INVERS MATRIKS HANKEL BENTUK KHUSUS ORDO $(n+1) \times (n+1)$ MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

JEANETTE ANGELICA RISCI VIRGINIA
11750425102

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2022

LEMBAR PERSETUJUAN

INVERS MATRIKS HANKEL BENTUK KHUSUS ORDO $(n+1) \times (n+1)$ MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

TUGAS AKHIR

oleh:

JEANETTE ANGELICA RISCI VIRGINIA
11750425102

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 15 Juli 2022

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIP. 19770913 20060 4 2002

LEMBAR PENGESAHAN

INVERS MATRIKS HANKEL BENTUK KHUSUS ORDO $(n+1) \times (n+1)$ MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

TUGAS AKHIR

oleh:

JEANETTE ANGELICA RISCI VIRGINIA
11750425102

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 15 Juli 2022

Pekanbaru, 15 Juli 2022
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Nilwan Andiraja, M.Sc.**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota I	**: Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**
Anggota II	**: Ade Novia Rahma, M.Mat.**

Lampiran Surat :
Nomor : Nomor 25/2021
Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini :

Nama : JEANETTE ANGELICA RISCI VIRGINIA
NIM : 11750425102
Tempat/ Tgl. Lahir : JAMBI / 18 Maret 1999
Fakultas/Pascasarjana : SAINS DAN TEKLOGI
Prodi : MATEMATIKA

Judul Disertasi/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya*:

INVERS MATRIKS HANKEL BENTUK KHUSUS ORDO $(n+1) \times (n+1)$ MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan Disertai/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya* dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu Disertasi/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya* saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan Disertasi/Thesis/Skripsi/(Karya Ilmiah lainnya)* saya tersebut, maka saya besedia menerima sanksi sesuai peraturan peraturan perundang-undangan.

Demikian Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 26 JULI 2022
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
10000
SEPULUH RIBU RUPIAH
384FBAJX974742893

JEANETTE ANGELICA
NIM : 11750425102

pilih salah salah satu sesuai jenis karya tulis

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkansumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 15 Juli 2022
Yang membuat pernyataan,

JEANETTE ANGELICA RISCI VIRGINIA
11750425102

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin, karya ini penulis persembahkan untuk:

Keluarga. Terima kasih untuk Papa Ceppy Wahyudin a.k.a PaCe dan Mama Riesmiyati yang telah memberikan kesempatan dan mendukung penulis baik secara moril dan materil sehingga penulis dapat merasakan bangku perkuliahan. Terimakasih untuk saudara-saudara saya yaitu Aa' Jordy Wisnu Putera Perdana, dan Justin Dante Fibra Wardhana yang telah memberikan semangat untuk penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan perkuliahan ini. Dan terimakasih juga untuk Tante Nana, Tante Nani, dan Om Jajat yang sudah memberikan uang jajan tambahan dan motivasi untuk penulis. Terimakasih tambahan penulis persembahkan untuk Papa dan Aa' yang sudah memperjuangkan segalanya agar penulis mendapatkan gelar Sarjana.

Diri sendiri. Penulis persembahkan skripsi ini untuk diri sendiri yang sudah berusaha berproses walaupun selambat siput tetapi tetap memiliki tekad untuk mencapai garis *finish*. Penulis bangga bahwa nyatanya saat proses pembuatan skripsi, penulis tidak merasakan beban sedikitpun dan menikmati setiap inci pembuatan skripsi ini. Terima kasih untuk diri sendiri yang dapat menyelesaikan semua tantangan 'perantauan' dari awal kuliah hingga akhir.

Semua pihak yang bertanya:

"Angel sudah sidangkan?"

"Sudah wisuda?"

"Angel sudah luluskan?

Akhirnya penulis bisa menjawab "Sudah!". Mungkin tanpa kalian hati penulis tidak semembara ini untuk segera menyelesaikan skripsi ini.

INVERS MATRIKS HANKEL BENTUK KHUSUS ORDO $(\boldsymbol{n}+\mathbf{1}) \times (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$ MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

JEANETTE ANGELICA RISCI VIRGINIA
11750425102

Tanggal Sidang : 15 Juli 2022
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum invers Matriks Hankel berbentuk khusus $(n+1)\times(n+1)$ dengan menggunakan metode Adjoin. Invers matriks ditentukan dengan mendapatkan bentuk umum determinan Matriks Hankel bentuk khusus dengan memperhatikan pola determinan matriks A_1 sampai A_9 dan dibuktikan dengan induksi matematika. Selanjutnya, mendapatkan bentuk umum matriks kofaktor Matriks Hankel bentuk khusus dengan memperhatika pola matriks kofaktor C_1 sampai C_9 dan dibuktikan dengan pembuktian langsung. Lebih lanjut bentuk umum dipresentasikan dengan menggunakan beberapa contoh untuk masing-masing rumus umum.

Kata Kunci : Determinan, Invers, Matriks Hankel, Matriks Kofaktor, Metode Adjoin.

INVERS HANKEL MATRIX SPECIAL FORM OF ORDER $n \times n$ USING ADJOIN METHOD

JEANETTE ANGELICA RISCI VIRGINIA
11750425102

Date of Final Exam : July 15th, 2022
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

This study aims to determine the general form of the special inverse Hankel Matrix $(n+1) \times (n+1)$ using the Adjoin method. The inverse of the matrix is determined by obtaining the general form of the determinants of the Hankel Matrix of special forms by observing the pattern of the determinants of the matrices A_1 to A_9 and proved by mathematical induction. Furthermore, to obtain the general form of the cofactor matrix, Hankel's matrix of special form by observing the pattern of the cofactor matrix C_1 to C_9 and proven by direct proof. Further general forms are presented using several examples for each general formula.

***Keywords** : Adjoin Method, Cofactor Matrix, Determinant, Hankel Matrix , Invers,.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Segala puji syukur kita ucapkan kehadirat Allah *subhanahu waata'ala*, karena berkat rahmat dan hidayah-Nya penulisa mampu menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik sebagai salah satu syarat dalam memperoleh gelar sarjanasains dan teknologi pada program studi matematika yang berjudul "Invers Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo $(n+1) \times (n+1)$ Menggunakan Metode Adjoin". Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad *shallallhu 'alaihi wasallam*, yang telah membimbing manusia dari zaman yang tidak berpengetahuan, sampai ke zaman yang memiliki kemajuan ilmu teknologi seperti saat ini.

Rasa terimakasih yang tidak terbatas penulis ucapkan kepada keluarga yang selalu memberikan motivasi, nasehat, perhatian, dukungan, dan pengorbanan serta segala doa-doa yang terbaik kepada penulis. Pada penulisan tugas akhir ini, penulis banyak mendapatkan saran, bimbingan, arahan, doa dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan hati tulus ikhlas penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan sekaligus ketua sidang tugas akhir penulis.
5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku pembimbing akademik sekaligus pembimbing tugas akhir yang telah memberikan arahan, nasehat, motivasi dan berbagai pengalaman berharga kepada penulis.

6. Segenap civitas akademik Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau terutama seluruh dosen, terimakasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Untuk teman-teman penulis yang selalu memberikan semangat dan arahan dalam pengerjaan tugas akhir ini. Terimakasih banyak untuk Puspa, Pija, Stef, Selvi, Tiza, Lisa dan anggota Mayau yang cukup banyak turut andil disaat penulis mengerjakan tugas akhir ini hingga selesai.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Akhirnya penulis hanya dapat berharap, dibalik skripsi ini dapat ditemukan sesuatu yang dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas atau bahkan hikmah bagi penulis, pembaca, dan bagi seluruh mahasiswa Jurusan Matematika.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 15 Juli 2022

JEANETTE ANGELICA RISCI VIRGINIA
11750425102

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Invers suatu matriks adalah satu dari pembahasan untuk menyelesaikan permasalahan sistem persamaan linear. Matriks dikatakan memliki invers apabila determinannya tidak nol [1]. Maka terdapat beberapa masalah yang timbul dalam menentukaan invers matriks yaitu salah satunya menentukan invers matriks yang berukuran besar. Semakin besar ukuran matriks maka dibutuhkan waktu yang relatif lama dalam menentukan invers suatu matriks tersebut. Oleh karena itu rumus yang tepat sangat diperlukan dalam mencari invers suatu matriks [2].

Ada beberapa jenis matriks diantaranya adalah matriks Hankel. Penelitian [3] menyajikan evaluasi determinan Hankel dari urutan faktorial umum. Metode yang digunakan untuk penelitian tersebut adalah metode Ekponensial Array, Roirdan, Polinomial Euler, dan Polinomial Eksponensial.

Penelitian yang membahas tentang invers matriks sudah banyak dilakukan, diantaranya [4] di tahun 2014 membahas tentang invers suatu matriks toeplitz T_n dengan diagonal nol dan selainnya $x \in \mathbb{R}$. Penelitian ini menggunakan metode Adjoin untuk menentukan invers matriksnya. Bentuk umum yang digunakan yaitu:

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 \\ c & b & a & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & 0 & c & b \end{bmatrix}$$

dengan hasil yang diperoleh yaitu bentuk umum invers matriks Toeplitz T_n adalah

$$T_n = t_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-(n-2)}{(n-1)x} & untuk\ i = j \\ \dfrac{1}{(n-1)x} & untuk\ i \neq j \end{cases}$$

t_{ij} merupakan entri yang berada di baris ke-i dan kolom ke-j.

Tahun 2018 [5] melakukan penelitian yang merumuskan bentuk umum invers dari suatu matriks Hankel $n \times n$ untuk setiap $n \in N$ dengan menggunakan bentuk khusus seperti berikut: $H_{ij} = \frac{1}{(i+j-1)!}$ dengan $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Hasil dari penelitian tersebut yaitu terdapat rumus eksplisit untuk invers untuk matriks Hankel sehingga bentuk umum invers yang diperoleh adalah:

$$M_{ij} = (-1)^{n+i+j+1}(i-1)!\,j!\binom{n-1}{i-1}\binom{n+j-1}{j}\sum_{k=0}^{i=1}\binom{n-i+k}{j-1}\binom{n+k-1}{k}$$

untuk setiap $n \in N$.

Selanjutnya pada tahun yang sama [2] membahas tentang menentukan determinan suatu matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus menggunakan ekspansi kofaktor. Pada penelitiannya disebutkan bahwa matriks $FLDcirc_r$ merupakan jenis matriks *circulant* tipe baru. Bentuk umum dari matriks $FLDcirc_r$ yang digunakan yaitu:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Sehingga hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah:

$$|A_n| = (-1)^{n+1}x^n r, \qquad n \geq 2$$

Tahun 2019 [1] membahas mengenai invers matriks tak negatif M_n menggunakan metode Adjoin. Tujuan penelitian [1] untuk menemukan bentuk umum matriks kofaktor dan invers dari matriks tak negatif orde genap dan ganjil. Adapun bentuk umum dalam penelitian ini sebagai berikut.

1. Matriks tak negatif berorde genap

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & a & b & \cdots & b & a \\ a & 0 & b & \cdots & b & a \\ a & b & 0 & \cdots & b & a \\ a & b & a & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & b & a & \cdots & a & 0 \end{bmatrix}, \forall a,b > 0$$

2. Matriks tak negatif berorde ganjil

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & a & b & \cdots & a & b \\ a & 0 & b & \cdots & a & b \\ a & b & 0 & \cdots & a & b \\ a & b & a & \cdots & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & b & a & \cdots & b & 0 \end{bmatrix}, \forall a,b > 0$$

Sehingga hasil yang didapatkan untuk invers matriks tak negatif M_n dengan:

a. Kolom ganjil

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{n-j}{2}\right)(a^2-b^2)+(ab)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i<j \\ -\dfrac{\left(\frac{j-1}{2}\right)a^2+\left(\frac{n-3}{2}\right)ab+\left(\frac{n-j}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i=j \\ -\dfrac{\left(\frac{n-j}{2}\right)(a^2-b^2)-(ab)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i>j \end{cases}$$

b. Kolom genap

$$b_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{\left(\frac{n-(j+1)}{2}\right)a^2-\left(\frac{n-(j-1)}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i<j \\ -\dfrac{\left(\frac{n-(j+1)}{2}\right)a^2+\left(\frac{n-1}{2}\right)ab+\left(\frac{j-2}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i=j \\ \dfrac{\left(\frac{j}{2}\right)a^2-\left(\frac{j-2}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i>j \end{cases}$$

Selanjutnya, ditahun yang sama [6] melakukan penelitian yang membahas tentang invers matriks blok 2×2 dari suatu matriks berbentuk khusus menggunakan komplemen *schur* yang memiliki dua submatriks yang *invertible*.

Bentuk umum yang digunakan seperti berikut:

$$A_n = FLDcirc_r(0,0,a,0,\dots,0)$$

sehingga diperoleh invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLDcirc_r$, yaitu:

$$(P_n)^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r(a)^{-1} & r(a)^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & r(a)^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tahun 2021 [7] membahas tentang menentukan bentuk umum perpangkatan dan determinan matriks Hankel berpangkat bilangan bulat positif dengan bentuk khusus ordo 3×3. Bentuk umum yang digunakan yaitu:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in R$$

Adapun hasil yang diperoleh menunjukkan bentuk umum determinan matriks Hankel sebagai berikut:

$$|A^n| = (-1)^n a^{3n}, n \geq 1$$

Penelitian-penelitian terkait tentang invers matriks dapat dilihat pada artikel [11], [12], [13]. Sedangkan penelitian yang terkait tentang determinan matriks dapat dilihat pada artikel [14] dan [15].

Berdasarkan uraian di atas maka penulis ingin melaksanakan penelitian terhadap matriks Hankel yang berjudul **"Invers Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo $(n+1) \times (n+1)$ Menggunakan Metode Adjoin"**. Dengan bentu khusus matriks Hankel nya berukuran $(n+1) \times (n+1)$ dimana a_0 dan elemen didiagonal sekundernya berupa a sedangkan elemen selainnya berupa nol atau dapat ditulis seperti berikut:

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in R \qquad (1.2)$$

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang yang telah disampaikan, didapatkan suatu rumusan masalah pada tugas akhir yaitu bagaimana bentuk umum dari invers matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1) \times (n+1)$ menggunakan metode Adjoin seperti pada Persamaan (1.2).

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada pada tugas ini yaitu matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1) \times (n+1)$ menggunakan metode Adjoin seperti pada Persamaan (1.2).

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk memperoleh bentuk umum invers matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1) \times (n+1)$ dengan menggunakan metode Adjoin seperti pada Persamaan (1.2).

1.5 Manfaat Penelitian

Dari rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah disampaikan penelitian ini memiliki manfaat sebagai berikut:

1. Bagi Penulis

   Penulis dapat memperdalam pemahaman serta mengembangkan kajian ilmu yang telah didapatkan pada perkuliahan sehingga dapat mengkaji suatu permsalahan aljabar linear terkhusus dalam menyelesaikan invers matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1) \times (n+1)$ pada Persamaan (1.2).

2. Bagi Pembaca

   Penulis berharap penelitian ini membantu pembaca untuk menentukan invers matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1) \times (n+1)$ pada Persamaan (1.2) dengan lebih efisien dan juga dapat menjadi referensi penelitian selanjutnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada proposal tugas akhir ini mencakup tiga bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang teori yang dijasikan dasar penulisan tugas akhir ini diantaranya tentang matriks Hankel, determinan matriks, invers matriks, dan induksi matematika.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjabarkan tentang proses ataupun langkah penulisan agar dapat menemukan bentuk umum invers matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1) \times (n+1)$ pada Persamaan (1.2) dengan menggunakan metode Adjoin.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi tentang tahapan-tahapan dilakukan oleh penulis untuk mendapatkan hasil seperti yang disampaikan pada rumusan masalah.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari hasil penelitian yang dilakukan oleh penulis.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Matriks merupakan kumpulan dari beberapa bilangan yang tersususn berdasarkan baris dan kolom dalam bentuk persegi atau persegi panjang serta diapit oleh tanda kurung [8].

Definisi 2.1 [9] Matriks adalah susunan dari bilangan-bilangan yang dibatasi dengan tanda kurung biasa ( ) atau kurung siku [ ] yang berbentuk persegi panjang dan disusun menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan yang menyusun baris dan kolom dari suatu matriks disebut elemen-elemen matriks.

Bentuk umum sebuah matriks adalah:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } A = [a_{ij}]$$

dengan indeks pertama yaitu $i = 1,2,...,m$ menyatakan baris ke-i dan indeks kedua yaitu $j = 1,2,...,n$ menyatakan kolom ke-j.

Definisi 2.2 [10] Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari A dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ij}$$

Selanjutnya, akan dijelaskan tentang matriks simetris seperti Definisi 2.3 berikut:

Definisi 2.3 [10] Suatu matriks bujursangkar A dikatakan simetris jika $A = A^T$.

Contoh 2.1

Diberikan $A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, tunjukkan bahwa matriks disamping merupakan matriks simetris.

Maka

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} = A_3$$

sehingga A_3 disebut matriks simetris.

2.2 Matriks Hankel

Matriks Hankel akan dijelaskan seperti Definisi 2.4 seperti berikut:

Definisi 2.4 [3] Matriks Hankel ke-n dari barisan $a = \{a_n\}_{n\geq 0}$ adalah matriks $(n+1)\times(n+1)$ yang entri (i,j) adalah a_{i+j}.

Matriks Hankel adalah matriks yang semua elemen di sepanjang diagonal $i + j$ konstan, artinya setiap kemiringan diagonal dari kanan ke kiri adalah konstan. Secara umum, bentuk matriks Hankel sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}$$

Matriks Hankel adalah matriks simetris.

Contoh 2.2

Diberikan Matriks Hankel dengan ordo 4×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa matriks A memiliki semua elemen disepanjang diagonal $i+j$ konstan, sesuai dengan Definsi 2.4 maka matriks A disebut matriks Hankel.

2.3 Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Terdapat beberapa operasi matriks diantaranya penjumlahan dan pengurangan matriks yang akan dijelaskan seperti berikut:

Definisi 2.5 [10] Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah $A+B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A dan selisih $A-B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{2}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}$$

Dalam notasi matriks, $A=\left[a_{ij}\right]$ dan $B=\left[b_{ij}\right]$ memiliki ukuran yang sama, maka $(A+B)_{ij}=(A)_{ij}+(B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ dan $(A-B)_{ij}=(A)_{ij}-(B)_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

Contoh 2.3

Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, tunjukkan kedua mtariks tersebut menggunakan operasi matriks yaitu penjumlahan matriks dan pengurangan matriks.

Maka

$$A+B=\begin{bmatrix}3&8&4\\7&4&4\\6&2&2\end{bmatrix} \text{ dan } A-B=\begin{bmatrix}3&-6&-2\\-3&4&2\\4&-2&-6\end{bmatrix}.$$

2.4 Perkalian Matriks

Berikut akan dijelaskan tentang perkalian skalar pada matriks seperti berikut:

Definisi 2.6 [10] Jika A adalah sebarang matriks dan c adalah sebarang skalar, maka hasil perkalian cA adalah suatu matriks yang diperolehi dari perkalian setiap entri dari A dengan c. Matriks cA disebut perkalian skalar dari A. Jika $A=[a_{ij}]$, maka $(cA)_{ij}=c(A)_{ij}=ca_{ij}$.

Contoh 2.4

Jika terdapat matriks $A_3=\begin{bmatrix}2&1&7\\3&3&2\\4&1&0\end{bmatrix}$ dengan skalar $c=2$, tunjukkan perkalian matriks dengan menggunakan Definisi 2.6.

Maka

$$A_3=\begin{bmatrix}4&2&14\\6&6&4\\8&2&0\end{bmatrix}$$

Dalam perkalian matriks terdapat cara dalam menyelesaikannya perkaliannya seperti pada Definisi 2.7 berikut:

Definisi 2.7 [10] Jika A adalah matriks berukuran $m\times r$ dan B adalahh matriks berukuran $r\times n$ maka hasilkali (*product*) AB adalah matriks berukuran $m\times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkanlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & \ddots & & \iddots & \vdots \\ \vdots & & c_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \iddots & & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1r}b_{r1} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2r}b_{r2} \\ \vdots \; & \;\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} \\ \vdots \; & \;\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ c_{mn} &= a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \cdots + a_{mr}b_{rn} \end{aligned}$$

Contoh 2.5

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, tunjukkan perkalian matriks dengan menggunakan Definisi 2.7.

Maka

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 1 + 2\cdot 3 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3 \\ 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 11 \end{bmatrix}$$

2.5 Determinan Matriks

Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Det(A) atau $|A|$ adalah symbol dari fungsi determinan yang diperoleh dari semua hasil kali elementeri bertanda dari A. Hasil det(A) disebut sebagai determinan dari A [10].

Definisi 2.8 [10] Jika A adalah matriks persegi, maka minor dari entri a_{ij} dinotasikan oleh M_{ij} dan didefiniskan menjadi determinan dari sub-matriks yang tetap setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapus dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinotasikan oleh C_{ij} dan disebutkan kofaktor dari entri a_{ij}.

Contoh 2.6

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, tunjukkan minor dan kofaktor dari matriks A.

maka minor dari entri a_{11} adalah

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

dan kofaktor dari a_{11} adalah

$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$ =16

Berikut penjelasan tentang ekspansi kofaktor dalam determinan seperti pada Definisi 2.9 berikut:

Definisi 2.9 [10] Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka bilangan yang dihasilkan dari perkalian entri-entri disetiap baris atau kolom A oleh kofaktor yang bersesuaian lalu menjumlahkan hasil perkaliann tersebut dikatakan determinan A. Jumlah-jumlah dari keseluruhannya disebut ekspansi kofaktor dari A yang dituliskan sebagai berikut:

ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j:

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Contoh 2.7

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama adalah

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1$$

Teorema 2.1 [10] Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar. Jika A memiliki satu baris atau satu kolom bilangan nol, maka $|A| = 0$.

Contoh 2.8

Akan ditentukan determinan dari matriks 3×3 dengan

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 2.1 Maka $|A_3| = 0$

2.6 Invers Matriks

Definisi 2.10 [10] Jika A adalah matriks bujur sangkar, dan jika terdapat matriks B yang berukuran sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik dan B disebut sebagai invers dari A.

Determinan matriks A dapat menjadi acuan untuk melihat apakah matriks tersebut mempunyai invers atau tidak. Jika $\det(A) \neq 0$ artinya matriks A memiliki invers.

Definisi 2.11 [10] Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. *Transpose* dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

Invers matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Contoh 2.8

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, tunjukkan invers dari matriks A.

Penyelesaian

Dengan menggunakan Persamaan 2.1 sehingga diawali dengan menentukan $\det(A)$ seperti berikut:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-6) - 2(-7) + 8(1) = -2$$

Kemudian menentukan adjoin dengan mencari terlebih dahulu minor kofaktornya.

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6 \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-7) \qquad C_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(-8) \qquad C_{22} = +\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -4 \qquad C_{33} = +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh $adj(A)$ sebagai berikut:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -6 & 8 & 2 \\ 7 & -8 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka Invers matriks dari A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -6 & 8 & 2 \\ 7 & -8 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ \frac{-7}{2} & 4 & 2 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.7 Induksi Matematika

Salah satu pembuktian yang digunakan dalam penelitian ini adalah induksi matematika. Induksi matematika digunakan untuk membuktikan determinan matriks yang akan dijelaskan pada Definisi 2.12 berikut:

Definisi 2.12 [11] Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukan bahwa:

1. $p(1)$ benar.
2. Untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$, jika $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar.

Langkah 1 dinamakan basis induksi. Langkah 2 dinamakan langkah induksi. Asumsi jika $p(n)$ benar dinamakan hipotesis induksi. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar dan akan dibuktikan bahwa $p(n+1)$ juga benar. Setelah menunjukkan langkah tersebut benar maka terbukti sudah jika $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 2.9

Buktikanlah bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$.

Penyelesaian:

1. Basis induksi: akan ditunjukkan bahwa $p(1)$ benar.

   $n = 1$ $\qquad\qquad$ $n = 1$

$2n-1=2(1)-1=1 \qquad n^2=1^2=1$

2. Langkah Induksi: Jika $p(1)$ benar. Akan dibuktikan untuk $p(n+1)$ juga benar.Maka akan ditunjukkan bahwa:

$$\begin{aligned}
1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1) &= (n+1)^2\\
[1+3+5+\cdots+(2n-1)]+(2n+1) &= n^2+2n+1\\
n^2+(2n+1) &= n^2+2n+1\\
n^2+2n+1 &= n^2+2n+1
\end{aligned}$$

Karena langkah pertama dan kedua telah terbukti benar untuk seluruh bilangan bulat positif n dengan $n \geq 1$.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah metode studi literatur seperti buku, artikel, skripsi yang berkaitan dengan penelitian ini.

3.2 Prosedur Penelitian

Pada penelitian ini terdapat beberapa prosedur yaitu sebagai berikut:

1. Berdasarkan Persamaan (1.2) akan diberikan Matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1) \times (n+1)$.
2. Menentukan determinan Matriks Hankel bentuk khusus matriks A_1 sampai A_9 menggunakannekspansi ikofaktor.
3. Menduga bentuk umum determinan Matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1) \times (n+1)$.
4. Membuktikan bentuk umum determinan Matriks Hankel ordo $(n+1) \times (n+1)$ menggunakan induksi matematika.
5. Menentukan matriks kofaktor Matriks Hankel bentuk khusus matriks A_1 sampai A_9 untuk mendapatkan invers Matriks Hankel.
6. Menduga bentuk umum matriks kofaktor dari Matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1) \times (n+1)$.
7. Membuktikan bentuk umum matriks kofaktor Matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1) \times (n+1)$ menggunakan pembuktian langsung.
8. Mendapatkan bentuk umum invers Matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1) \times (n+1)$ menggunakan metode Adjoin.
9. Diberikan beberapa contoh soal untuk menerapkan bentuk umum determinan, matriks kofaktor, dan invers dalam matriks Hankel.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dan pembahasan pada bab-bab sebelumnya dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Bentuk umum determinan suatu Matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1)\times(n+1)$ pada Persamaan (1.2) seperti berikut:

$$|A_{n+1}| = (-1)^{\frac{n}{2}}a^{n+1} \text{ untuk } n \text{ genap}$$

$$|A_{n+1}| = (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^{n+1} \text{ untuk } n \text{ ganjil}$$

2. Bentuk umum matriks kofaktor suatu Matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1)\times(n+1)$ pada Persamaan (1.2) seperti berikut:

$$C_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n}{2}}a^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{\frac{n}{2}}a^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+2}{2}}a^n \end{bmatrix} \text{ untuk } n \text{ genap}$$

$$C_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}a^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{\frac{n+3}{2}}a^n \end{bmatrix} \text{ untuk } n \text{ ganjil}$$

3. Bentuk umum invers Matriks Hankel bentuk khusus ordo $(n+1) \times (n+1)$ pada Persamaan (1.2) seperti berikut:

$$(A_{n+1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

5.2 Saran

Bagi pembaca yang tertariks dengan topik pembahasan ini dapat melanjutkan pembahasan tentang invers Matriks Hankel dengan bentuk khusus yang lain atau dengan metode yang lain. Hal lain yang perlu diperhatikan adalah ordo Matriks Hankel berbeda dengan matriks biasa sehingga perlu ketelitian dalam pengerjaannya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] F. Aryani, M. Ulfah, and C. C. Marzuki, "Invers Matriks Mn Tak Negatif Menggunakan Metode Adjoin," *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri, 11*, no. November, pp. 439–450, 2019.

[2] F. Aryani, C. C. Marzuki, and S. Basriati, "Determinan Matriks FLDcircr Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor," *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri, 11*, no. November, pp. 682–688, 2018.

[3] S. L. Yang and Y. N. Dong, "Hankel Determinants of the Generalized Factorials," *Indian J. Pure Appl. Math.*, vol. 49, no. 2, pp. 217–225, 2018, doi: 10.1007/s13226-018-0264-9.

[4] B. Siregar, "Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin," *Saintia Maematika.*, vol. 02, no. 01, pp. 85–94, 2014.

[5] K. Habermann, "An explicit formula for the inverse of a factorial hankel matrix," *Australas. J. Comb.*, vol. 79, pp. 250–255, 2021.

[6] A. N. Rahma *et al.*, "Determinan Matriks Blok 2 x 2 Dalam Aplikasi Matriks FLDcircr Bentuk Khusus," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 5, no. 2, pp. 34–42, 2019.

[7] J. Hal, A. N. Rahma, and Z. Aqilah, "Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 7, no. 1, pp. 96–104, 2021.

[8] Sharma, *Jelajah Matematika Edisi Pertama*, 1st ed. Bogor: Yudhistira, 2014.

[9] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer Edisi Kedelapan*, 8th ed. Jakarta: Erlangga, 2004.

[10] R. Munir, *Matematika Diskrit Edisi Ketiga*, 3rd ed. Bandung: Informatika Bandung, 2007.

[11] M. E. K. Putra and F. Aryani, "Invers Matriks Positif Menggunakan Metode Adjoin," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 3, no. 1, pp. 45–52, 2017.

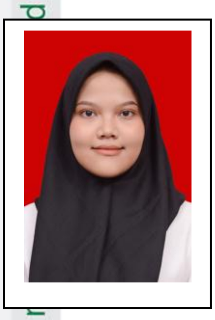
[12] Rahmawati, N. Fitri, and A. N. Rahma, "Invers Matriks RSFPLRcircfr (0,b,...,b)," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 1, pp. 113–121, 2020.

[13] F. Aryani and T. Rizkiani, "Penyelesaian sistem Persamaan Linier Kompleks dengan Invers Matriks Menggunakan Metode Faddev," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 2, no. 1, 2016.

[14] A. N. Rahma, Rahmawati, and R. H. Vitho, "Determinan Matriks Segitiga Bentuk Khusus Ordo 3x3 Bilangan Bulat Positif Menggunakan Kofaktor," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol.6, no. 2, pp. 30–41, 2020.

[15] F. Aryani and Hanita, "Determinan Matriks Tidak Bujur Sangkar Berbentuk Khusus 3xn Menggunakan Metode Radic," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 4, no. 1, pp. 36–42, 2018.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan di Kota Jambi pada tanggal 18 Maret 1999, sebagai anak kedua dari tiga bersaudara pasangan Bapak Ceppy Wahyudin dan Ibu Riesmiyati. Penulis menyelesaikan Pendidikan Formal Sekolah Dasar di SD Islam Al-Falah Jambi tahun 2011. Pada tahun 2014 penulis menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di MTs Negeri Model Jambi dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) di MAN Model Jambi pada tahun 2017 di Kota Jambi.

Tahun 2017 penulis melanjutkan Pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan lulus di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Program Studi Matematika. Pada bulan Februari 2020, Penulis melaksanakan Kerja Praktek di UPT Pelatihan Penyuluh Pertanian Kota Pekanbar di Marpoyan, Pekanbaru, dengan judul **"Tingkat Kepuasan Pelayanan terhadap Evaluasi Pemahaman Petugas Pengamat Organisme Pengganggu Tumbuhan (POPT)"** yang dibimbing oleh Ibu Sri Basriati, M.Sc. yang diseminarkan pada tanggal 12 Juni 2020. Bulan Juni-September 2020, penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata Dari Rumah (KKN-DR) di Kota Jambi, Kecamatan Paal Merah, Kelurahan Lingkar Selatan. Penulis dinyatakan lulus ujian sarjana pada tanggal 15 Juli 2022 dengan judul Tugas Akhir **"Invers Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo $(\boldsymbol{n+1}) \times (\boldsymbol{n+1})$ Menggunakan Metode Adjoin"** dengan dosen Pembimbing Ibu Fitri Aryani, M.Sc.