

PENYELESAIAN PERSAMAAN LANE-EMDEN MENGUNAKAN KOMBINASI METODE SHEHU DAN DEKOMPOSISI ADOMIAN

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh :

ANNISA AGUSTINA
11850422193



UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2022**

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERSETUJUAN

PENYELESAIAN PERSAMAAN LANE-EMDEN MENGUNAKAN KOMBINASI METODE SHEHU DAN DEKOMPOSISI ADOMIAN

TUGAS AKHIR

oleh:

ANNISA AGUSTINA
11850422193

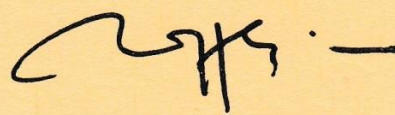
Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 14 Juli 2022

Ketua Program Studi



Wartono, M.Sc.
NIP. 19730818 200604 1 003

Pembimbing



Wartono, M.Sc.
NIP. 19730818 200604 1 003

LEMBAR PENGESAHAN

PENYELESAIAN PERSAMAAN LANE-EMDEN MENGUNAKAN KOMBINASI METODE SHEHU DAN DEKOMPOSISI ADOMIAN

TUGAS AKHIR

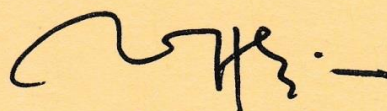
oleh:

ANNISA AGUSTINA
11850422193

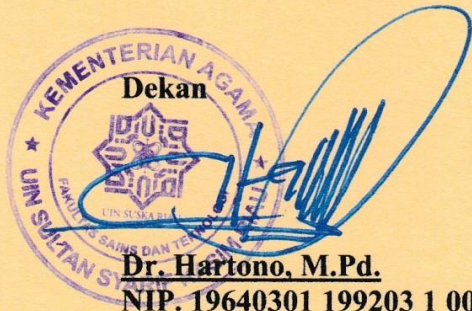
Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 14 Juli 2022

Pekanbaru, 14 Juli 2022
Mengesahkan

Ketua Program Studi



Wartono, M.Sc.
NIP. 19730818 200604 1 003



Dekan
Dr. Hartono, M.Pd.
NIP. 19640301 199203 1 003

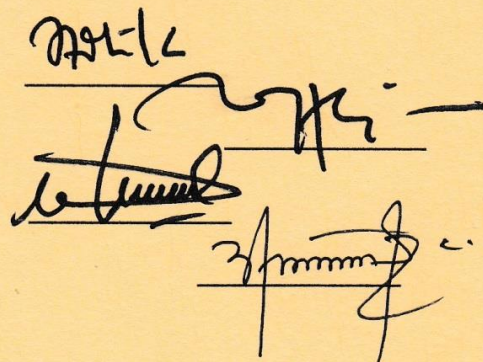
DEWAN PENGUJI :

Ketua : Ari Pani Desvina, M.Sc.

Sekretaris : Wartono, M.Sc.

Anggota I : Mohammad Soleh, M.Sc.

Anggota II : Irma Suryani, M.Sc.





Lampiran Surat :

Nomor : Nomor 25/2021
 Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini :

Nama : Annisa Agustina
 NIM : 11850422193
 Tempat/ Tgl. Lahir : Ujungbatu, 24 Agustus 1999
 Fakultas/Pascasarjana : Sains dan Teknologi
 Prodi : Matematika
 Judul Disertasi/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya*:

**PENYELESAIAN PERSAMAAN LANE-EMDEN MENGGUNAKAN KOMBINASI
 METODE SHEHU DAN DEKOMPOSISI ADOMIAN**

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan ~~Disertai/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya*~~ dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu ~~Disertasi/Thesis/Skripsi/Karya Ilmiah lainnya*~~ saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan ~~Disertasi/Thesis/Skripsi/(Karya Ilmiah lainnya)*~~ saya tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan peraturan perundang-undangan.

Demikian Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 14 Juli 2022
 Yang membuat pernyataan



ANNISA AGUSTINA
 NIM : 11850422193

* pilih salah salah satu sesuai jenis karya tulis

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

a. Penguipaan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 b. Penguipaan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang menyalin atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari penerbit.

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang menyalin atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari penerbit.

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang menyalin atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari penerbit.



LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 14 Juli 2022

Yang membuat pernyataan,



Annisa Agustina
NIM. 11850422193

UIN SUSKA RIAU

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirrabil 'alamin

Saya ucapkan puji dan syukur kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas rahmat, nikmat dan kasih sayang-Nya sehingga saya dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Shalawat dan salam tak lupa semoga selalu terlimpahkan Kepada utusan Allah yakni Nabi Muhammad Shallallahu'Alaihi Wasallam

~Omak, Ayah, Kakak, dan Adikku Tersayang~

Teruntuk Ibu Ahmiwati dan Bapak Syahril kupersembahkan sebuah karya kecil ini untukmu sebagai tanda baktiku dan terima kasihku untuk semua cinta, pengorbanan dan do'a yang selalu engkau hadiahkan untukku sehingga Aku selalu kuat dan bersemangat dalam menjalani banyaknya ujian di hidupku, tak lupa pula kakak serta adikku Nur'aini Novisyah dan Fatimah Az-zahra Okta yang selalu memberikan semangat.

~Dosen pembimbingku~

Kepada Bapak Wartono, M.Sc selaku dosen pembimbing Tugas Akhir serta Kepada Bapak M. Marizal, M.Sc selaku dosen pembimbing akademisku. Terima kasih banyak karena membimbingku selama ini, serta menasehati dan mengarahkanku untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.

~Seluruh Dosen dan Pegawai Fakultas Sains dan Teknologi~

Tugas akhir ini sebagai wujud rasa terimakasihku kepada Bapak dan Ibu Dosen atas segala ilmu yang telah diberikan dan tidak lupa kepada seluruh pegawai Fakultas Sains dan Teknologi yang telah banyak membantuku selama aku berkuliah dikampus ini.

~Teman-teman dan Penyemangatku~

Terimakasih teruntuk Regina Ananda, Anneke De Resta, Khotimah, Diani Nuri Putri, Adinda Siti Nurjanah, Sri Eka Wahyuni, Dhea Dinanti, Dena Fadhliati, Rina Febriana, Silvi Afifah Fajri, Wildan Nurhidayat, Alfitra Martino, Arif Maisan, Isra Mahendra, Pioma'18, POBJ, serta Kim Taehyung BTS yang selalu membantuku, menemaniku, serta memberikan semangat.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

PENYELESAIAN PERSAMAAN LANE-EMDEN MENGUNAKAN KOMBINASI METODE SHEHU DAN DEKOMPOSISI ADOMIAN

ANNISA AGUSTINA
NIM. 11850422193

Tanggal Sidang : 14 Juli 2022
Tanggal Wisuda : 2023

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Metode Transformasi Shehu Dekomposisi (STDM) merupakan gabungan metode semi analitik diantara metode transformasi Shehu dan Dekomposisi Adomian. Penggabungan kedua metode tersebut dilakukan untuk mendapatkan metode yang lebih baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier. Tugas akhir ini membahas penyelesaian persamaan diferensial Lane Emden menggunakan kombinasi metode Transformasi Shehu dan Dekomposisi Adomian. Penyelesaian persamaan diferensial nonlinier dikonstruksi dalam bentuk deret polinomial. Simulasi numerik diberikan untuk menguji performansi metode tersebut dengan menggunakan dua persoalan nilai awal. Nilai-nilai penyelesaian hampiran di plot dalam bentuk grafik dan dibandingkan dengan solusi eksak. Pada hasil kajian menunjukkan bahwa metode tersebut dapat menyelesaikan persamaan diferensial Lane Emden.

Kata Kunci: Metode transformasi Shehu, Metode Dekomposisi Adomian, Persamaan diferensial Lane Emden, Simulasi Numerik.

UIN SUSKA RIAU



1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

SOLUTION OF THE LANE-EMDEN EQUATION USING COMBINATION OF THE SHEHU AND ADOMIAN DECOMPOSITION METHODS

ANNISA AGUSTINA
NIM: 11850422193

Date of Final Exam : July, 14th 2022
Date of Graduation : 2023

Mathematics Program Study
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

The Shehu Decomposition Transformation (STDM) method is a combination of semi-analytic methods between the Shehu transformation and Adomian decomposition methods. The combination of the two methods was carried out to obtain a better method for solving nonlinear differential equations. This final project discusses the solution of the Lane Emden differential equation using a combination of the Shehu Transform and Adomian Decomposition methods. The solution to nonlinear differential equations is constructed in the form of a polynomial series. Numerical simulation is given to test the performance of the method by using two initial value problems. The values of the approximation solutions are plotted in graphical form and compared with the exact solutions. The results of the study show that this method can solve the Lane Emden differential equation.

Keywords: *Shehu transformation method, Adomian decomposition method, Lane Emden differential equation, Numerical simulation.*

UIN SUSKA RIAU



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh...

Alhamdulillahirabbil 'Alamiin. Segala Puji Syukur kehadiran Allah Subhanahu Wa Ta'ala yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul “Penyelesaian Persamaan Lane-Emden Menggunakan Kombinasi Metode Shehu Dan Dekomposisi Adomian”. Serta tak lupa pula penulis haturkan shalawat beriringkan salam kepada junjungan alam yakni Nabi Muhammad Shalallahu ‘Alaihi Wassalam yang telah membawa kita dari zaman jahiliah menuju zaman yang sekarang ini zaman yang penuh dengan ilmu pengetahuan.

Penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini tidak terlepas dari berbagai pihak yang telah mendukung, memotivasi, menasehati serta membimbing. Oleh sebab itu penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebanyak-banyaknya kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc, selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, penasihat akademik penulis serta pembimbing Tugas Akhir penulis yang selalu memberikan nasihat, arahan dalam perkuliahan serta selalu memberikan arahan agar Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan sebaik mungkin.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc., selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc. dan Ibu Irma Suryani, S.Si, M.Sc. selaku Penguji yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga Tugas Akhir ini dapat diselesaikan.
6. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

7. Kedua orang tuaku, Bapak Syahril dan Ibu Ahmiwati serta kakakku Nur'aini Novisyah dan adikku Fatimah Az-zahra Okta, yang senantiasa melimpahkan kasih sayang, perhatian dan materi yang tak terhingga.
8. Untuk Teman-temanku Regina Ananda, Diani Nuri Putri, Khotimah, Sri Eka Wahyuni, Adinda Siti Nurjannah, Anneke De Resta, Dhea Dinanti, Arifah Chumairah, Asra Rahmi. Khairil Ikhsan, Arif Maisan, Isra Mahendra, Rohaini, Dena Fadhliati, Rina Febriana, Alfitra Martino dan Wildan Nurhidayat.
8. Untuk sahabat dan teman-teman seperjuangan di Jurusan Matematika.
9. Semua pihak yang telah membantu penulis secara langsung maupun tidak langsung yang selalu memberikan nasihat-nasihat kepada penulis yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari dalam penulisan Tugas Akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Maka dari itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari pembaca demi kesempurnaan Tugas Akhir ini lebih baik lagi untuk kedepannya. Semoga Tugas Akhir ini dapat menjadi manfaat bagi setiap pihak terutama para pembaca. Aamiin Yaa Rabbal 'Alamiin.

Wasalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 14 Juli 2022

Annisa Agustina

UIN SUSKA RIAU



DAFTAR ISI

LEMBAR PERSETUJUAN	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL	iv
LEMBAR PERNYATAAN	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR SIMBOL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR TABEL	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan Penelitian.....	2
1.5 Manfaat Penelitian.....	2
1.6 Sistematika Penulisan.....	3
BAB II LANDASAN TEORI	4
2.1 Persamaan Diferensial	4
2.2 Persamaan Diferensial Lane-Emden	7
2.3 Transformasi Shehu.....	7
2.1 Dekomposisi Adomian	10
2.2 Metode Transformasi Shehu Dekomposisi	12
BAB III METODE PENELITIAN	15
BAB IV PEMBAHASAN	16
4.1 Persamaan Lane-Emden dengan <i>STDM</i>	16
4.2 Simulasi Numerik.....	18

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB V PENUTUP	28
5.1 Kesimpulan.....	28
5.2 Saran	28
DAFTAR PUSTAKA	29
DAFTAR RIWAYAT HIDUP	31

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.





Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR SIMBOL

y''	: Persamaan diferensial biasa orde dua
y'	: Persamaan diferensial biasa orde satu
$\frac{2}{x}, \alpha, a$: Konstanta
x, y	: Variabel bebas dan variabel terikat
$f(x, y)$: Fungsi variabel x
$\hat{S}[\]$: Transformasi Shehu
$\hat{S}^{-1}[\]$: Invers transformasi Shehu
s, u	: Variabel dalam transformasi Shehu (menurut definisi)
y	: Solusi khusus
y^n	: Nilai Hampiran
n, k	: Batas interval
A_n	: Polinomial Adomian
$v(t)$: Fungsi pada transformasi Shehu (menurut definisi)
N	: Operator nonlinier
L	: Operator diferensial linier

UIN SUSKA RIAU

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4. 1 Grafik Penyelesaian $y'' + \frac{2}{x}y' + y^0$	19
Gambar 4. 2 Perbandingan kurva $y(x)$, $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$, dan $P_7(x)$ dari Persamaan $y'' + \frac{2}{x}y' + y^5 = 0$	23
Gambar 4. 3 Perbandingan kurva $y(x)$, $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$, dan $P_7(x)$ dari Persamaan $y'' + \frac{2}{x}y' + e^y = 0$	26



UIN SUSKA RIAU

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1 Beberapa sifat penting dari transformasi Shehu.....	9
---	----------



- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial berdasarkan banyak variabel bebasnya dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya melibatkan satu variabel bebas. Persamaan Lane-Emden merupakan contoh dari persamaan diferensial biasa. Persamaan ini digunakan untuk memodelkan beberapa fenomena dalam fisika matematika dan astrofisika seperti teori struktur bintang, perilaku termal awan gas bulat, bola gas isothermal, dan teori arus temionik [1,2].

Persamaan diferensial Lane-Emden merupakan jenis persamaan diferensial biasa nonlinear yang berorde dua. Persamaan diferensial Lane-Emden dipelajari pertama kali oleh ahli fisika bernama Robert Emden pada tahun 1907 dengan bentuk sebagai berikut:

$$y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + f(x, y) = g(x), \quad 0 < x \leq 1, \quad \alpha \geq 0, \quad (1.1)$$

dengan kondisi awal $y(0) = A$, $y'(0) = B$, $f(x, y)$ adalah fungsi kontinu bilangan riil dan $g(x) \in C[0,1]$ [3].

Para peneliti telah membahas bagaimana cara menyelesaikan persamaan diferensial Lane-Emden dengan menggunakan beberapa metode, diantaranya adalah metode transformasi diferensial [4,5]. Selanjutnya menggunakan metode transformasi Adomian [6]. Dan menggunakan metode Simetri Lie [7].

Dalam penelitian ini penulis menggunakan kombinasi metode Transformasi Shehu dan Dekomposisi Adomian yaitu Shehu transform decomposition methods (STDM) untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial Lane-Emden. Metode STDM pertama kali diusulkan oleh Ziane, et al [8]. Berdasarkan hasil penelitiannya, diperoleh bahwa STDM dapat diterapkan pada persamaan diferensial parsial nonlinier dan persamaan diferensial orde yang lebih tinggi, karena efisiensi dan fleksibilitasnya.



Hal ini yang menjadi dasar penulis mengangkat judul “**Penyelesaian Persamaan Lane-Emden menggunakan Kombinasi Metode Shehu dan Dekomposisi Adomian**”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah menentukan penyelesaian persamaan Lane-Emden $y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + f(x, y) = g(x)$ dengan kondisi $y(0) = A$, $y'(0) = B$, menggunakan kombinasi metode transformasi Shehu dan Dekomposisi Adomian.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah menentukan penyelesaian persamaan Lane-Emden $y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + f(x, y) = g(x)$ dengan kondisi $y(0) = A$, $y'(0) = B$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian yang ingin dicapai adalah untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial Lane-Emden $y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + f(x, y) = g(x)$ dengan kondisi $y(0) = A$, $y'(0) = B$, menggunakan kombinasi metode transformasi Shehu dan Dekomposisi Adomian

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Dapat menyelesaikan secara eksplisit, persamaan diferensial Lane-Emden $y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + f(x, y) = g(x)$ dengan kondisi $y(0) = A$, $y'(0) = B$, Menggunakan kombinasi metode transformasi Shehu dan Dekomposisi Adomian.
2. Membuktikan bahwa kombinasi dari metode transformasi Shehu dan Dekomposisi Adomian akurat dan cukup efektif dalam menyelesaikan persamaan diferensial Lane-Emden.

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penelitian Tugas Akhir ini terdiri dari inti permasalahan yang akan diuraikan menjadi beberapa bagian, sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini membahas tentang gambaran umum inti tugas akhir yang terdiri dari latar belakang masalah yang akan dibahas, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang teori-teori yang berkaitan dengan persamaan diferensial, persamaan Lane-Emden, Transformasi Shehu, Dekomposisi Adomian, metode Transformasi Shehu Dekomposisi

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini berisikan langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan tugas akhir.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi tentang penyelesaian dan pembahasan masalah.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil pembahasan yang telah dilakukan pada Bab IV dan saran dari penulis.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial

Dalam subbab ini, Persamaan diferensial dibahas berdasarkan acuan dari buku [9] dan Ross [10]. Persamaan diferensial yang akan dibahas antara lain definisi serta contoh persamaan diferensial, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, orde dari persamaan diferensial, dan persamaan diferensial linier atau nonlinier.

Definisi 2.1 [10] (Persamaan diferensial)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Contoh 2.1

Persamaan berikut merupakan contoh persamaan diferensial:

$$\frac{dy}{dx} = -4x + 10, \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -40t, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad (2.4)$$

Persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua berdasarkan jumlah variabel bebas yang terlibat, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.



1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Definisi 2.2 [10] (Persamaan diferensial biasa)

Persamaan diferensial biasa yaitu suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Contoh 2.2

Persamaan (2.1) di atas merupakan persamaan diferensial biasa dengan variabel bebasnya adalah x dan variabel terikatnya adalah y . Persamaan (2.2) juga merupakan persamaan diferensial biasa, yang mana variabel bebasnya adalah t dan variabel terikatnya adalah y .

Definisi 2.3 [10] (Persamaan diferensial Parsial)

Persamaan diferensial parsial yaitu suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Contoh 2.3

Persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial dimana u merupakan variabel terikat dan y, t adalah variabel bebasnya. Persamaan (2.4) juga merupakan persamaan diferensial parsial, dengan u adalah variabel terikat dan x, y, z adalah variabel bebasnya.

Definisi 2.4 [10] (Orde dari persamaan diferensial)

Orde suatu persamaan diferensial didefinisikan sebagai orde tertinggi dari turunan yang terkandung dalam persamaan diferensial tersebut. Secara umum persamaan diferensial dituliskan dalam bentuk:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) adalah persamaan diferensial orde ke- n . Persamaan (2.5) merepresentasikan relasi antara peubah tak bebas x .



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Contoh 2.4

Persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial biasa berorde satu dan Persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial biasa berorde 2. Sedangkan, Persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial parsial berorde empat dan Persamaan (2.4) adalah persamaan diferensial parsial berorde dua.

Definisi 2.5 [10] (Persamaan diferensial biasa linier)

Suatu Persamaan (2.5) disebut linier jika fungsi F adalah suatu fungsi linier dari variabel $y, y', \dots, y^{(n)}$. Persamaan diferensial biasa berorde n , berbentuk sebagai berikut:

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x), \quad (2.6)$$

dengan a_0 tidak sama dengan nol.

Contoh 2.5

Persamaan (2.1) dan (2.2) merupakan persamaan diferensial biasa, dapat ditinjau bahwa dua persamaan tersebut memiliki variabel bebas dan turunan-turunannya berpangkat satu, tidak ada perkalian antara turunan dan variabel terikatnya, serta tidak ada bentuk nonlinear dari turunan dan variabel terikatnya.

Definisi 2.6 [9] (Persamaan diferensial biasa nonlinear)

Suatu persamaan diferensial biasa, bisa dikatakan nonlinear jika persamaan diferensial biasa tersebut tidak linear.

Contoh 2.6

Berikut ini adalah beberapa contoh persamaan diferensial biasa nonlinear:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 6y = 0, \quad (2.7)$$

$$4y \frac{dy}{dx} + xy = 0. \quad (2.8)$$



1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.2 Persamaan Diferensial Lane-Emden

Berdasarkan [11], persamaan Lane-Emden dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + f(y) = 0, \tag{2.9}$$

dengan $y(0) = y_0, y'(0) = 0$, dan $f(y)$ adalah fungsi kontinu.

Contoh lain bentuk persamaan $f(y) = y^m, f(y) = (y^2 - C)^{3/2}, f(y) = e^y, f(y) = e^{-y}, f(y) = \pm \sin y, f(y) = \pm \cos y, f(y) = \pm \sinh y$, atau $f(y) = \pm \cosh y$ [12].

Berdasarkan bentuknya, persamaan diferensial Lane-Emden pada Persamaan (2.9) mempunyai penyelesaian untuk x disekitaran $x = 0$. Oleh karena itu maka diberikan syarat $y(0) = y_0$ dan $y'(0) = 0$, y_0 adalah konstanta. Persamaan (2.9) dibatasi pada interval $[0,1]$ dan nilai $f(y)$ dapat dibentuk menjadi $f(x, y)$.

Persamaan (2.9) dapat juga dibentuk nilai $g(x)$ kontinu pada $0 < x \leq 1$, Persamaan diferensial Lane-Emden yang akan diselesaikan dalam Tugas Akhir ini berbentuk :

$$y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + f(x, y) = g(x). \quad 0 < x \leq 1, \alpha \geq 0. \tag{2.10}$$

dengan syarat

$$y(0) = A \text{ dan } y'(0) = B.$$

Pada Persamaan (2.10) pada ruas kanan terdapat fungsi terhadap x , yaitu $g(x)$ sehingga terlihat bentuk Persamaan (2.10) merupakan persamaan diferensial Lane-Emden nonhomogen.

2.3 Transformasi Shehu

Transformasi Shehu merupakan generalisasi dari Laplace dan transformasi integral sumudu yang digunakan untuk menyelesaikan masalah persamaan diferensial dalam waktu yang singkat. Transformasi Shehu berhasil diturunkan dari kelas transformasi integral Fourier Sical dan dapat diterapkan pada persamaan

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Metode ini pertama kali diperkenalkan oleh Shehu Maitama dan Weidong Zhao [13].

Pada bagian ini kita mendefinisikan transformasi Shehu dan memberikan sifat-sifat pentingnya [13].

Definisi 2.7 Transformasi Shehu dari fungsi $v(t)$ dengan orde eksponensial didefinisikan pada himpunan fungsi:

$$A = \left\{ v(t) : \exists N, k_1, k_2 > 0, |v(t)| < N \exp\left(\frac{|t|}{k_i}\right), \text{ jika } t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\}, \quad (2.11)$$

dengan integral berikut

$$\begin{aligned} \hat{S}[v(t)] &= [V(s, u)] = \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-st}{u}\right) v(t) dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} \exp\left(\frac{-st}{u}\right) v(t) dt, \quad s > 0, u > 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Konvergen jika limit integralnya ada, dan divergen jika tidak ada.

Invers Transformasi Shehu diberikan sebagai:

$$\hat{S}^{-1}[V(s, u)] = v(t), \text{ untuk } t \geq 0, \quad (2.13)$$

setara

$$v(t) = \hat{S}^{-1}[V(s, u)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{1}{u} \exp\left(\frac{st}{u}\right) V(s, u) ds, \quad (2.14)$$

dengan s dan u adalah variabel Transformasi Shehu, dan α adalah konstanta nyata dan integral dalam Persamaan (2.14) yang diambil sepanjang $s = \alpha$ dalam bidang kompleks $s = x + iy$.

Teorema 2.1 (Kondisi yang cukup untuk keberadaan transformasi Shehu [13]). Jika fungsi $v(t)$ adalah sepotong-sepotong kontinu di setiap batas interval

$0 \leq t \leq \beta$ dan order eksponensial α untuk $t > \beta$. Kemudian transformasi Shehunya $V(s, u)$ ada.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Teorema 2.2 (Turunan dari transformasi Shehu [13]). Jika fungsi $v^{(n)}(t)$ adalah turunan ke n dari fungsi $v(t) \in A$ terhadap t maka transformasi Shehu-nya didefinisikan sebagai

$$\hat{S}[v^{(n)}(t)] = \frac{s^n}{u^n} V(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{n-(k+1)} v^{(k)}(0). \tag{2.15}$$

Ambil $n = 1, 2$ dan 3 pada persamaan (2.15), diperoleh turunan berikut sehubungan dengan t :

$$\hat{S}[v'(t)] = \frac{s}{u} V(s, u) - v(0). \tag{2.16}$$

$$\hat{S}[v''(t)] = \frac{s^2}{u^2} V(s, u) - \frac{s}{u} v(0) - v'(0). \tag{2.17}$$

$$\hat{S}[v'''(t)] = \frac{s^3}{u^3} V(s, u) - \frac{s^2}{u^2} v(0) - \frac{s}{u} v'(0) - v''(0). \tag{2.18}$$

Sifat-sifat penting dari transformasi ini [13].

1. Linearitas: $\hat{S}[(\alpha v(t) + \beta w(t))] = \alpha \hat{S}[v(t)] + \beta \hat{S}[w(t)]$.
2. Perubahan skala: $\hat{S}[(v(\beta t))] = \frac{u}{\beta} V\left(\frac{s}{\beta}, u\right)$.

Sifat lain diberikan dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Beberapa sifat penting dari transformasi Shehu

$v(t)$	$\hat{S}[v(t)]$	$v(t)$	$\hat{S}[v(t)]$
1	$\frac{u}{s}$	$\sin at$	$\frac{au^2}{s^2 + a^2u^2}$
t	$\frac{u^2}{s^2}$	$\cos at$	$\frac{us}{s^2 + a^2u^2}$
$\frac{t^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$	$\left(\frac{u}{s}\right)^{n+1}$	$\sinh at$	$\frac{au^2}{s^2 - a^2u^2}$
$\frac{t^n \exp(at)}{n!}$	$\frac{u^{n+1}}{(s - au)^{n+1}}$	$\cosh at$	$\frac{us}{s^2 - a^2u^2}$

Contoh 2.7 Tentukan penyelesaian persamaan diferensial biasa orde dua berikut



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 1. \tag{2.19}$$

Berdasarkan kondisi awal

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy(0)}{dx} = 0. \tag{2.20}$$

Aplikasikan transformasi Shehu dikedua sisi persamaan, sehingga didapatkan:

$$\frac{s^2}{u^2} Y(s, u) - \frac{s}{u} y(0) - y'(0) + \frac{s}{u} Y(s, u) - y(0) = \frac{u}{s}. \tag{2.21}$$

Lalu substitusikan kondisi awal dan sederhanakan, sehingga didapatkan:

$$y(x) = -\frac{u}{s} + \frac{u^2}{s^2} + \frac{u}{s + u}. \tag{2.22}$$

Lakukan invers transformasi Shehu pada persamaan sehingga diperoleh hasil

$$y(x) = -1 + x + \exp(-x). \tag{2.23}$$

2.4 Dekomposisi Adomian

Metode Dekomposisi Adomian dikemukakan oleh seorang ahli ilmu matematika dari Amerika yaitu George Adomian (1922-1996). Pada metode ini, persamaan diferensial yang diberikan ditulis dalam bentuk persamaan operator [14].

Diberikan persamaan diferensial yang dinotasikan dalam persamaan operator:

$$Ly + Ry + Ny = G, \tag{2.24}$$

dengan N adalah operator nonlinier dan L adalah operator diferensial linier orde lebih tinggi R yang diasumsikan dapat dibalik (*invertible*), R adalah operator diferensial linier dari orde yang kurang dari L dan G adalah suku nonhomogen.

Persamaan (2.24) dapat ditulis kembali menjadi

$$Ly = G - Ry - Ny. \tag{2.25}$$

Selanjutnya jika persamaan (2.25) menggunakan operator L^{-1} , maka diperoleh

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$y = h + L^{-1}(G) - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny, \quad (2.26)$$

dengan h adalah solusi persamaan homogen $Ly = 0$ dengan nilai awal atau nilai batas yang diketahui. Kemudian Adomian mendefinisikan solusi y sebagai jumlahan deret tak hingga yaitu

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n. \quad (2.27)$$

Masalah lebih lanjut adalah pada dekomposisi suku nonlinier Ny , Adomian mendefinisikan sebagai berikut

$$Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (2.28)$$

dengan

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \sum_{k=0}^{\infty} y_k \lambda^k \right]_{\lambda=0}.$$

Selanjutnya komponen A_n disebut polinomial Adomian, didefinisikan sebagai [15]:

$$A_0 = N(y_0),$$

$$A_1 = u_1 N'(y_0),$$

$$A_2 = u_2 N'(y_0) + \frac{u_1^2}{2} N''(y_0),$$

$$A_3 = u_3 N'(y_0) + u_1 u_2 N''(y_0) + \frac{u_1^3}{3!} N'''(y_0),$$

⋮

Berdasarkan uraian A_n , diperoleh A_0 , bergantung pada u_0 , A_1 bergantung pada u_0 dan u_1 , A_2 bergantung pada u_0, u_1 dan u_2 , dan seterusnya. Selanjutnya substitusikan persamaan (2.26) dan persamaan (2.27) ke persamaan (2.28), diperoleh solusi dari u sebagai berikut:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (2.29)$$

Berdasarkan persamaan (2.33) diperoleh relasi rekursif sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_0 &= h + L^{-1}(G), \\ u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ u_3 &= -L^{-1}Ru_2 - L^{-1}A_2, \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \quad [16]. \end{aligned}$$

2.5 Metode Transformasi Shehu Dekomposisi

Metode Transformasi Shehu Dekomposisi (STDM) merupakan gabungan dua metode yang kuat yaitu metode dekomposisi Adomian dan metode transformasi Shehu. Penggabungan kedua metode tersebut dilakukan untuk mendapatkan metode yang lebih baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier [8].

Untuk mengilustrasikan ide dasar metode ini, dipertimbangkan persamaan diferensial biasa nonlinier orde $ke - n$ dengan bentuk umum

$$y^n + Ry + Ny = g(x), \quad (2.30)$$

dengan y^n adalah turunan dari fungsi y , R adalah konstanta, serta $Ny = f(y)$ mewakili operator diferensial nonliniernya, dan $g(x)$ adalah fungsi terhadap x . dengan menerapkan transformasi Shehu pada kedua sisi Persamaan (2.30), didapatkan

$$\hat{S}[y^n] + \hat{S}[Ry + Ny] = \hat{S}[g(x)]. \quad (2.31)$$

Berdasarkan sifat-sifat transformasi Shehu, di peroleh

$$\frac{s^m}{u^m} Y(s, u) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{m-(k+1)} y^{(k)}(0) + \hat{S}[g(x)] - \hat{S}[Ry + Ny] \quad (2.32)$$

dengan $m = 1, 2, 3$.

Dengan demikian, di peroleh



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$Y(s, u) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{m-(k+1)} y^{(k)}(0) + \frac{u^m}{s^m} \hat{S}[g(x)] - \frac{u^m}{s^m} \hat{S}[Ry + Ny]. \quad (2.33)$$

Operasikan invers transformasi Shehu pada kedua sisi Persamaan (2.33), di peroleh

$$Y(x) = G(x) - \hat{S}^{-1} \left(\frac{u^m}{s^m} \hat{S}[Ry + Ny] \right), \quad (2.34)$$

dengan $G(x)$, mewakili suku yang muncul dari fungsi terhadap x dan kondisi awal yang ditentukan.

Langkah kedua dalam metode Transformasi Shehu Dekomposisi, adalah solusi sebagai tak terbatas seri yang diberikan di bawah ini

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \quad (2.35)$$

dan istilah nonlinier dapat didekomposisi sebagai:

$$Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (2.36)$$

dengan A_n adalah polinomial Adomian [17] dari $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ dan dapat dihitung dengan rumus:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

Substitusi Persamaan (2.35) dan Persamaan (2.36) pada Persamaan (2.34) , diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = G(x) - \hat{S}^{-1} \left[\frac{u^m}{s^m} \hat{S} \left[R \sum_{n=0}^{\infty} y_n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \right] \quad (2.38)$$

Membandingkan kedua ruas persamaan (2.38), maka diperoleh

$$\begin{aligned} y_0 &= G(x), \\ y_1 &= -\hat{S}^{-1} \left[\frac{u^m}{s^m} \hat{S}[Ry_0 + A_0] \right], \\ y_2 &= -\hat{S}^{-1} \left[\frac{u^m}{s^m} \hat{S}[Ry_1 + A_1] \right], \\ y_3 &= -\hat{S}^{-1} \left[\frac{u^m}{s^m} \hat{S}[Ry_2 + A_2] \right], \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.39)$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Secara umum, hubungan rekursif diberikan sebagai:

$$y_{n+1} = -\hat{S}^{-1} \left[\frac{u^m}{s^m} \hat{S}[Ry_n + A_n] \right], \quad (2.40)$$

dengan $m = 1, 2, 3$, dan $n \geq 0$.

Akhirnya, kami memperkirakan solusi analitik y dengan:

$$y = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N y_n, \quad (2.41)$$

solusi deret di atas umumnya konvergen dengan sangat cepat [18].



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada Bab ini, metode yang digunakan untuk mendapatkan penyelesaian Tugas Akhir (TA) adalah metode studi kepustakaan dengan cara mengumpulkan data dan informasi-informasi yang berasal dari sumber buku, jurnal, dan artikel yang membahas tentang masalah yang ingin diteliti.

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam metode penelitian ini adalah:

1. Persamaan Lane-Emden berdasarkan [3], dengan persamaan umumnya:
$$y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + f(x, y) = g(x), \quad 0 < x \leq 1, \alpha \geq 0,$$
 dengan kondisi $y(0) = A, y'(0) = B$.
2. Menentukan nilai $f(x, y)$ pada persamaan Lane-Emden.
3. Selanjutnya substitusikan $f(x, y)$ kedalam persamaan Lane-Emden
4. Mengubah Persamaan (1.1) ke dalam bentuk transformasi Shehu menggunakan aturan-aturan yang berlaku pada transformasi Shehu.
5. Lakukan invers transformasi Shehu pada Persamaan (1.1).
6. Selanjutnya aplikasikan kedalam metode Dekomposisi Adomian
7. Selanjutnya mencari nilai $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ dengan $n = 1, 2, 3, \dots$
8. Menjumlahkan nilai $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ dengan $n = 1, 2, 3, \dots$, sehingga diperoleh solusi eksak dari persamaan Lane-Emden

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan Pembahasan pada Bab IV, diperoleh kesimpulan bahwa metode Transformasi Shehu dan Dekomposisi Adomian dapat menyelesaikan persamaan Lane Emden $y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + f(x, y) = g(x)$, $0 < x \leq 1$, $\alpha \geq 0$, dengan kondisi $y(0) = A$, $y'(0) = B$. Hasil yang didapatkan dengan menggunakan metode *STDM* ini semakin mendekati solusi eksak. Dapat dibuktikan pada Gambar 4.2 untuk Contoh 4.2, dan Gambar 4.3 untuk Contoh 4.3, semakin banyak jumlah suku-suku $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots$ yang digunakan maka hasilnya akan semakin mendekati solusi eksak.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini, penulis membahas mengenai penyelesaian persamaan Lane Emden $y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + f(x, y) = g(x)$, $0 < x \leq 1$, $\alpha \geq 0$, dengan kondisi $y(0) = A$, $y'(0) = B$, dengan menggunakan metode Transformasi Shehu dan Dekomposisi Adomian. Bagi pembaca yang ingin melanjutkan Tugas Akhir ini, disarankan untuk membahas tentang persamaan diferensial nonlinier yang lain dengan metode yang sama atau membahas tentang persamaan yang sama dengan metode yang berbeda.



DAFTAR PUSTAKA

- [1] P. P. Eggleton, "Chandrasekhar ' s book An Introduction to the Study of Stellar Structure," *Pramana - Journal of Physics*, vol. 77, no. 1, pp. 97–105, 2011.
- [2] O. U. Richardson, *The Emission of Electricity From Hot Bodies*. London, UK: Longmans Green and Company, 1921.
- [3] V. S. Erturk, "Differential Transformation Method For Solving Differential Equations Of Lane-Emden Type," *Mathematical and Computational Applications*, vol. 12, no. 3, pp. 135–139, 2007.
- [4] S. Mukherjee, B. Roy, and P. K. Chatterjee, "Solution of Modified Equations of Emden-Type by Differential Transform Method," *Journal of Modern Physics*, vol. 02, no. 06, pp. 559–563, 2011, doi: 10.4236/jmp.2011.26065.
- [5] Y. Khan, Z. Svoboda, and Z. Šmarda, "Solving certain classes of Lane-Emden type equations using the differential transformation method," *Advances in Difference Equations*, vol. 2012, pp. 1–11, 2012, doi: 10.1186/1687-1847-2012-174.
- [6] S. S. Motsa and S. Shateyi, "New analytic solution to the Lane-Emden equation of index 2," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2012, 2012, doi: 10.1155/2012/614796.
- [7] M. Malik, "Penyelesaian Persamaan Diferensial Lane Emden Index Nol dengan Metode Simetri Lie," vol. 03, no. 04, pp. 1–10, 2019.
- [8] D. Ziane, R. Belgacem, and A. Bokhari, "A new modified Adomian decomposition method for nonlinear partial differential equations," *Open Journal of Mathematical Analysis*, vol. 3, no. 2, pp. 81–90, 2019, doi: 10.30538/psrp-oma2019.0041.
- [9] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (Tenth Edition)*. New York, 2012.
- [10] S. L. Ross, *Differential Equations 3rd edition*. New York, 1984.
- [11] J. H. He, "Variational approach to the Lane-Emden equation," in *Applied Mathematics and Computation*, vol. 143, no. 2–3, 2003, pp. 539–541.
- [12] M. N. Sya'roni Ahmad, "Penyelesaian Persamaan Diferensial Lane-Emden menggunakan Metode Transformasi Diferensial," *jurnal unri*, vol. 16, no. 4, p. 704, 2013, doi: 10.11164/jjsps.16.4_704_3.

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

- [13] S. Maitama and W. Zhao, "New Integral Transform: Shehu Transform a Generalization of Sumudu and Laplace Transform for Solving Differential Equations," *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 1947, pp. 1–22, 2019.
- [14] M. N. Muhajir and Wartono, "Penyelesaian Persamaan Riccati Dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace," *Prosiding Seminar Nasional*, vol. 11, no. 1, pp. 377–383, 2012.
- [15] M. Abdy, S. Side, and R. Arisandi, "Penerapan Metode Dekomposisi Adomian Laplace Dalam Menentukan Solusi Persamaan Panas," *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, vol. 1, no. 2, p. 206, 2019, doi: 10.35580/jmathcos.v1i2.9243.
- [16] E. Sari, W.F.Deswita, L., & Lily, "Modifikasi Metode Dekomposisi Adomian Untuk Menyelesaikan Persamaan Gelombang Nonlinier," *Binawidya Pekanbaru*, vol. 1947, no. 4, pp. 1–22, 2019, doi: 10.28924/2291-8639-17-2019-167.
- [17] Y. Zhu, Q. Chang, and S. Wu, "A new algorithm for calculating Adomian polynomials," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 169, no. 1, pp. 402–416, 2005, doi: 10.1016/j.amc.2004.09.082.
- [18] M. M. Hosseini and H. Nasabzadeh, "On the convergence of Adomian decomposition method," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 182, no. 1, pp. 536–543, 2006, doi: 10.1016/j.amc.2006.04.015.
- [19] A. Nazari-golshan, S. S. Nourazar, H. Ghafoori-fard, and A. Yildirim, "A modified homotopy perturbation method coupled with the Fourier transform for nonlinear and singular Lane – Emden equations," *Applied Mathematics Letters*, vol. 26, no. 10, pp. 1018–1025, 2013, doi: 10.1016/j.aml.2013.05.010.
- [20] A. M. Wazwaz, R. Rach, and J. S. Duan, "Adomian decomposition method for solving the Volterra integral form of the Lane-Emden equations with initial values and boundary conditions," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, no. 10, pp. 5004–5019, 2013, doi: 10.1016/j.amc.2012.11.012.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan di Kecamatan Ujungbatu, Provinsi Riau pada tanggal 24 Agustus 1999 dari ayah bernama Syahrial dan ibu bernama Ahmiwati. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara. Penulis menyelesaikan pendidikan formal pendidikan Sekolah Dasar di SDN 010 Ujungbatu, lulus pada tahun 2012, selanjutnya melanjutkan pendidikan ke MTsN 2 Rokan Hulu, lulus pada tahun 2015. Setelah itu penulis melanjutkan pendidikan ke SMAN 1 Ujungbatu, lulus pada tahun 2018. Kemudian pada tahun 2018 melanjutkan studi ke Universitas Negeri Sultan Syarif Kasim Riau Fakultas Sains dan Teknologi Program Studi Matematika.

Pada Tahun 2021 penulis menyelesaikan Kerja Praktek (KP) dengan judul laporan **“Orde Konvergensi Modifikasi Metode Weerakoon-Fernando Dan Homeier Dengan Parameter Riil Menggunakan Rataan Kontra Harmonik”** dibawah bimbingan Bapak Wartono, M. Sc. Yang diseminarkan pada tanggal 30 Juni 2021. Tahun 2021 penulis juga mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Ujungbatu Timur Kecamatan Ujungbatu Kabupaten Rokan Hulu.

Penulis dinyatakan lulus ujian sarjana pada tanggal 14 Juli 2022 dengan judul Tugas Akhir **“Penyelesaian Persamaan Lane Emden Menggunakan Kombinasi Metode Shehu dan Dekomposisi Adomian”** dengan dosen pembimbing Bapak Wartono, M.Sc.