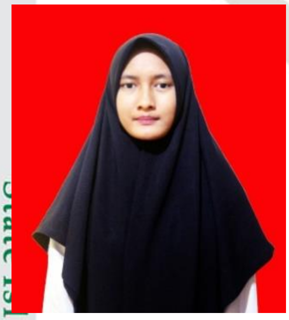
INVERS MATRIKS RSLPFL*circfr* $\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ BENTUK KHUSUS ORDO 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF MENGGUNAKAN ADJOIN

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Program Studi Matematika

Oleh:

VELYN WULANDA
11850425236



UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2022

LEMBAR PERSETUJUAN

INVERS MATRIKS RSLPFL$circfr\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ BENTUK KHUSUS ORDO 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF MENGGUNAKAN ADJOIN

TUGAS AKHIR

Oleh :

VELYN WULANDA
11850425236

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 15 Juli 2022

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Ade Novia Rahma,M.Mat**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIK. 130 517 048

LEMBAR PENGESAHAN

INVERS MATRIKS RSLPFL$circfr\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$ BENTUK KHUSUS ORDO 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF MENGGUNAKAN ADJOIN

TUGAS AKHIR

Oleh :

VELYN WULANDA
11850425236

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 15 Juli 2022

Pekanbaru, 15 Juli 2022
Mengesahkan

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**:Corry Corazon Marzuki,M.Si**
Sekretaris	**: Ade Novia Rahma,M.Mat**
Anggota I	**: Fitri Aryani,M.Sc**
Anggota II	**: Rahmawati,M.Sc**

Lampiran Surat :
Nomor : Nomor 25/2021
Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini :

Nama : VELYN WULANDA

NIM : 11850425236

Tempat/ Tgl. Lahir : PEKANBARU, 12 JANUARI 2000

Fakultas/Pascasarjana : SAINS DAN TEKNOLOGI

Prodi : MATEMATIKA

Judul Disertasi/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya*:

INVERS MATRIKS RSLPFLcircfr (0, t, 0) BENTUK KHUSUS ORDO 3 × 3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF MENGGUNAKAN ADJOIN

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan Disertai/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya* dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu Disertasi/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya* saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan Disertasi/Thesis/Skripsi/(Karya Ilmiah lainnya)* saya tersebut, maka saya besedia menerima sanksi sesuai peraturan peraturan perundang-undangan.

Demikian Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 25 JULI 2022
Yang membuat pernyataan

10000 SEPULUH RIBU RUPIAH METERAI TEMPEL 62E8AJX974700619

VELYN WULANDA
NIM : 11850425236

** pilih salah satu sesuai jenis karya tulis*

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 15 Juli 2022
Yang membuat pernyataan,

VELYN WULANDA
11850425236

LEMBAR PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim

Utama dari segalanya sembah sujud serta syukur kepada ALLAH SWT karena berkat nikmat dan karuniannya penulis dapat menyelesaikan laporan tugas akhir ini.

Teristimewa saya persembahkan sebuah tulisan dari didikan mereka yang saya aplikasikan dengan ketikan hingga menjadi barisan tulisan dengan beribu kesatuan,berjuta makna kehidupan,tidak bermaksud yang lain hanya ucapan terimakasih kepada dua insan manusia yang allah berikan kepada saya untuk menjadi orangtua yang tidak pernah henti mendoakan dan memberikan semangat.Terimakasih kepada mama dan papa yang tidak pernah mengeluh dalam mendidik dan membesarkan velyn.Mama dan papa selalu mengingatkan velyn bahwa pendidikan itu penting,Kata-kata itu akan velyn tanamkan dalam diri velyn.Velyn sangat berterimakasih keoada mama dan papa karena mama dan papa velyn dapat melihat dunia dengan sudut pandang yang berbeda.

Tidak kalah istimewa juga saya persembahkan tulisan dan ucapan terimakasih ini kepada tante saya yang sudah menemani dan mendidik saya sedari kecil hingga sampai saat ini tidak pernah lupa untuk selelu mendoakan yang terbaik untuk saya.

Terimakasih kepada pembimbing tugas akhir sekaligus pembimbing akademik saya ibu Ade Novia Rahma,M.Mat yang selalu sabar dan ikhlas dalam membimbing saya hingga saya dapat menyelesaikan laporan tugas akhir ini,tidak banyak yang bisa saya lakukan untuk membalas kebaikan dan ketulusan hati ibu dalam membimbing saya hanya doa yang bisa saya panjatkan kepada allah swt agar ibu seta keluarga selalu diberikan kesehatan .

Terimakasih kepada dosen-dosen yang ada di jurusan matematika yang juga ikut serta membimbing saya hingga saat ini.

Terimakasih kepada kakak dan adik-adik saya yang juga berperan dalam penyelesaian laporan tugas akhir ini dengan bantuan doa serta hiburan dan candaan yang mereka lakukan untuk penghilang lelah saya selama pengerjaan laopran tugas akhir ini.

Tak lupa juga saya ucapkan terimakasih kepada sahabat-sahabat saya ANAKKALEM(ica,dini,nadia,aufa,janah,tami dan rahel) yang sudah menemani masa-masa kuliah saya di prodi matematika sedikit banyak kalian memberikan warna untuk masa-masa kuliah saya.terimakasih untuk anak kalem yang selalu mensupport saya dan membantu saya dalam penyelesainan laporan tugas akhir ini. Kepada dwi bestie ku terimakasih atas support dan doa baiknya.

Ucapan terimakasih yang terakhir saya berikan kepada teman-teman better-b yang sudah menemani saya dari awal perkuliahan hingga saat ini,walaupun pandemi membuat kita hanya 3 semester saja untuk bertatap muka diruang perkuliahan tapi masa-masa itu tidak akan pernah saya lupakan.

INVERS MATRIKS RSLPFL*circfr* BENTUK KHUSUS ORDO 3 × 3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF MENGGUNAKAN ADJOIN

VELYN WULANDA
11850425236

Tanggal Sidang : 15 Juli 2022
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers dari suatu matriks RSLPFL*circfr*$(0,\frac{1}{b},0)$ ordo 3 × 3 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan adjoin. Dalam menentukan invers matriks RSLPFL*circfr* $(0,\frac{1}{b},0)$ terdapat beberapa langkah yang perlu dilakukan. Langkah pertama yang dilakukan yaitu dengan memperhatikan bentuk pola dari matriks RSLPFL*circfr* $(0,\frac{1}{b},0)$ A_3^{2} sampai A_3^{10} sehingga didapat bentuk umumnya (A_3^{n}). Kedua, dengan memperhatikan bentuk pola determinan matriks RSLPFL*circfr*$(0,\frac{1}{b},0)$ A_3^{2} sampai A_3^{10} sehingga didapat bentuk umumnya. Selanjutnya dibentuk pola matriks kofaktor dari matriks RSLPFL*circfr* $\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ A_3^{2} sampai A_3^{10} sehingga didapat bentuk umum matriks kofaktor dari matriks RSLPFL*circfr*$(0,\frac{1}{b},0)$ bentuk khusus. Terakhir dengan memperhatikan bentuk pola invers matriks RSLPFL*circfr*$(0,\frac{1}{b},0)$ A_3^{2} sampai A_3^{10} sehingga didapat bentuk umum invers matriks RSLPFL*circfr*$(0,\frac{1}{b},0)$ bentuk khusus. Pembuktian dari bentuk umum matriks, determinan, matriks kofaktor dan invers matriks menggunakan metode induksi matematika dan pembuktian langsung. Hasil akhir dalam penelitian ini diperoleh bentuk umum matriks, determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks RSLPFL*circfr* $(0,\frac{1}{b},0)$berpangkat bilangan bulat positif .

Kata Kunci: Determinan, invers matriks, metode adjoin, perpangkatan matriks RSLPFL*circfr*.

THE INVERSE OF RSLPFL*circfr* MATRIX IN SPECIAL FORM OF 3 × 3 ORDER WITH POSITIVE INTEGER EXPONENTS USING ADJOINT

VELYN WULANDA
11850425236

Date of Final Exam : 15 July 2022
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

This research aims to determine the inverse of a $RSLPFLcircfr(0,\frac{1}{b},0)$ *matrix of a special shape of the order 3 × 3 of the rank of exponential number with positive integer exponent using adjoint. In determining the inverse* $RSLPFLcircfr(0,\frac{1}{b},0)$*matrix special shape several steps need to be done. First, consider the shape of the* $RSLPFLcircfr(0,\frac{1}{b},0)$ *matrix pattern of the special forms* $A_3^{\ 2}$ *to* $A_3^{\ 10}$ *so that the general shape is obtained* $(A_3^{\ n})$*. Second, pay attention to the shape of the determinant pattern of* $RSLPFLcircfr(0,\frac{1}{b},0)$ *matrices special forms* $A_3^{\ 2}$ *to* $A_3^{\ 10}$ *so that the general form is obtained. Next, consider the shape df the cofactor matrix pattern from the special form* $RSLPFLcircfr(0,\frac{1}{b},0)$ *matrix* $A_3^{\ 2}$ *to* $A_3^{\ 10}$ *so we get the general form of the cofactor matrix from the special shape* $RSLPFLcircfr(0,\frac{1}{b},0)$ *matrix. Last, pay attention to the shape of the inverse* $RSLPFLcircf\left(0,\frac{1}{b},0\right)r$ *matrix pattern special forms* $A_3^{\ 2}$ *to* $A_3^{\ 10}$ *so that the general form of the* $RSLPFLcircfr(0,\frac{1}{b},0)$ *matrix form is special Proof of the general form of the matrix, determinant, cofactor matrix and inverse matrix using the mathematical induction method and direct proof. The final results in this research obtained the general form of the matrix, determinant, cofactor matrix, and inversof the* $RSLPFLcircfr(0,\frac{1}{b},0)$ *matrix of special shapes positive .*

Keywords: *Adjoint method, determinant, inverse matrix, matrix elevation, RSLPFLcircfr.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Alhamdulillahirabbil'alamiin. Puji syukur kepada Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"Invers Matriks RSLPFL*circfr*$\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Adjoin".** Sholawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, semoga kita semua mendapat syafaatnya. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknoogi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis banyak sekali mendapatkan bimbingan, bantuan, arahan, masukkan dan semangat dari berbagai pihak sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Pada kesempatan ini juga penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
5. Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat., selaku Pembimbing pada tugas akhir dan sekaligus Pembimbing Akademik yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, penjelasan serta petunjuk kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. dan Rahmawati, M.Sc., selaku Penguji yang telah banyak memberikan arahan serta masukkan dalam penulisan tugas akhir ini.

Tugas Akhir ini telah disusun semaksimal mungkin oleh penulis. Namun, tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan dalam penulisan maupun penyajian materi. Oleh karena itu, kritik dan saran dari berbagai pihak masih sangat diharapkan oleh penulis demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru,15 Juli 2022

Velyn Wulanda
11850425236

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matriks banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari, seperti dalam fisika, ekonomi, pertanian, teknik, bidang industri, operasi riset dan lain-lain. Matriks merupakan salah satu cabang aljabar linier yang paling banyak dibahas dalam matematika. Dalam perkembangan ilmu aljabar, dikenal beberapa jenis matriks, yaitu matriks *FLScircr*, matriks *FLDcircr(the first and the last difference -circulant matrix)*, dan matriks *circulant*. Matriks *circulant* merupakan matriks bujur sangkar yang setiap elemen dari baris identik dengan baris sebelumnya, namun dipindahkan satu posisi ke kanan[1]. Sebuah penelitian yang dilakukan oleh [2] membahas matriks *circulant* *RSFPLR*(*Row Skew First Plus Last Right)* dan matriks *circulant RSLPFL (Row Skew Last Plus First Left).* Matriks *circulant RSLPFL* merupakan matriks dengan baris pertamanya $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ yang dinotasikan *RSLPFLcircfr* $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ dengan bentuk umum

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}+a_0 & -a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1}+a_0 & -a_0+a_1 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1}+a_0 & \cdots & -a_{n-6}+a_{n-5} & -a_{n-5}+a_{n-4} & -a_{n-4} \\ a_{n-2} & a_{n-1}+a_0 & -a_0+a_1 & \cdots & -a_{n-5}+a_{n-4} & -a_{n-4}+a_{n-3} & -a_{n-3} \\ a_{n-1}+a_0 & -a_0+a_1 & -a_1 & \cdots & -a_{n-4}+a_{n-3} & -a_{n-3}+a_{n-2} & -a_{n-2} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Dalam pembahasan matriks tidak lepas dari masalah determinan, invers dan masalah yang lainnya. Invers dikenal sebagai kebalikan dari suatu matriks. Banyak metode yang digunakan untuk mencari invers matriks diantaranya matriks adjoin, eliminasi Gauss dan eliminasi Gauss-Jordan.

Pembahasan mengenai invers suatu matriks telah banyak diteliti oleh peneliti sebelumnya. Pada tahun 2020 oleh [3] melakukan penelitian yang membahas invers matriks RSFPLR*circfr* (0,b…,b) dan memperoleh bentuk umum dari hasil penelitiannya sebagai berikut :

$$A_n^{-1}=\begin{bmatrix} b^{-1} & b^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & -b^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b^{-1} & -b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{-1} & -b^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & b^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Pada tahun yang sama sebuah penelitian yang dilakukan oleh [4] yang membahas mengenai invers suatu matriks Hankel dengan bentuk khusus matirks yang digunakan adalah

$$A_3=\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \text{dengan } a\in R \tag{1.3}$$

dan memperoleh bentuk umum dari invers matriks Hankel bentuk khusus sebagai berikut :

$$A_3^{-n}=\begin{bmatrix} (-1)^n\left(\dfrac{\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)}{a^n}\right) & 0 & (-1)^{n+1}\left(\dfrac{\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)}{a^n}\right) \\ 0 & \dfrac{1}{a^n} & 0 \\ (-1)^{n+1}\left(\dfrac{\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)}{a^n}\right) & 0 & (-1)^{n}\left(\dfrac{\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}{a^n}\right) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Penelitian yang dilakukan oleh [5] yang membahas tentang invers matriks *Centrosymmetric* dengan bentuk khusus matriks yang digunakan adalah

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in R \tag{1.5}$$

dan diperoleh bentuk umum dari invers matriks *Centrosymmetric* bentuk khusus sebagai berikut :

$$A_4^{-n} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & -\left(\frac{n+1}{2a^n}\right) & -\left(\frac{n-1}{2a^n}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{n-1}{2a^n}\right) & -\left(\frac{n+1}{2a^n}\right) & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}, & n \text{ ganjil} \\ \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & -\left(\frac{n}{2a^n}\right) & -\left(\frac{n-1}{2a^n}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{n}{2a^n}\right) & -\left(\frac{n}{2a^n}\right) & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}, & n \text{ genap} \end{cases} \tag{1.6}$$

Penelitian yang dilakukan oleh [6] pada tahun 2022 yang membahas invers matriks Toeplitz dengan bentuk khusus matriks yang digunakan adalah

$$T_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ dengan } a, b \in R \tag{1.7}$$

dan didapat bentuk umum dari invers matriks *Toeplitz* bentuk khusus sebagai berikut :

$$(T_4{}^n)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a^n} & \dfrac{-nb}{a^{n+1}} & \dfrac{\left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)b^2}{a^{n+2}} & \dfrac{-\left(\frac{1}{6}(n+1)(n+2)n\right)b^3}{a^{n+3}} \\ 0 & \dfrac{1}{a^n} & \dfrac{-nb}{a^{n+1}} & \dfrac{\left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)b^2}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{a^n} & \dfrac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{a^n} \end{bmatrix} \qquad (1.8)$$

Pada tahun yang sama penelitian yang dilakukan oleh [7] yang membahas invers matriks *Leslie* dengan bentuk khusus matriks yang digunakan adalah

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & a & \cdots & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \forall a, b \in R \qquad (1.9)$$

dan diperoleh bentuk umum dari invers matriks *Leslie* dengan bentuk khusus sebagai berikut :

$$(A_n)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \frac{1}{b} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \frac{1}{b} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & \cdots & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \end{bmatrix} \qquad (1.10)$$

Bergerak dari penelitian-penelitian terkait diatas dan latar belakang, penulis tertarik untuk membahas matriks RSFPLF*circfr* bentuk khusus ordo 3 × 3 dengan judul "Invers Matriks RSLPFL$circfr\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ Bentuk Khusus Ordo 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Adjoin". Berdasarkan Persamaan (1.1) dengan $a_{11}, a_{13} = 0$ dan $a_{12} = \frac{1}{b}$ diperoleh bentuk khusus sebagai berikut :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \end{bmatrix}, \text{ dengan } b \in R \text{ dan } b \neq 0 \ . \qquad (1.11)$$

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada proposal penelitian ini berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan adalah menentukan bentuk umum invers dari matriks $RSLPFLcircfr\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ ordo 3 × 3 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan adjoin.

1.3 Batasan Masalah

Penelitian tugas akhir ini dibuat dengan memberikan batasan masalah agar tidak terjadi pembahasan yang berkepanjangan. Adapun batasan masalah yang digunakan adalah matriks *RSLPFL* $circfr\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ pada Persamaan (1.11) berpangkat bilangan bulat positif.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan memperoleh bentuk umum invers dari matriks $RSLPFLcircfr\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ ordo 3 × 3 pada Persamaan (1.11) berpangkat bilangan bulat positif menggunakan adjoin.

1.5 Manfaat Penelitian

Pada penelitian ini terdapat manfaat penelitian bagi berbagai pihak.Adapun manfaat yang diperoleh dari penelitian ini ialah:

1. Memperdalam pemahaman penulis tentang matriks dan menambah wawasan dalam bidang-bidang yang berhubungan dengan aljabar linear, khususnya dalam menyelesaikan invers matriks $RSLPFLcircfr\left(0,\frac{1}{b},0\right)$.
2. Sebagai referensi dalam memecahkan suatu permasalahan yang berkaitan dengan menentukan invers matriks $RSLPFLcircfr\left(0,\frac{1}{b},0\right)$.

1.6 Sistematika Penulisan

Kerangka penulisan proposal penelitian ini terdiri dari tiga bab yaitu :

BAB I PENDAHULUAN

Bab pertama pada proposal penelitian ini berisikan latar belakang mengenai penelitian yang akan dilakukan, rumusan masalah pada penelitian, batasan masalah yang digunakan pada penelitian ini, tujuan penelitian, manfaat penelitian, serta sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab kedua pada proposal penelitian ini atau landasan teori berisikan tentang teori pendukung terkait dengan matriks, operasi matriks, determinan matriks, invers matriks dan induksi matematika.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab terakhir pada penelitian ini berisikan tahapan-tahapan untuk menyelesaikan bentuk umum suatu invers matriks $RSLPFLcircfr\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisikan penjelasan bagaimana menentukan bentuk umum invers pada matriks $RSLPFLcircfr\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran dari apa yang telah dibahas dalam bab pembahasan.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai beberapa definisi,teori dan pembuktian dari suatu teorema serta beberapa contoh soal sebagai pendukung untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini.

2.1 Matriks dan Perpangkatan Matriks

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan.Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks[8]. Suatu matriks tersusun atas baris dan kolom, jika matriks tersusun atas m baris dan n kolom maka dapat dikatakan bahwa matriks tersebut berordo (berukuran) $m \times n$, adapun bentuk umum dari matriks tersebut yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Dimana $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$ dengan indeks pertama (i) menyatakan baris ke $-i$ dan indeks kedua (j) menyatakan kolom ke $-j$.

Definisi 2.1 [8] Jika A *invertible*, maka perpangkatan bilangan bulat non-negatif dari A didefinisikan sebagai:

$$A^0 = I \text{ dan } A^n = A\ A \dots A [\ n \text{ faktor}]$$

dan jika A *invertible*, maka perpangkatan bilangan bulat negatif dari A didefinisikan sebagai :

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1}\dots A^{-1} [n \text{ faktor}]$$

Teorema 2.1 [8] Jika A adalah invertible dan n adalah bilangan bulat non-negatif, maka:

a. A^{-1} adalah *invertible* dan $(A^{-1})^{-1} = A$

b. A^n adalah *invertible* dan $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$

c. kA adalah *invertible* untuk setiap skalar k yang bukan nol dan $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

Bukti : a. Karena $AA^{-1} = A^{-1}A = I$,matriks A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$

b. Pembuktian pada contoh 2.1

c. Jika k adalah skalar taknol sembarang, maka

$$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \frac{1}{k}(kA)A^{-1} = \left(\frac{1}{k}k\right)AA^{-1} = (1)I = I$$

Hal yang sama, $\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)(kA) = I$ sehingga kA dapat dibalik dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

Contoh 2.1

Suatu matriks A dan A^{-1} merupakan matriks berordo 3×3 dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, berdasarkan Teorema 2.1 (b), maka $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

dengan $n = 2$ sehingga didapat hasil pembuktian dari Teorema 2.1 (b) adalah

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 23 & 29 \\ 23 & 33 & 42 \\ 31 & 51 & 65 \end{bmatrix}$$

$$(A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & 29 & 29 \\ 23 & 33 & 42 \\ 31 & 51 & 65 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -16 & 9 \\ 2 & 11 & -8 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -16 & 9 \\ 2 & 11 & -8 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi,terbukti bahwa $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

Definisi 2.2 [8] Jika A merupakan matriks yang dapat di balik, maka A^T juga dapat dibalik dan $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Contoh 2.2

Suatu matriks A dan A^T yang berordo 2×2 dengan $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $A^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

berdasarkan Definisi 2.2 bahwa $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, maka

$$(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Jadi, sebagaimana yang dinyatakan pada Teorema 2.2 matriks-matriks ini memenuhi $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

2.2 Determinan Matriks

Definisi 2.3 [8] Jika A adalah matriks persegi, maka minor dari entri a_{ij} dinotasikan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi deteriminan dari sub-matriks yang tetap setelah baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ di hapus dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinotasikan oleh C_{ij} dan disebut kofaktor dari entri a_{ij} .

Teorema 2.2 [8] Jika diketahui matriks bujur sangkar A yang berordo $n \times n$, maka determinan matriks A dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil kali yang dihasilkan, yakni untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$, maka

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$ (ekspansi kofaktor di sepanjang baris ke-i).

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$ (ekspansi kofaktor di sepanjang kolom ke-j).

Contoh 2.3

Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Gunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris ketiga untuk mencari determinan matriks A.

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 2(12) + 4(9) + 0(18)$$

$$= 60$$

2.3 Invers Matriks

Definisi 2.4 [8] Jika A adalah matriks persegi dan jika matriks B yang berukuran sama dapat ditemukan sedemikian sehingga $AB=BA=I$ maka A dikatakan matriks yang dapat dibalik (non-singular) dan B disebut invers dari A. Jika matriks B tidak dapat ditemukan, maka A dikatakan singular.

Definisi 2.5 [8] Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$ dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Tranpos dari matriks ini disebut dengan adjoin A dan dinotasikan oleh adj(A).

Syarat agar matriks A mempunyai invers adalah matriks A matriks nonsingular ($|A| \neq 0$). Jika matriks A matriks singular ($|A| = 0$). Maka matriks A tidak mempunyai invers.

Contoh 2.4

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ maka

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Jadi, A dan B dapat dibalik dan masing-masingnya adalah kebalikan dari yang lain.

Teorema 2.3 [8] Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Bukti :

$$A\ adj(A) = |A|\ I$$

$$A\ adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dari hasil kali $A\ adj(A)$ adalah

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} \tag{2.1}$$

Jika $i = j$, maka persamaan (2.1) adalah ekspansi kofaktor dari $|A|$ sepanjang baris ke-i dari A (Teorema 2.2) dan jika $i \neq j$, maka semua a dan kofaktor-kofaktornya berasal dari baris-baris yang berbeda dari A sehingga nilai dari Persamaan (2.1) adalah nol. Oleh karena itu

$$A\ adj(A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|.I \tag{2.2}$$

Karena A dapat dibalik, maka $|A| \neq 0$, sehingga (2.2) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$\frac{1}{|A|}[A.adj(A)] = I \text{ atau } A\left[\frac{1}{|A|}adj(A)\right] = I$$

dengan mengalikan kedua sisi disebelah kiri dengan A^{-1} menghasilkan

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A) \tag{2.3}$$

Contoh 2.5

Tentukan invers matriks A dengan menggunakan metode adjoin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Menentukan determinan matriks A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(11) + 1(10) + 3(8)$$
$$= 56$$

Menentukan minor kofaktor dari matriks A :

$$C_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11 \qquad C_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10 \quad C_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$C_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \qquad C_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 14 \quad C_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -17 \quad C_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10 \quad C_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

Maka diperoleh matriks kofaktornya adalah :

$$C = \begin{bmatrix} 11 & -10 & 8 \\ 7 & 14 & 0 \\ -17 & -10 & 8 \end{bmatrix}$$

Dan adjoin dari A adalah

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 11 & -10 & 8 \\ 7 & 14 & 0 \\ -17 & -10 & 8 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 7 & -17 \\ -10 & 14 & -10 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Sehingga invers dari matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{56}\begin{bmatrix} 11 & 7 & -17 \\ -10 & 14 & -10 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{11}{56} & \frac{1}{8} & -\frac{17}{56} \\ -\frac{5}{28} & \frac{1}{4} & \frac{5}{28} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

2.4 Matriks *Circulant*

Definisi 2.6 [10] Matriks *circulant* adalah matriks berordo $n \times n$ yang dibentuk dari n vektor dan hanya memiliki satu input pada baris pertama. Untuk setiap $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$, matriks *circulant* $Z_{n\times n}$ yang dinotasikan dengan $Circ(z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$Z_{n\times n} = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-2} & z_{n-1} \\ z_{n-1} & z_0 & z_1 & \cdots & z_{n-3} & z_{n-2} \\ z_{n-2} & z_{n-1} & z_0 & \cdots & z_{n-4} & z_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_2 & z_3 & z_4 & \cdots & z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_{n-1} & z_0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.6

Diberikan suatu matriks *circulant* $Z(1,2,3,4)$.

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4.1 Matriks RSFPLR*circfr*

Definisi 2.7 [2] Matriks sirkulan RSFPLR merupakan matriks dengan baris pertamanya $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ yang dinotasikan RSFPLR*circfr* $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ dengan bentuk umum

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_{n-1}+a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ -a_{n-2} & -a_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-1}+a_0 & \cdots & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_3 & -a_4+a_3 & -a_5+a_3 & \cdots & a_0+a_{n-1} & a_1 & a_2 \\ -a_2 & -a_3+a_2 & -a_4+a_3 & \cdots & -a_{n-1}+a_{n-2} & a_0+a_{n-1} & -a_{n-3} \\ -a_1 & -a_2+a_1 & -a_3+a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}+a_{n-2} & a_0+a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan entri-entri pada baris $i+1$, entri pertama dimulai dengan mengambil entri terakhir pada baris ke $-i$ kemudian dikalikan dengan -1. Setelah itu untuk menentukan entri selanjutnya jumlahkan entri pertama dan entri terakhir pada baris ke $-i$ kemudian mengeser entri-entri dari baris ke$-i$ secara siklik satu posisi ke kanan.

Contoh 2.7

Diberikan suatu matriks RSFPLR*circfr* $(1,2,3)$.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.8

Diberikan suatu matriks RSFPLR*circfr* $(1,2,3,4,5)$.

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -5 & 6 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -1 & 6 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 & 6 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

2.4.2 Matriks RSLPFL*circfr*

Definisi 2.8 [2] Matriks sirkulan RSLPFL merupakan matriks dengan baris pertamanya $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ yang dinotasikan RSLPFL*circfr* $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, dengan bentuk umum

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}+a_0 & -a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1}+a_0 & -a_0+a_1 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1}+a_0 & \cdots & -a_{n-6}+a_{n-5} & -a_{n-5}+a_{n-4} & -a_{n-4} \\ a_{n-2} & a_{n-1}+a_0 & -a_0+a_1 & \cdots & -a_{n-5}+a_{n-4} & -a_{n-4}+a_{n-3} & -a_{n-3} \\ a_{n-1}+a_0 & -a_0+a_1 & -a_1 & \cdots & -a_{n-4}+a_{n-3} & -a_{n-3}+a_{n-2} & -a_{n-2} \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan entri-entri pada baris $i+1$, entri terakhir dimulai dengan mengambil entri pertama pada baris ke $-i$ kemudian dikalikan dengan -1. Setelah itu untuk menentukan entri selanjutnya jumlahkan entri pertama dan entri terakhir pada baris ke $-i$ kemudian mengeser entri-entri dari baris ke$-i$ secara siklik satu posisi ke kiri.

Contoh 2.9

Diberikan suatu matriks RSLPFL*circfr* $(1,2,3)$.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.10

Diberikan suatu matriks RSLPFL*circfr* $(1,2,3,4,5)$.

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

2.5 Induksi Matematika

Definisi 2.9 [11] Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan akan dibuktikan bahwa $p(n)$ tersebut benar untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, maka untuk membuktikan pernyataan ini, cukup dengan menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar
2. Jika $p(n)$ benar,maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$.Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah pertama disebut basis induksi atau dasar induksi dan langkah kedua disebut langkah induksi. Langkah induksi terdiri dari asumsi atau hipotesis yang menunjukkan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi ini disebut hipotesis induksi.Jika kedua langkah terbukti benar maka sudah terbukti bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif.

Contoh 2.11

Buktikan bahwa untuk $n \geq 1, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bukti:

Misalkan *p(n)* adalah $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1. Basis induksi: akan dibuktikan untuk $n = 1$ maka $p(1)$ benar.

   $p(1)$ adalah : $1^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$

   $= \frac{1.2.3}{6}$

   $= 1$

   Jadi, $p(1)$ benar.

2. Langkah induksi: diasumsikan bahwa *p(k)* benar untuk suatu bilangan asli *k*,yaitu : $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ dan akan ditunjukkan bahwa *p(n+1)* juga benar,yaitu :

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&=(k+1)\left\{\frac{1}{6}k(2k+1)(k+1)\right\}\\&=(k+1)\left\{\frac{1}{6}(2k^2+k+6k+6)\right\}\\&=(k+1)\left\{\frac{1}{6}(2k^2+7k+6)\right\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\end{aligned}$$

Jadi *p(k+1)* benar.

Dari langkah (1) dan langkah (2) disimpulkan bahwa *p(n)* benar untuk setiap bilangan asli, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini akan di jelaskan mengenai langkah-langkah atau tahapan-tahapan dalam proses penyelesaian penelitian untuk mendapatkan bentuk umum dari invers matriks RSLPFLcircfr bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.Adapun tahapan-tahapan nya sebagai berikut :

1. Diberikan suatu matriks RSLPFL$circfr\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ pada Persamaan (1.11).
2. Menentukan perpangkatan pada matriks $A_3^{\,2}$ sampai $A_3^{\,10}$.
3. Memprediksi bentuk umum dari matriks $A_3^{\,n}$ berpangkat bilangan bulat positif.
4. Membuktikan bentuk umum dari matriks $A_3^{\,n}$ dengan menggunakan induksi matematika.
5. Menentukan $\left|A_3^{\,2}\right|$ sampai $\left|A_3^{\,10}\right|$.
6. Memprediksi bentuk umum dari $\left|A_3^{\,n}\right|$ berpangkat bilangan bulat positif.
7. Membuktikan bentuk umum dari $\left|A_3^{\,n}\right|$ menggunakan pembuktian langsung dengan metode ekspansi kofaktor.
8. Memprediksi bentuk umum matriks kofaktor dari matriks $A_3^{\,n}$ yaitu $C_3^{\,n}$.
9. Membuktikan bentuk umum dari $C_3^{\,n}$ dengan pembuktian langsung dengan metode minor-kofaktor .
10. Membuktikan bentuk umum $(A_3^{\,n})^{-1}$ dengan menggunakan Teorema 2.3.
11. Menerapkan bentuk umum dari perpangkatan matriks $A_3^{\,n}$, determinan dan invers kedalam contoh soal.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab IV tentang Invers Matriks RSLPFL*circfr* $\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$ ordo 3 × 3 pada Matriks (1.11) berpangkat bilangan bulat positif menggunakan adjoin diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Bentuk umum dari Matriks RSLPFL*circfr*$\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$ ordo 3 × 3 berpangkat bilangan bulat positif yaitu :

$$A_3^{\,n} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b^n} & 0 \\ \frac{1}{b^n} & 0 & 0 \\ -\frac{(n-1)}{2b^n} & \frac{n+1}{2b^n} & -\frac{1}{b^n} \end{bmatrix}, n \text{ ganjil} \\ \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{b^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^n} & 0 \\ \frac{n}{2b^n} & -\frac{n}{2b^n} & \frac{1}{b^n} \end{bmatrix}, n \text{ genap} \end{cases}$$

2. Bentuk umum dari determinan Matriks RSLPFL*circfr*$\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$ 3 × 3 berpangkat bilangan bulat positif yaitu :

$$\left|A_3^{\,n}\right| = \frac{1}{b^{3n}}, \text{ untuk } n \in Z^+$$

3. Bentuk umum matriks kofaktor Matriks RSLPFL*circfr*$\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$ ordo 3 × 3 berpangkat bilangan bulat positif yaitu :

$$\left(A_3^{\,n}\right)^{-1}=\begin{cases}\begin{bmatrix}0 & b^n & 0\\ b^n & 0 & 0\\ \dfrac{(n+1)b^n}{2} & \dfrac{(n-1)b^n}{2} & -b^n\end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ ganjil}\\[2em] \begin{bmatrix}b^n & 0 & 0\\ 0 & b^n & 0\\ -\dfrac{nb^n}{2} & \dfrac{nb^n}{2} & b^n\end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ genap}\end{cases}$$

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini penulis membahas invers matriks RSLPFL$circfr\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ ordo 3 × 3 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan adjoin dengan entri bilangan real. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini, disarankan untuk dapat membahas invers matriks RSLPFL$circfr\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ dengan ordo yang lebih besar.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Davis, & Philip, J. (1979). Circulan Matrices. *Division of Applied Mathematics Brown University New York*.

[2] Jiang, X., & Hong, K. (2014). Exact determinants of some special circulant matrices involving four kinds of famous numbers. *Abstract and Applied Analysis*, *2014*.

[3] Rahmawati, Fitri, N., & Rahma, A. N. (2020). Invers Matriks RSFPLRcircfr (0,b,...,b). *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, *6*(1), 113–121.

[4] Aqilah, Z. (2020). *Invers Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Adjoin.* Skripsi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

[5] Erizona Esty. (2020). *Invers Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo 4x4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Adjoin*. Skripsi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

[6] Jauzah, S. M. (2022). *Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Ordo 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Adjoin*. Skripsi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

[7] Arisanti, R. (2022). *Invers Matriks Leslie Ordo n×n(n>4) Bentuk Khusus Menggunkan Metode Adjoin.* Skripsi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

[8] Anton, H., & Chris, R. (2004). *Aljabar Linear Elementer* (Kedelapan). Erlangga.

[9] Suparto, J. (2003). Pengantar Matrix. RINEKA CIPTA.

[10] Kannan, K. ., Elumalai, N., & Kavitha, M. (2018). On s-normal Circulant and con-s-normal Circulant Matrices. *International Journal of Scientific Research in Mathematical and Statistical Sciences*.

[11] Rinaldi, M. (2012). *Matematika Diskrit* (Revisi Kel). Informatika.

[12] Olson,Brian J.Shaw.et.al.(2014).Circulant matrices and their application to vibration analysis.Journal Applied Mechanics Reviews,66(4)

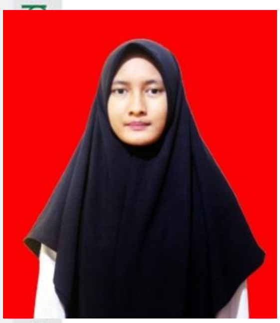
[13] Salihu, Armend.(2012). "New Method to Calculate Determinants of n× n (n≥ 3) Matrix, by Reducing Determinants to 2nd Order".Journal International Journal of Algebra,6(19),913-917.

[14] Iang, Zhao Lin&Xu, Zong Ben.(2005)."Efficient algorithm for finding the inverse and the group inverse of FLS r-circulant matrix". Journal of Applied Mathematics and Computing,18.45-57.

[15] Jiang, Zhaolin., and Benxu, Zong." Efficient Algorithm For Finding The Inverse And The Group Inverse Of FLScirc Matrix", Journal of Application Math and Computing, 18(12), 2005.

[16] Pan X, Qin M., "The Discriminance for FLDcircr Matrices and the Fast Algorithm of Their Inverse and Generalized Inverse". Shanghai. 20154.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan pada tanggal 12 Januari 2000 di Pekanbaru. Anak kedua dari empat bersaudara pasangan Bapak Mursal dan Ibu Sarida. Penulis menyelesaikan pendidikan nonformal di *Playgroup* An Namiroh pada tahun 2004. Kemudian penulis menyelesaikan pendidikan formal di taman kanak-kanak An Namiroh pada tahun 2005. Pada tahun 2011 penulis menyelesaikan pendidikan di Sekolah Dasar Negeri 111 Pekanbaru. Pada tahun 2014 penulis menyelesaikan pendidikan di Sekolah Menengah Pertama Negeri 20 Pekanbaru. Pada tahun 2017 penulis menyelesaikan pendidikan di Sekolah Menengah Atas Muhammadiyah 1 Pekanbaru dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam(IPA). Pada tahun 2018 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika.Pada tahun 2021 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Sialang Munggu Kecamatan Tuah Madani Kota Pekanbaru.