatu matriks yang bersifat *invertible* maka akan dapat diperoleh komplemen *schur* dari B yaitu $C - DB^{-1}A$
3. Jika C adalah suatu matriks yang bersifat *invertible* maka akan dapat diperoleh komplemen *schur* dari C yaitu $B - AC^{-1}D$
4. Jika D adalah suatu matriks yang bersifat *invertible* maka akan dapat diperoleh komplemen *schur* dari D yaitu $A - BD^{-1}C$

2.5 Invers

Definisi 2.4 [8] Jika suatu matriks berbentuk bujur sangkar misalkan A, dan terdapat suatu matriks B dimana memiliki ukuran yang juga sama dengan matriks A lalu diperoleh $AB = BA = I$, maka A memiliki sifat dapat dibalik (*invertible*) dan B disebut sebagai kebalikan atau invers dari A. Sehingga dapat dijabarkan dengan $B = A^{-1}$, namun jika hasil B tidak dapat ditemukan atau didefinisikan, maka A disebut menjadi matriks *singular*.

Contoh 2.7:

Pembuktian invers dengan menggunakan matriks identitas

$$\text{Misalkan } B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ adalah invers dari } A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } AB = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\text{dan } BA = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

sehingga, invers suatu matriks dapat dibuktikan dengan mengalikan matriks yang dapat dibalik (*invertible*) dengan matriks inversnya atau sebaliknya sehingga benar suatu invers matriks jika hasilkali suatu matriks dan matriks inversnya adalah matriks identitas. Misalkan terdapat suatu matriks berbentuk bujur sangkar A. Jika A mempunyai satu kolom atau satu baris dengan setiap entrinya merupakan bilangan nol, maka diperoleh $\det(A) = 0$. Suatu matriks A memiliki invers yaitu A^{-1} apabila kondisi matriks A bersifat dapat dibalik (*invertible*) dengan $\det(A) \neq 0$. Hasil nilai determinan yang diperoleh dari suatu matriks dapat ditemukan dengan menghitung menggunakan beberapa metode seperti metode komplemen *schur*, metode reduksi baris, dan metode ekspansi laplace/kofaktor [14]. Sedangkan untuk menemukan invers yang diperoleh dari suatu matriks dapat dicari dengan menghitung menggunakan beberapa metode yaitu metode dekomposisi crout, metode eliminasi gauss dan gauss jordan, metode adjoin, dan metode komplemen *schur* [12].

Untuk memperoleh invers suatu matriks dapat diperoleh dengan menggunakan matriks blok yang menerapkan komplemen *schur*, beberapa penelitian mengenai invers suatu matriks menggunakan matriks blok antara lain penelitian [15], dengan beberapa

Definisi 2.5 [15] suatu matriks bujur sangkar non singular P dan inversnya adalah P^{-1} maka dapat diblok atau dipartisi menjadi blok 2×2 sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ dan } P^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

Untuk mengoperasikan perkalian matriks P dengan P^{-1} dan P^{-1} dengan P, maka ukuran dari setiap matriks blok tidak bisa sembarangan. Misalkan $A, B, C,$ dan D mempunyai ukuran berturut-turut $j \times l, j \times m, k \times l,$ dan $k \times m$ dengan $j + k = l + m$. Kemudian untuk ukuran E, F, G dan H harus berturut-turut menjadi $l \times j, l \times k, m \times j,$ dan $m \times k$. Sehingga dapat dikatakan bahwa P^{-1} ada pada partisi transpos dari P.

Untuk tahap ini, dapat ditulis rumus untuk E, F, G dan H pada $A, B, C,$ dan D. Misalkan salah satu dari blok hasil partisi yaitu $A, B, C,$ dan D merupakan matriks bujur sangkar non singular sehingga untuk menghindari invers yang diperumum, diperoleh tiga kemungkinan blok atau partisi yaitu:

1. Blok diagonal bujur sangkar: $j = l$ dan $k = m$.
2. Kuadrat blok diagonal: $j = m$ dan $k = l$.

3. Semua blok bujur sangkar: $j = k = l = m$.

Teorema 2.1 [15] Jika P adalah suatu matriks berbentuk bujur sangkar, maka:

i. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ akan mempunyai invers jika dan hanya jika A dan D mempunyai invers sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.

ii. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ akan mempunyai invers jika dan hanya jika B dan C mempunyai invers sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ C^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.2 [15] Jika P adalah suatu matriks berbentuk bujur sangkar, maka:

i. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$ akan mempunyai invers jika dan hanya jika A dan D mempunyai invers, sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$.

ii. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ akan mempunyai invers jika dan hanya jika A dan D mempunyai invers sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.

Teorema 2.3 [15] Misalkan P adalah suatu matriks berbentuk bujur sangkar:

i. Diasumsikan submatriks A dari matriks P merupakan suatu matriks non singular. Maka matriks P mempunyai invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari submatriks A mempunyai invers dan $(D - CA^{-1}B)$ juga mempunyai invers diperoleh:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}.$$

ii. Diasumsikan submatriks D dari matriks P merupakan suatu matriks non singular. Maka matriks P mempunyai invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari submatriks D mempunyai invers dan $(A - BD^{-1}C)$ juga mempunyai invers diperoleh:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}.$$

iii. Diasumsikan submatriks B dari matriks P merupakan suatu matriks non singular. Maka matriks P mempunyai invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari submatriks B mempunyai invers dan $(C - DB^{-1}A)$ juga mempunyai invers diperoleh:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}.$$

iv. Diasumsikan submatriks C dari matriks P merupakan suatu matriks non singular. Maka matriks P mempunyai invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari submatriks C mempunyai invers dan $(B - AC^{-1}D)$ juga mempunyai invers diperoleh:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1} & C^{-1} + C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & -(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.4 [15] Jika P adalah suatu matriks berbentuk bujur sangkar, maka:

i. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$ akan mempunyai invers jika dan hanya jika B dan C mempunyai invers, sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

ii. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ akan mempunyai invers jika dan hanya jika B dan C mempunyai invers, sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$.

Dengan menerepkan teorema-teorema tersebut akan diperoleh invers matriks dengan menggunakan matriks blok.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian tersebut merupakan suatu penelitian studi literatur yang menggunakan referensi sebagai acuan dari berbagai sumber seperti jurnal, buku dan situs web dari internet. Pada penelitian ini terdapat langkah-langkah penelitian yang diterapkan yaitu :

1. Diberikan suatu matriks RSLPFL$_{circfr}$ $(b,0,\ldots,0,b)$ dari Persamaan (1.7) dengan $b \neq 0$ berordo $n \times n$.
2. Mempartisi atau memblok matriks dari Persamaan (1.7) yang berordo 3×3 hingga berordo 8×8 menggunakan matriks blok 2×2 yang memiliki masing-masing submatriks.
3. Menerapkan komplemen *schur* pada submatriks yang *invertible* dari matirks pada Persamaan (1.7) yang berordo 3×3 hingga 8×8 yang telah dipartisi.
4. Menentukan invers matriks dari Persamaan (1.7) yang berorde 3×3 hingga berordo 8×8 dengan matriks blok 2×2 menggunakan Teorema 2.3 (iii), 2.3 (iv), dan 2.4 (i).
5. Mengamati dan menduga bentuk umum matriks invers dari submatriks yang *invertible* dan bentuk umum matriks invers dari matriks pada Persamaan (1.7) yang berordo 3×3 hingga berordo 8×8.
6. Membuktikan bentuk umum terhadap matriks invers dari submatriks *invertible* yang merupakan bagian dari matriks pada Persamaan (1.7) dengan aturan invers.
7. Membuktikan bentuk umum matriks invers dari matriks pada Persamaan (1.7) dengan pembuktian $RR^{-1} = R^{-1}R = I$.
8. Menerapkan bentuk umum matriks invers dari matriks pada Persamaan (1.7) dengan contoh soal.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penjabaran dari pembahasan pada bab-bab sebelumnya terdapat dua cara mempartisi atau memblok matriks RSLPFL$_{circfr}$ bentuk khusus $(b, 0, \ldots, 0, b)$ berordo $n \times n$ dengan $n \geq 3$ pada Persamaan (1.7) dan diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Bentuk umum invers submatriks B dan C yang *invertible* dari matriks RSLPFL$_{circfr}$ bentuk khusus pada Persamaan (4.7) yaitu

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \cdots & \frac{1}{2^3 b} & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \cdots & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \frac{1}{2^{(n-5)}b} & \cdots & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n-1)} \text{dan } C^{-1} = \left[\frac{1}{2b}\right]$$

2. Bentuk umum invers submatriks C dan B yang *invertible* dari matriks RSLPFL$_{circfr}$ bentuk khusus pada Persamaan (4.8) yaitu

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{(n-1)}b} & \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \cdots & \frac{1}{2^3 b} & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2^{(n-2)}b} & \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \cdots & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{2^{(n-3)}b} & \frac{1}{2^{(n-4)}b} & \frac{1}{2^{(n-5)}b} & \cdots & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2^3 b} & \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2^2 b} & \frac{1}{2b} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n-1)} \text{dan } B^{-1} = \left[\frac{1}{b}\right]$$

3. Bentuk umum invers matriks RSLPFL$_{circfr}$ bentuk khusus $(b, 0, \dots, 0, b)$ berordo $n \times n$ dengan $n \geq 3$ pada Persamaan (1.7) yaitu

$$R_n^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{1}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-4)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} \\
\frac{2}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^2}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2^{(n-1)})b} \\
\frac{2^2}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^2}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^3}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2}{(1+2^{(n-1)})b} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-6)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-5)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2^{(n-1)})b} \\
\frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-5)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} \\
\frac{2^{(n-1)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b}
\end{bmatrix}$$

$$R_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{1}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-4)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} \\ \frac{2}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^2}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2^{(n-1)})b} \\ \frac{2^2}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^2}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^3}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2}{(1+2^{(n-1)})b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-6)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-5)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2^{(n-1)})b} \\ \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-5)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} \\ \frac{2^{(n-1)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-1}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2}{(1+2^{(n-1)})b} & \cdots & \frac{-2^{(n-4)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-3)}}{(1+2^{(n-1)})b} & \frac{-2^{(n-2)}}{(1+2^{(n-1)})b} \end{bmatrix}$$

5.2 Saran

Penajabaran yang dituliskan hanya membahas mengenai langkah-langkah dan cara menentukan invers matriks RSLPFL$_{circfr}$ bentuk khusus $(b, 0, \ldots, 0, b)$ berordo $n \times n$ dengan $n \geq 3$. Bagi pembaca yang tertarik terhadap bahasan topic penelitian tersebut dapat melanjutkan pembahasan dengan menentukan determinan dari matriks tersebut atau menerapkan metode lainnya untuk memperoleh invers terhadap matriks RSLPFL$_{circfr}$ yang mana matriks tersebut termasuk salah satu matriks sirkulan yang berbentuk khusus dan menarik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] A. Azizah, T. Thresye, and N. Huda, "Invers Dari Matriks Sirkulan Simetris Atas Skew Field," *J. Mat. Murni Dan Terap. Epsil.*, vol. 12, no. 1, pp. 31–42, 2018.

[2] M. R. Fahlevi, "Determinan Matriks Sirkulan dengan Metode Kondensasi Dogson," vol. 18, pp. 211–220, 2021.

[3] L. aryani, fitri and andari, "Invers Drazin Dari Matriks Sirkulan - PDF.pdf," vol. 1, no. 1, pp. 13–18, 2015.

[4] X. Jiang and K. Hong, "Exact determinants of some special circulant matrices involving four kinds of famous numbers," *Abstr. Appl. Anal.*, pp. 1–12, 2014.

[5] Rahmawati, N. Fitri, and A. N. Rahma, "Invers Matriks RSFPLRcircfr (0,b,...,b)," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 6, no. 1, pp. 113–121, 2020.

[6] X.-Y. CUI and N. JIANG, "Determinants of the RSFPLR Circulant Matrices with the Jacobsthal Numbers," *DEStech Trans. Comput. Sci. Eng.*, vol. 1, no. cmso, pp. 241–244, 2020.

[7] A. N. Rahma, M. Anggelina, Rahmawati, and Zukrianto, "Invers Matriks Blok 2x2 Dalam Aplikasi Matriks FLDcircr Bentuk Khusus," pp. 334–344, 2019.

[8] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra*, 11th ed. 2013.

[9] E. Rainarli, M. Si, K. E. Dewi, M. Si, and J. T. Informatika, *Aljabar Linear dan Matriks*. 2011.

[10] A. Yulian, S. L. M. Sitio, S. D. Y. Kusuma, and P. Rosyani, *Aljabar Linier dan Matriks*, no. 1. 2019.

[11] D. Mamula and N. Achmad, "Matriks Circulant Kompleks Bentuk Khusus 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat," vol. 17, no. 2, pp. 109–118, 2021.

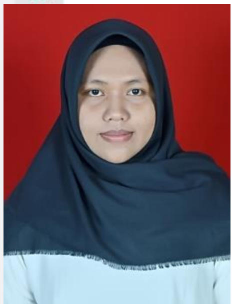
[12] Ilhamsyah, Helmi, and F. Fran, "Determinan dan Invers Matriks Blok 2 x 2," *Bul. Ilm. Math. Stat. dan Ter.*, vol. 06, no. 3, pp. 193–202, 2017.

[13] M. Redivo-Zaglia, "Pseudo-Schur Complements and Their Properties," *Appl. Numer. Math.*, vol. 50, no. 3–4, pp. 511–519, 2004.

[14] W. PURNAMA SARI, N. NOLIZA BAKAR, and Y. YANITA, "Menghitung Determinan Matriks Blok Menggunakan Ekspansi Laplace Dan Komplemen Schur," *J. Mat. UNAND*, vol. 9, no. 2, p. 138, 2020.

[15] T. T. Lu and S. H. Shiou, "Inverses of 2 × 2 block matrices," *Comput. Math. with Appl.*, vol. 43, no. 1–2, pp. 119–129, 2002.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama Rahel Edrian yang merupakan putri pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Edwin, SE dan Evarianti, AMd yang lahir pada 10 Juli 2000 di Tembilahan. Penulis berasal dari Tembilahan, Indragiri Hilir, Riau yang memulai pendidikan di TK Negeri Pembina Tembilahan pada tahun 2005, kemudian dilanjutkan dengan menempuh pendidikan sekolah dasar di SDN 004 Tembilahan Kota pada tahun 2006 dan lulus pada tahun 2012, dilanjutkan dengan menempuh pendidikan menengah pertama di SMPN 1 Tembilahan Hulu dan lulus pada tahun 2015, kemudian penulis melanjutkan pendidikan menengah atas di SMAN 1 Tembilahan Kota dan lulus pada tahun 2018. Pendidikan penulis dilanjutkan dengan menempuh pendidikan sarjana di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi dengan jalur masuk SBMPTN, dan penulis saat ini sedang menyelesaikan tugas akhir dalam memperoleh gelar sarjana sains.