PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ABELIAN MENGGUNAKAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh :

<u>ELSY NAZIRA</u>
11750425002

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2022

LEMBAR PERSETUJUAN

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ABELIAN MENGGUNAKAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL

TUGAS AKHIR

oleh:

ELSY NAZIRA
11750425002

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 9 Juni 2022

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

LEMBAR PENGESAHAN

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ABELIAN MENGGUNAKAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL

TUGAS AKHIR

oleh:

ELSY NAZIRA
11750425002

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 9 Juni 2022

Pekanbaru, 9 Juni 2022
Mengesahkan

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua : **Corry Corazon Marzuki, M.Si.**

Sekretaris : **Wartono, M.Sc.**

Anggota I : **Mohammad Soleh, M.Sc.**

Anggota II : **Irma Suryani, M.Sc.**

Lampiran Surat :
Nomor : Nomor 25/2021
Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Elsy Nazira
NIM : 11750425002
Tempat/Tgl. Lahir : TR. PADANG / 27 MARET 1999
Fakultas/~~Pascasarjana~~ : SAINS DAN TEKNOLOGI
Prodi : MATEMATIKA

Judul ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~*:
PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ABELIAN MENGGUNAKAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~* dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~* saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/(~~Karya Ilmiah lainnya~~)* saya tersebut, maka saya besedia menerima sanksi sesua peraturan perundang-undangan.

Demikianlah Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 20 Juli 2022
Yang membuat pernyataan

10000 METERAI TEMPEL C0B9DAJX974700601

ELSY NAZIRA
NIM : 11750425002

*pilih salah satu sasuai jenis karya tulis

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 9 Juni 2022

Yang membuat pernyataan,

ELSY NAZIRA

11750425002

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'aalamin, yang pertama dan paling utama kuucapkan rasa Syukur atas rahmat dan kasih sayangmu ya Allah yang telah memberikan aku kemudahan dalam menuntut ilmu sehingga dapat menyelesaikan kuliah dan Tugas Akhir ini dengan baik. Dan juga tak lupa Shalawat serta salam yang selalu tercurah untuk Baginda, Kekasih Allah Yakni Nabi Besar Muhammad SAW. Yang telah membawa manusia dari alam yang penuh kegelapan dan kejahiliyahan menuju cahaya yang terang benderang dan penuh dengan ilmu pengetahuan.

Ayahanda Ramli dan ibunda Yuniarti

Terimakasihku persembahkan kepada kedua orang tuaku yang telah membesarkanku dengan penuh kasih sayang dan pengorbanannya. Terima kasih kepada cinta pertamaku, Guru Pertamaku yang telah banyak mendukung penulis, baik secara moril maupun materi.

Kalian adalah sumber kehidupanku, sumber kebahagiaanku, dan sumber motivasiku. Terimalah persembahan karya sederhana ini sebagai bukti kesungguhanku selama menuntut ilmu.

Keluarga Besar

Terimakasih adik-adik (Muhammad Hafiz, Indah Amalia dan Hasyifa Khumairoh) yang telah memberi banyak support baik berupa semangat maupun materi selama ini, dan terimakasih kepada semua keluarga besar yang selalu mendoakanku.

Wartono, M.Sc

Terimakasih banyak telah meluangkan waktunya untuk memberi bimbingan, pengarahan dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Sahabat-Sahabatku:

Yang tak pernah bosan memarahi, mengkritik dan memberi semangat kepadaku. Terimakasih atas kebersamaan kita baik dalam suka maupun duka. Tiada kata yang pantas terucap selain terimakasih atas motivasi dan semua bantuannya.

Terimakasih Untuk seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN SUSKA RIAU terkhusus Program Studi Matematika

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ABELIAN MENGGUNAKAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL

ELSY NAZIRA
NIM: 11750425002

Tanggal Sidang : 9 Juni 2022
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains Dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Metode transformasi diferensial merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tak linear dalam bentuk deret. Penyelesaian dengan metode ini dilakukan dengan mentransformasi persamaan menggunakan sifat-sifat metode transformasi diferensial yang sesuai. Pada Tugas Akhir akan dibahas cara menentukan penyelesaian persamaan diferensial Abelian jenis pertama menggunakan metode transformasi diferensial. Pada persamaan diferensial Abelian jenis pertama ini tidak mudah untuk menentukan penyelesaian eksplisitnya. Maka diberikan simulasi numerik untuk menunjukkan gambaran pola deret yang dibentuk dengan menggunakan dua contoh dan nilai-nilai penyelesaian hampiran yang di plot dalam bentuk grafik. Selanjutnya solusi hampiran yang dihasilkan metode transformasi diferensial dibandingkan dengan runge kutta orde empat. Dalam penelitian ini penulis mendapatkan hasil dengan cara manual dan dengan menggunakan *software* gnuplot. Hasil kajian menunjukkan bahwa metode transformasi diferensial dapat menyelesaikan persamaan diferensial Abelian jenis pertama.

Kata Kunci: Metode transformasi diferensial, persamaan diferensial Abelian jenis pertama, simulasi numerik.

THE SOLUTION OF ABELIAN DIFFERENTIAL EQUATION USING DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD

ELSY NAZIRA
NIM: 11750425002

Date of Final Exam : June 9th 2022
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

The differential transformation method is one of the methods used to solve nonlinear differential equations in the form of a series. The solution with this method is done by transforming the equation using the appropriate properties of the differential transformation method. In this final project, we will discuss how to determine the solution of the first type of Abelian differential equation using the differential transformation method. In this first type of Abelian differential equation it is not easy to determine the explicit solution. Then a numerical simulation is given to show the description of the pattern of the series formed by using two examples and the approximate completion values which are plotted in graphical form. Furthermore, the approximate solution produced by the differential transformation method is compared with the fourth-order runge kutta. In this study the authors get the results manually and by using the gnuplot software. The results of the study show that the differential transformation method can solve the first type of Abelian differential equations.

Keywords: *Differential transform method, the firs kind Abelian differential equations, numerical solution.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamiin. Puji syukur kepada Allah Subhanahu Wa Ta'ala karena atas rahmat, karunia, nikmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul "Penyelesaian Persamaan Diferensial Abelian Menggunakan Metode Transformasi Diferensial". Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Shalallahu 'Alahi Wasallam, semoga kita semua mendapat syafaat-nya. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis banyak sekali mendapatkan bimbingan, arahan, dan masukan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih khususnya kepada kedua orang tua tercinta Ayahanda Ramli, Ibunda Yuniarti dan yang selalu mendo'akan dan melimpahkan kasih sayang kepada penulis serta memberikan banyak dukungan dan dorongan baik secara moril maupun materi selama menempuh pendidikan. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi sekaligus pembimbing.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc., selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
5. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si., selaku Ketua Sidang yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.

6. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc., selaku Penguji I yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
7. Ibu Irma Suryani, M.Sc., selaku Penguji II yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
8. Ibu Sri Basriati, M.Sc., Selaku Penasehat Akademik yang selama ini telah banyak memberikan arahan, nasehat dan bimbingan akademik.
9. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
10. Seluruh keluarga besar, serta adik-adik tersayang yaitu Muhammad Hafiz, Indah Amalia dan Hasyifa Khumairoh, yang telah memberikan banyak dukungan pada penulis selama menempuh pendidikan.
11. Sahabat terbaik dan teman-teman di Program Studi Matematika, terkhusus Elpita Wahyuni, Sri Rahayu, Astati Putri, Afridayanti, Kiki Indah Sari, Febri Ardianti, Fitriah Maulida Agustini, Ninda Permata Riau, May Hofa Safitri dan Angkatan 2017 yang telah banyak memberikan bantuan, masukan serta dukungan kepada penulis.
12. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal penyusunan tugas akhir hingga selesai, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua. *Aamiin ya Rabbal'alamiin*.

Pekanbaru, 9 Juni 2022

ELSY NAZIRA
11750425002

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$u(x)$	:	Fungsi Awal
$U(k)$	:	Fungsi Transformasi Diferensial
$f'(x)$	:	Turunan pertama dari fungsi $f(x)$
λ	:	Konstanta
$\sum$	:	Sigma
$\neq$	:	Tidak sama dengan
$!$	:	Faktorial

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SINGKATAN

DTM	:	*Differential Transform Method*
RK-4	:	Metode Runge Kutta Orde 4
P_n	:	Polinomial Orde ke-n
D	:	Domain
PDB	:	Persamaan Diferensial Biasa

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial merupakan salah satu bagian dari matematika yang sangat erat hubungannya dengan kehidupan sehari-hari. Banyak masalah dalam bidang teknik, kesehatan, dan ilmu pengetahuan alam yang dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Model dalam bentuk persamaan diferensial sering muncul pada berbagai masalah, seperti pendeteksian karya seni, persentase peningkatan kelompok ikan hiu di laut Mediterania, mendiagnosis diabetes dan laju pertumbuhan populasi.

Beberapa metode penyelesaian persamaan diferensial muncul dengan mengaitkan bentuk-bentuk deret pangkat atau polinomial. Semi analitik merupakan penyelesaian numerik dalam bentuk deret pangkat atau polinomial. Beberapa peneliti menggunakan dan mengimplementasikan metode semi analitik untuk menyelesaikan persoalan persamaan diferensial baik elementer maupun parsial, seperti penelitian pada metode transformasi diferensial [1], metode dekomposisi Adomian [2], metode dekomposisi Adomian Laplace [3], metode pertubasi homotopi transformasi Elzaki [4], metode analisa homotopi, [5] metode iterasi variasi [6].

Metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial adalah metode transformasi. Transformasi adalah formula matematis yang digunakan untuk mengubah pesamaan matematika dari suatu bentuk ke bentuk yang lain. Transformasi diperlukan sebagai alat bantu untuk memecahkan berbagai persoalan matematika yang rumit. Pada tahun 1986 Zhou memperkenalkan suatu metode yaitu metode transformasi diferensial. Berbagai penelitian diketahui menggunakan metode ini yang membahas penyelesaian untuk persamaan diferensial riccati orde satu dan orde dua [7] dan penyelesaian untuk persamaan Lotka-Volterra [8].

Pada penelitian ini, penulis menggunakan metode transformasi diferensial (differential transformation method atau DTM) untuk menyelesaikan persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan koefisien konstanta. Solusi hampiran yang dihasilkan DTM dibandingkan dengan metode Runge Kutta Orde Empat (RK-4).

Berdasarkan latar belakang dan penelitian yang telah dilakukan oleh beberapa peneliti mengenai persamaan diferensial maka penulis tertarik untuk mengambil judul "**Penyelesaian Persamaan Diferensial Abelian Menggunakan Metode Transformasi Diferensial**".

1.2 Rumusan Masalah

Perumusan masalah pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

a. Bagaimana menentukan penyelesaian persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan koefisien konstanta menggunakan metode transformasi diferensial ?
b. Bagaimana perbandingan dari penyelesaian persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan koefisien konstanta menggunakan metode transformasi diferensial dan metode Runge Kutta Orde Empat?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini yaitu hanya menggunakan persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan koefisien konstanta dan metode transformasi diferensial.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

a. Menentukan penyelesaian persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan koefisien konstanta menggunakan metode transformasi diferensial.
b. Menentukan perbandingan dari penyelesaian persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan koefisien konstanta menggunakan metode transformasi diferensial dan metode Runge Kutta Orde Empat.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

a. Memberikan konstribusi terhadap perkembangan teori-teori matematika khususnya dalam bidang metode nemurik.
b. Memberikan metode baru untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan koefisien konstanta.
c. Sebagai referensi untuk mengembangkan metode lainnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika pada penulisan tugas akhir ini, adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang landasan pengambilan ide penelitian yang akan dijelaskan melalui latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang teori dasar mengenai hal-hal yang dapat digunakan sebagai acuan dan landasan untuk mengembangkan penelitian ini. Konsep dan teori terkait perlu dijelaskan, seperti: persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial Abelian dan metode transformasi diferensial.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini berisi tahapan-tahapan yang dilakukan penulis untuk mencapai tujuan penelitian mulai dari metode penelitian, teknik penggalian data sampai tahapan penelitian.

BAB IV PEMBAHASAN

Dalam bab ini membahas tentang pemaparan cara-cara dalam penyelesaian dan hasil penelitian.

BAB V PENUTUP

Dalam bab ini membahas kesimpulan dan saran yang diperoleh dari penelitian yang telah dilakukan.

BAB II
LANDASAN TEORI

Landasan teori dalam penelitian ini memuat landasan teori atau dasar-dasar yang digunakan dalam tugas akhir, diantaranya yaitu persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial Abelian dan metode transformasi diferensial.

2.1 Persaamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa (PDB) merupakan persamaan yang hanya memuat satu variabel bebas [9], jika diambil $y(x)$ sebagai suatu fungsi satu variabel dengan x merupakan variabel bebas dan y dinamakan variabel terikat.

Contoh:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4x = 0.$$

Persamaan diferensial memiliki beberapa kelompok, diantaranya sebagai berikut;

a. Orde

Orde pada suatu persamaan diferensial adalah orde tertinggi derivatif yang termuat didalam persamaan tersebut, dengan bentuk umum:

$$F\left(x, y, y', y'', y^{(3)}, \cdots, y^{(n)}\right) = f(x). \tag{2.1}$$

Contoh:

i. $\frac{dy}{dx} = x + 5$, disebut sebagai persamaan diferensial biasa orde satu, karena orde turunan tertingginya bernilai satu.

ii. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 3$, disebut sebagai persamaan diferensial biasa orde dua, karena orde turunan tertingginya bernilai dua.

b. Derajat

Derajat persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi yang dimiliki oleh suku derivatif tertentu suatu fungsi yang muncul pada persamaan diferensial.

Contoh:

i $\frac{dy}{dx} = x + 5$, PDB berderajat satu.

ii $(\frac{d^2y}{dx^2})^2 + x\frac{dy}{dx} = 3$, PDB berderajat dua.

c. Linear dan Non-linear

Dalam persamaan diferensial sering ditemukan bentuk-bentuk linear dan non-linear. Suatu persamaan diferensial dikatakan sebagai persamaan biasa linear jika persamaan tersebut dapat dituliskan kedalam bentuk persamaan :

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x). \tag{2.2}$$

Akan tetapi, jika suatu persamaan diferensial tidak dapat dituliskan dalam bentuk Persamaan (2.2) maka disebut sebagai persamaan diferensial non-linear.

Contoh :

i $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y^2 = \cos x,$ disebut PDB non-linear, karena bentuk y^2.

ii $\frac{dy}{dx} - y = x,$ disebut PDB linear.

d. Homogen dan Non-Homogen

Menentukan homogen atau non-homogen nya suatu persamaan diferensial dapat dilihat pada Persamaan (2.2). Persamaan diferensial dikatakan homogen jika $f(x) = 0,$ sebaliknya jika $f(x) \neq 0$ maka persamaan diferensial disebut no-homogen.

Contoh:

i $\frac{d^2y}{x^2} - y = e^x,$ disebut PDB non-homogen karena $f(x) = e^x$.

ii $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0,$ disebut PDB homogen karena $f(x) = 0$.

e. Koefisien

Fungsi dalam Persamaan (2.2) adalah koefisien dari persamaan diferensial. Jika koefisien-koefisien dalam bentuk konstanta, maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial dengan koefisien konstanta, dan jika koefisiennya berbentuk variabel, maka persamaan diferensialnya dikatakan persamaan diferensial dengan koefisien variabel.

Contoh :

i $y' - y'' - 20y = 0,$ disebut PDB homogen koefisien konstanta.

ii $x^2y'' + xy' + y = 0,$ disebut PDB homogen koefisien variabel.

2.2 Persamaan Diferensial Abelian

Persamaan diferensial Abelian adalah suatu persamaan diferensial non-linear [10]. Persamaan ini dinamai oleh Niels Henrik Abel pada tahun 1826. Persamaan diferensial Abelian terbagi menjadi dua jenis yaitu persamaan diferensial Abelian jenis pertama dan kedua yang masing-masing ditulis dalam bentuk sebagai berikut [4]:

$$\frac{dy}{dx} = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3, \text{dengan } f_3(x) \neq 0 , \qquad (2.3)$$

dan

$$(h_0(x) + h_1(x)y)\frac{dy}{dx} = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3. \qquad (2.4)$$

Berikut ini adalah contoh dari persamaan diferensial Abelian jenis pertama:

i $\frac{dy}{dx} = 1 - y + y^3, y(0) = 0.$

ii $y' = -2 + y + 2y^2 - y^3, y(0) = 0.$

2.3 Metode Transformasi Diferensial

Metode transformasi diferensial merupakan suatu langkah iteratif untuk memperoleh solusi analitik deret Taylor dari persamaan diferensial [11]. Transformasi diferensial diperkenalkan pertama kali oleh Zhou pada tahun 1986 untuk menyelesaikan permasalahan nilai awal yang linear dan non-linear pada analisis sirkuit listrik [1].

Definisi dasar dari transformasi diferensial untuk suatu fungsi yang analitik pada domain D yaitu fungsi yang mempunyai turunan pada setiap titik di persekitaran domain D yang dinyatakan dalam [11] sebagai berikut:

$$U\,(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}, \; k = 0,1,2,3, \dots, \qquad (2.5)$$

Pada persamaan (2.5), $u(x)$ merupakan fungsi yang ditransformasikan dan $U\,(k)$ merupakan fungsi transformasi. Invers dari metode transformasi diferensial $U\,(k)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(x - x_0)^k , \qquad (2.6)$$

sehingga dari Persamaan (2.5) dan (2.6) didapatkan:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} (x - x_0)^k . \qquad (2.7)$$

Persamaan (2.7) menyatakan bahwa pengertian dari metode transformasi diferensial berasal dari deret Taylor [12].

Selanjutnya, misalkan $U(k) = \left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]$, $F(k) = \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]$ dan $G(x) = \left[\frac{d^k g(x)}{dx^k}\right]$ merupakan masing-masing fungsi transformasi dari $u(x), f(x)$ dan $g(x)$, maka dapat ditentukan sifat-sifat dari transformasi diferensial adalah sebagai berikut [7]:

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Jika $u(x) = f(x) \pm g(x)$, maka $U(k) = F(k) \pm G(k)$.

Bukti:

Turunan ke- k dari $u(x) = f(x) \pm g(x)$ adalah :

$$\frac{d^k u(x)}{dx^k} = \frac{d^k f(x)}{dx^k} \pm \frac{d^k g(x)}{dx^k}. \tag{2.8}$$

Jika Persamaan (2.8) dikalikan dengan $\frac{1}{k!}$ maka diperoleh:

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right) \pm \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k g(x)}{dx^k}\right),$$

atau

$$U(k) = F(k) \pm G(k).$$

2. Perkalian Konstanta

Jika $u(x) = \lambda g(x)$ maka $U(k) = \lambda G(k)$, untuk $\lambda =$ konstanta.

Bukti:

Turunan ke- k dari persamaan $u(x) = \lambda g(x)$ untuk λ suatu konstanta adalah:

$$\frac{d^k u(x)}{dx^k} = \lambda\left(\frac{d^k g(x)}{dx^k}\right). \tag{2.9}$$

Jika Persamaan (2.9) dikalikan dengan $\frac{1}{k!}$ maka diperoleh:

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = \lambda \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k g(x)}{dx^k}\right),$$

atau

$$U(k) = \lambda G(k).$$

3. Turunan Pertama

Jika $u(x) = \frac{dg(x)}{dx}$, maka $U(k) = (k+1)Y(k+1)$.

Bukti:

Turunan ke- k dari $u(x) = \frac{dg(x)}{dx}$ adalah:

$$\frac{d^k u(x)}{dx^k} = \left(\frac{d^{k+1} g(x)}{dx^{k+1}}\right). \tag{2.10}$$

Jika Persamaan (2.10) dikalikan dengan $\frac{1}{k!}$ maka diperoleh:

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^{k+1} g(x)}{dx^{k+1}}\right).$$

Selanjutnya akan dikalikan ruas kanan dengan $\frac{(k+1)}{(k+1)}$.

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = (k+1)\frac{1}{(k+1)}\left(\frac{d^{k+1} g(x)}{dx^{k+1}}\right),$$

atau

$$U(k) = (k+1)Y(k+1).$$

4. Turunan ke-m

Jika $u(x) = \frac{d^m g(x)}{dx^m}$, maka $U(k) = (k+1)\ldots(k+m)Y(k+m)$.

Bukti:

Turunan ke- k dari $u(x) = \frac{d^m g(x)}{dx^m}$ adalah:

$$\frac{d^k u(x)}{dx^k} = \left(\frac{d^{k+m} g(x)}{dx^{k+m}}\right). \tag{2.11}$$

Jika Persamaan (2.11) dikalikan dengan $\frac{1}{k!}$ maka diperoleh:

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^{k+m} g(x)}{dx^{k+m}}\right).$$

Selanjutnya dikalikan ruas kanan dengan $\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+m-1)(k+m)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+m-1)(k+m)}$ maka diperoleh:

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = (k+1)(k+2)\ldots(k+m-1)(k+m)\frac{1}{(k+m)!}\left(\frac{d^{k+m} g(x)}{dx^{k+m}}\right),$$

atau

$$U(k) = (k+1)\ldots(k+m)Y(k+m).$$

5. Perkalian

Jika $u(x) = f(x)g(x)$, maka $U(k) = \sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r)$.

Bukti:

Turunan ke- k dari $u(x) = f(x)g(x)$ adalah :

$$\frac{d^k u(x)}{dx^k} = \sum_{r=0}^{k} \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)\dots(k-r+1)}{r!} \left(\frac{d^r f(x)}{dx^r}\right)\left(\frac{d^{k-r} g(x)}{dx^{k-r}}\right). \qquad (2.12)$$

Jika Persamaan (2.12) dikalikan dengan $\frac{1}{k!}$ maka diperoleh:

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{k!}\left(\frac{d^r f(x)}{dx^r}\right) \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)\dots(k-r+1)}{k!} \left(\frac{d^r f(x)}{dx^r}\right)\left(\frac{d^{k-r} g(x)}{dx^{k-r}}\right),$$

atau

$$U(k) = \sum_{r=0}^{k} F(r) \frac{1}{(k-r)!}\left(\frac{d^{k-r} g(x)}{dx^{k-r}}\right),$$

$$U\,(k) = \sum_{r=0}^{k} Y(r) Y(k-r).$$

6. **Perkalian m Fungsi**

Jika $u(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_m(x)$, maka

$$U(k) = \sum_{k_{m-1}=0}^{k} \cdots \sum_{k_1=0}^{k_2} F_1(k_1) F_2(k_2 - k_1) \cdots F_m(k - k_{m-1}).$$

Bukti:

Dimisalkan $u_1(x) = f_1(x) f_2(x)$,

$u_2(x) = f_1(x) f_2(x) f_3(x) = u_1(x) f_3(x)$,

$\vdots$

$u_{m-2}(x) = f_1(x) f_2(x) \cdots f_{m-1}(x) = u_{m-3}(x) f_{m-1}(x)$,

sehingga $u(x) = u_{m-2}(x) f_m(x)$.

Berdasarkan dari sifat yang ke-5 maka diperoleh:

$$U(k) = \sum_{k_{m-1}=0}^{k} u_{m-2}(k_{m-1})\, F_m(k - k_{m-1}),$$

dengan

$$u_{m-2}(k_{m-1}) = \sum_{k_{m-2}=0}^{k_{m-1}} u_{m-3}(k_{m-2})\, F_{m-1}(k_{m-1} - k_{m-2}),$$

sehingga

$$U(k) = \sum_{k_{m-1}=0}^{k} \sum_{k_{m-2}=0}^{k_{m-1}} \cdots \sum_{k_1=0}^{k_2} F_1\,(k_1) F_2(k_2 - k_1) \cdots F_{m-1}(k_{m-1} - k_{m-2}) F_m(k - k_{m-1})$$

$$= \sum_{k_{m-1}=0}^{k} \cdots \sum_{k_1=0}^{k_2} F_1(k_1) F_2(k_2 - k_1) \cdots F_m(k - k_{m-1})\ .$$

7. **Fungsi Variabel Bebas**

Jika $u(x) = x^m$, maka $U(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, k-m = 0 \\ 0, k-m \neq 0 \end{cases}$.

Bukti:

Turunan ke-k dari $u(x) = x^m$ adalah:

$$\frac{d^k u(x)}{dx^k} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+2)(m-k+1)x^{m-k} \tag{2.13}$$

Jika Persamaan (2.13) dikalikan dengan $\frac{1}{k!}$ maka diperoleh:

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right) = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+2)(m-k+1)}{k!}x^{m-k},$$

atau

$$U(k) = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+2)(m-k+1)}{k!}x^{m-k}.$$

a. Untuk $m = k$

$$U(k) = \frac{k!}{k!}x^0,$$

$$U(k) = 1.$$

b. Untuk $m \neq k$

Ambil sebarang $m = k - 1$,

$$U(k) = \frac{(k-1)(k-2)(k-3)\cdots(1)(0)}{k!}x,$$

$$U(k) = 0.$$

8. Fungsi Konstanta

Jika $u(x) = s, s \in R$, maka $U(k) = \delta(k) = \begin{cases} s, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$.

Bukti:

Turunan ke-k dari $u(x) = s$ adalah:

Untuk $k = 0$,

$$\frac{d^0 u(x)}{dx^0} = u(x) = s.$$

Untuk $k \neq 0$,

$$\frac{d^k u(x)}{dx^k} = 0.$$

Tabel 2.1 Sifat-sifat Metode Transformasi Diferensial

No	Sifat-sifat	Transformasi Diferensial
1	Penjumlahan dan Pengurangan	$F(k) \pm G(k)$, dengan $k = 0,1,2,3\cdots$,
2	Perkalian Konstanta	$\lambda G(k)$, dengan $k = 0,1,2,3\cdots$,

Tabel 2.1 Sifat-sifat Metode Transformasi Diferensial(Lanjutan)

3	Turunan Pertama	$(k+1)Y(k+1)\ atau$ $Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)}$, dengan $k = 0,1,2,3 \cdots$,
4	Turunan ke-m	$(k+1)\ldots(k+m)Y(k+m)\ \ atau$ $Y(k+m) = \frac{1}{(k+1)(k+m)}$, dengan $k = 0,1,2,3 \cdots$,
5	Perkalian	$\sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r)$, dengan $k = 0,1,2,3 \cdots$,
6	Perkalian *m* Fungsi	$\sum_{k_{m-1}=0}^{k} \cdots \sum_{k_1=0}^{k_2} F_1(k_1)F_2\,(k_2 - k_1)\ \cdots\ \ F_m(k-k_{m-1})$, dengan $k = 0,1,2,3 \cdots$,
7	Fungsi Variabel Bebas	$\delta(k-m) = \begin{cases}1, k-m=0\\0, k-m\neq 0\end{cases}$, dengan $k = 0,1,2,3 \cdots$,
8	Fungsi Konstanta	$\delta(k) = \begin{cases}s, k=0\\0, k\neq 0\end{cases}$, dengan $k = 0,1,2,3 \cdots$,

Contoh 2.1 : Tentukan penyelesaian persamaan diferensial linear orde satu menggunakan metode transformasi diferensial dari fungsi berikut

$$\frac{dy(t)}{dt} = 5y(t) + 8, \tag{2.14}$$

dengan nilai awal $y(0) = 0$.

Penyelesaian:

Berdasarkan sifat-sifat dari transformasi diferensial dari Persamaan (2.14) maka diperoleh:

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1}[5Y(k) + \delta(k)], \tag{2.15}$$

dengan $Y(0) = 0,\ \delta(k) = \begin{cases}8, k=0\\0, k\neq 0\end{cases}$.

Untuk $k = 0,1,2,3 \cdots$, maka dengan mensubstitusikan Persamaan (2.15) diperoleh:

Untuk $k = 0$, maka

$$Y(1) = \frac{1}{0+1}[5Y(0) + \delta(0)]$$
$$= \frac{1}{1}[5 \cdot 0 + 8]$$
$$= 8\ .$$

Untuk $k = 1$, maka

$$Y(2) = \frac{1}{1+1}[5Y(1) + \delta(1)]$$
$$= \frac{1}{2}[5 \cdot 8 + 0]$$
$$= 20.$$

Untuk $k = 2$, maka

$$Y(3) = \frac{1}{2+1}[5Y(2) + \delta(2)]$$
$$= \frac{1}{3}[5 \cdot 20 + 0]$$
$$= \frac{100}{3}.$$
$$\vdots,$$

diperoleh:

$$Y(1) = 8\ , Y(2) = 20,\ Y(3) = \frac{100}{3}, \cdots,$$

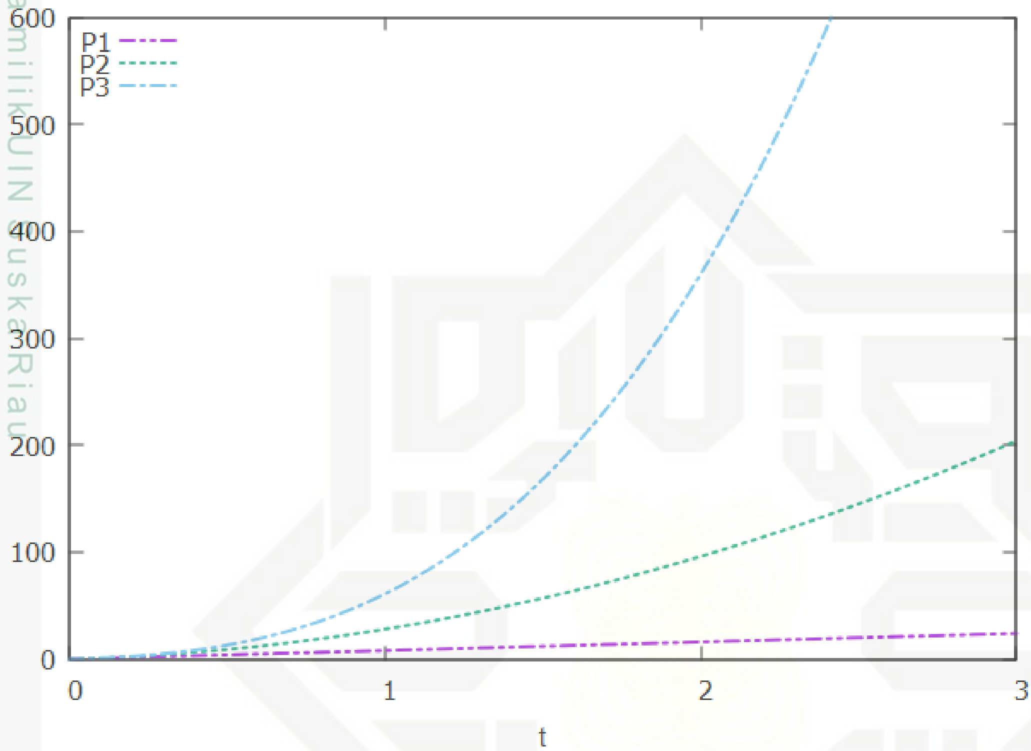
sehingga penyelesaian dari Persamaan (2.15) sebagai berikut;

$$y(t) = 8t + 20t^2 + \frac{100}{3}t^3 + \cdots.$$

Untuk mengetahui prilaku dari solusi hampiran dari metode transformasi diferensial, maka akan ditentukan polinomial dari nilai penyelesaian Persamaan (2.15), sehingga diperoleh

$$p_1(t) = 8t\ ,$$
$$p_2(t) = 8t + 20t^2,$$
$$p_3(t) = 8t + 20t^2 + \frac{100}{3}t^3,$$
$$\vdots\ .$$

Untuk mengetahui perilaku dari solusi hampiran ini, maka nilai-nilai polinomial $p_1(t)$, $p_2(t)$ dan $p_3(t)$ diplot dalam bentuk grafik pada interval $0 \leq t \leq 3$ yang diberikan sebagai berikut:



Gambar 2.1 Grafik Polinomial P_1, P_2 Dan P_3 dari Persamaan (2.15) pada $0 \leq t \leq 3$.

Contoh 2.2 : Tentukan penyelesaian persamaan diferensial non-linear orde dua menggunakan metode transformasi diferensial dari fungsi berikut

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = 2y^2(t) + t, \tag{2.16}$$

dengan nilai awal $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Penyelesaian:

Berdasarkan sifat-sifat dari transformasi diferensial, maka Persamaan (2.16) diperoleh:

$$Y(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}[2(\sum_{r=0}^{k} Y(r)\,Y(k-r)\; + \delta(k-m)], \tag{2.17}$$

dengan $Y(0) = 1$, $Y(1) = 0$ dan $\delta(k-1) = \begin{cases} 1, k-1=0 \\ 0, k-1 \neq 0 \end{cases}$.

Selanjutnya substitusikan nilai $k = 0,1,2,3,\cdots,$ pada Persamaan (2.17) diperoleh:

Untuk $k = 0$, maka

$$Y(2) = \frac{1}{1\cdot 2}[2(Y(0)\,Y(0) + \delta(-1)]$$
$$= \frac{1}{2}[2(1\cdot 1) + 0]$$
$$= 1\,.$$

Untuk $k = 1$, maka

$$Y(3) = \frac{1}{2\cdot 3}[2(x(0)\,Y(1-0) + x(1)\,Y(1-1) + \delta(0)]$$
$$= \frac{1}{6}[2(1\cdot 0 + 0\cdot 1) + 1]$$
$$= \frac{1}{6}\,.$$

Untuk $k = 2$, maka

$$Y(4) = \frac{1}{3\cdot 4}[2(Y(0)\,Y(2-0) + Y(1)\,Y(2-1) + Y(2)Y(2-2+\delta(1)]$$
$$= \frac{1}{12}[2(1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1) + 0]$$
$$= \frac{1}{3}\,.$$
$$\vdots,$$

diperoleh :

$$Y(2) = 1, Y(3) = \frac{1}{6}, Y(4) = \frac{1}{3}, \cdots,$$

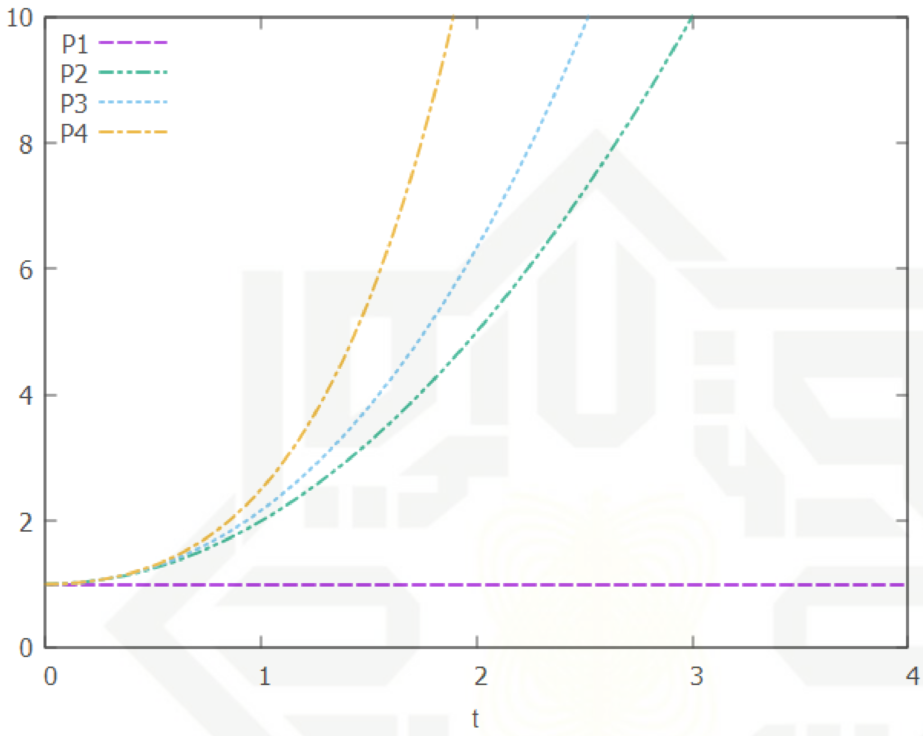
sehingga penyelesaian dari Persamaan (2.17) sebagai berikut;

$$y(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{3}t^4 + \cdots.$$

Untuk mengetahui prilaku dari solusi hampiran dari metode transformasi diferensial, maka akan ditentukan polinomial dari nilai penyelesaian Persamaan (2.17), sehingga diperoleh

$$p_1(t) = 1\,,$$
$$p_2(t) = 1 + t^2,$$
$$p_3(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{6}t^3,$$
$$p_4(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{3}t^4\,,$$
$$\vdots\,.$$

Untuk mengetahui perilaku dari solusi hampiran ini, maka nilai-nilai polinomial $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ dan $p_4(t)$ diplot dalam bentuk grafik pada interval $0 \leq t \leq 4$ yang diberikan sebagai berikut :



Gambar 2.2 Grafik Polinomial P_1, P_2, P_3 Dan P_4 dari Persamaan (2.17) pada $0 \leq t \leq 4$.

BAB III

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian kajian teori mengenai persamaan diferensial elementer yang bertujuan untuk mencari penyelesaian persamaan Abelian menggunakan metode transformasi diferensial. Metode yang digunakan dalam penyelesaian proposal ini adalah metode studi literature yang mana bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dalam penelitian baik berasal dari buku-buku, dokumen dan jurnal yang berhubungan dengan penelitian.

Adapun prosedur penelitian yang dilakukan pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Mempertimbangkan kembali persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan koefisien konstanta, dengan bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3. \qquad (3.1)$$

2. Mengubah persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan koefisien konstanta dalam bentuk metode transformasi diferensial dengan bentuk umum berikut:

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1}\left[F_0(k) + F_1(k)\,Y\,(k) + F_2(k)\sum_{r=0}^{k} Y\,(r)\,Y(k-r) + F_3(k)\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r} Y(r-s)\ \ Y(k-r)\right]. \qquad (3.2)$$

3. Gunakan nilai awal untuk untuk memperoleh nilai-nilai pendekatan dalam bentuk $Y(1), Y(2), Y(3), \cdots$.
4. Penyelesaian persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan koefisien konstanta dapat disubstitusikan pada invers dari metode transformasi diferensial, dengan bentuk persamaan sebagai berikut:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)(x)^k\ . \qquad (3.3)$$

5. Simulasi numerik menggunakan dua persamaan diferensial jenis pertama dengan koefisien konstanta dan hasil numerik dari kedua soal akan

dibandingkan dengan penyelesaian menggunakan metode runge-kutta orde empat.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Penyelesaian persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan koefisien konstanta menggunakan metode transformasi diferensial. Persamaan diferensial Abelian adalah suatu persamaan diferensial non-linear yang secara analitik sulit ditentukan solusi masalahnya. Persamaan diferensial Abelian jenis pertama yang ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3, \text{dengan } f_3(x) \neq 0 . \qquad (5.1)$$

Mengubah Persamaan (5.1) menggunakan sifat-sifat transformasi diferensial sehingga dapat ditulis dalam bentuk:

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1}\left[F_0(k) + F_1(k)\,Y\,(k) + F_2(k)\sum_{r=0}^{k} Y\,(r)\,Y(k-r) + F_3(k)\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r} Y(r-s)\;\;Y(k-r)\right] . \qquad (5.2)$$

Hasil solusi numerik pada Persamaan (4.3) dan (4.5) memberikan gambaran bahwa metode transformasi diferensial dapat diselesaikan dengan persamaan diferensial Abelian. Selanjutnya Gambar (4.1) dan (4.3) juga menunjukkan bahwa penyelesaian yang diberikan membentuk pola grafik yang teratur. Selain itu, perbandingan solusi hampiran dengan P5, P11 dan metode RK-4 memberikan gambaran, bahwa solusi yang dihasilkan pada Gambar (4.2) P11 dan P5 kompetitif terhadap metode RK-4. Pada Gambar (4.4) P5 kompetitif terhadap metode RK-4 sedangkan P11 terhadap metode RK-4 solusi hampirannya berhimpit sepanjang inteval $0 \leq x \leq 0{,}39$. Yang dimaksud kompetitif disini dimana situasi berkompetisi, dimana situasi ini tidak membutuhkan pemenang secara jelas.

5.2 Saran

Tugas akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan koefisien konstanta menggunakan metode transformasi diferensial. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan tugas akhir ini, penulis sarankan untuk membahas tentang persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan koefisien variabel atau persamaan diferensial abelian kedua.

DAFTAR PUSTAKA

[1] R. Jalil, M. Abdy, and W. Sanusi, "Penyelesaian Persamaan Diferensial Bernoulli Tak Linear dengan Metode Transformasi Diferensial," 2014.

[2] Y. Muda and Wartono, "Aproksimasi metode dekomposisi adomian pada persamaan diferensial hiperbolik linear," *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, vol. 9, no. 1, pp. 97–103, 2011.

[3] Wartono and M. N. Muhaijir, "Penyelesaian persamaan Riccati dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace," *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, vol. 10, no. 2, 2014.

[4] Wartono, "Penyelesaian Persamaan Diferensial Abelian Menggunakan Metode Perturbasi Homotopi Transformasi Elzaki," *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 6, no. 1, pp. 25–36, 2021.

[5] A. T. Wibowo, J. Jaharuddin, and A. Kusnanto, "Penggunaan Metode Homotopi Untuk Menyelesaikan Model Aliran Polutan Di Tiga Danau Yang Saling Terhubung," *Jurnal Matematika Dan Aplikasinya*, vol. 12, no. 1, pp. 79–92, 2013.

[6] Wartono, M. Hanafi, and I. Suryani, "The Solution of nonlinear parabolic equation using variational iteration method," *Jurnal Matematika Statistika Dan Komputasi*, vol. 16, no. 3, pp. 287–295, 2020.

[7] Rahayu, Sugianto, and B. Prihandono, "Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa tak linear Dengan Metode Transformasi Diferensial," *Buletin Ilmiah Matematika Statistika dan Terapannya*, vol. 01, no. 1, pp. 9–14, 2012.

[8] S. Hidri, "Penyelesaian Persamaan Lotka-Volterra Dengan Metode Transformasi Differensial," 2015.

[9] Rochmad, "Bahan Ajar Persamaan Diferensial," *Academia.edu*, pp. 1–53, 2016.

[10] H. S. Yusanto, "Metode dekomposisi adomian untuk menyelesaikan persamaan diferensial abelian," 2009.

[11] R. Attarnejad and A. Shahba, "Application of Differential Transform

Method in Free Vibration Analysis of Rotating Non-Prismatic Beams," *World Applied Sciences Journal*, vol. 5, no. 4, pp. 441–448, 2008.

[12] I. H. A. Hassan and V. S. Erturk, "Applying Differential Transformation Method to the One-Dimensional Planar Bratu Problem," *International Journal Mathematics Sciences*, vol. 2, no. 30, pp. 1493–1504, 2007.

[13] O. K. Jaradat, "Adomian Decomposition Method For Solving Abelian Differential Equation," *journal of Applied Sciences*, vol. 8, no. 10, pp. 1962–1966, 2008.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Elsy Nazira, dilahirkan pada tanggal 27 Maret 1999 di desa Tr. Padang Kecamatan Kampar Kabupaten Kampar Utara. Penulis lahir dari pasangan Ayahanda Ramli dan Ibunda Yuniarti dan merupakan putri sulung dari empat bersaudara yakni Muhammad Hafiz, Indah Amalia Dan Hasyifa Khumairoh. Penulis menyelesaikan pendidikan formal di Sekolah Dasar Negeri 009 Kapur pada tahun 2011. Menyelesaikan Pendidikan Lanjut Tingkat Pertama dan Sekolah Menengah Atas di pondok Pesantren Anshor Al-Sunnah di Air Tiris, Kabupaten Kampar dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) pada tahun 2017. Dan pada tahun yang sama melanjutkan pendidikan di Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan jurusan Matematika.

Pada tahun 2020 penulis menyelesaikan Kerja Praktek (KP) di PTPN V Pekanbaru Provinsi Riau dengan judul "**Analisis Penerapan Statistik Pada Evaluasi Data Kinerja Pabrik Kelapa Sawit Di Pt. Perkebunan Nusantara V Pekanbaru** " yang dibimbing oleh ibu Irma Suryani, M.Sc. Pada tahun yang sama penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata di Desa Muara Jalai Kecamatan Kampar Utara.