

TRACE MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS $n \times n$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

RAPIKADURI NASUTION

11654203703



UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2022

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS $n \times n$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

oleh:

RAPIKADURI NASUTION
11654203703

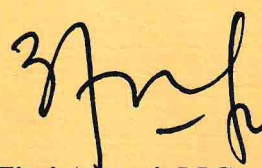
Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 22 Juni 2022

Ketua Program Studi



Wartono, M.Sc.
NIP. 19730818 200604 1 003

Pembimbing



Fitri Aryani, M.Sc.
NIP. 19770913 200604 2 002

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS $n \times n$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

oleh:

RAPIKADURI NASUTION
11654203703

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 22 Juni 2022

Pekanbaru, 22 Juni 2022
Mengesahkan

Dekan



Dr. Hartono, M.Pd.
NIP. 19640301 199203 1 003

Ketua Program Studi



Wartono, M.Sc.
NIP. 19730818 200604 1 003

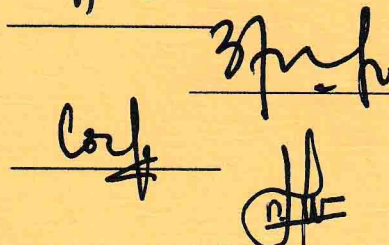

DEWAN PENGUJI

Ketua : Wartono, M.Sc.

Sekretaris : Fitri Aryani, M.Sc.

Anggota I : Corry Corazon Marzuki, M.Si.

Anggota II : Ade Novia Rahma, S.Pd., M.Mat.



LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 22 Juni 2022
Yang membuat pernyataan,

RAPIKADURI NASUTION
NIM. 11654203703

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'aalamin, yang paling utama tidak lupa kuucapkan rasa syukur atas rahmat dan kasih sayangmu ya Allah yang telah memberikan aku kemudahan dalam menuntut ilmu sehingga dapat menyelesaikan kuliah dan Tugas Akhir ini dengan baik. Shalawat dan Salam tetap tercurahkan untuk Baginda, Kekasih Allah Yakni Nabibana Muhammad Salallahu'alaihi Wassalam yang telah membawa manusia dari zaman kejahiliyahan menuju zaman yang penuh dengan ilmu pengetahuan.

H. Pangadilan Nasution dan Hj. Rohimah Siregar

Terimakasih kusampaikan kepada Ayah tercinta yaitu sosok pahlawan yang selalu dibanggakan oleh Anak-anaknya. Keringat, keluh, sedih, dan kesal beliau simpan sendiri demi kebahagiaan keluarganya. Bagaimanapun keadaannya beliau selalu mengusahakan yang terbaik dan tetap tegar agar kami hidup dengan layak serta mendapatkan pendidikan yang bermutu dan sesuai dengan ajaran Islam.

Terimakasihku juga kusampaikan kepada umak tercinta, yang telah menjadi sosok khodijah bagi anak-anaknya, yang mewarnai kehidupanku dengan ribuan nasihat dan didikannya sekaligus menjadi sahabat dihidupku. Beliau mengajarkanku bagaimana menjadi perempuan yang dirindukan oleh Syurga dan bermanfaat bagi orang lain. Terkhusus untuk ayah dan umak yang tangannya tak pernah lelah berdoa dan senantiasa menyebut namaku dalam doa demi meraih kesuksesan. Terimalah persembahan karya sederhana ini sebagai bukti kesungguhanku selama menuntut ilmu.

Abang-Abangku

Terimakasih telah memberi support baik berupa semangat maupun materi selama ini, dan terimakasih semuanya dan segalanya.

Fitri Aryani, M.Sc

Terimakasih banyak telah meluangkan waktunya untuk memberi bimbingan, pengarahan dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Dosen-Dosen

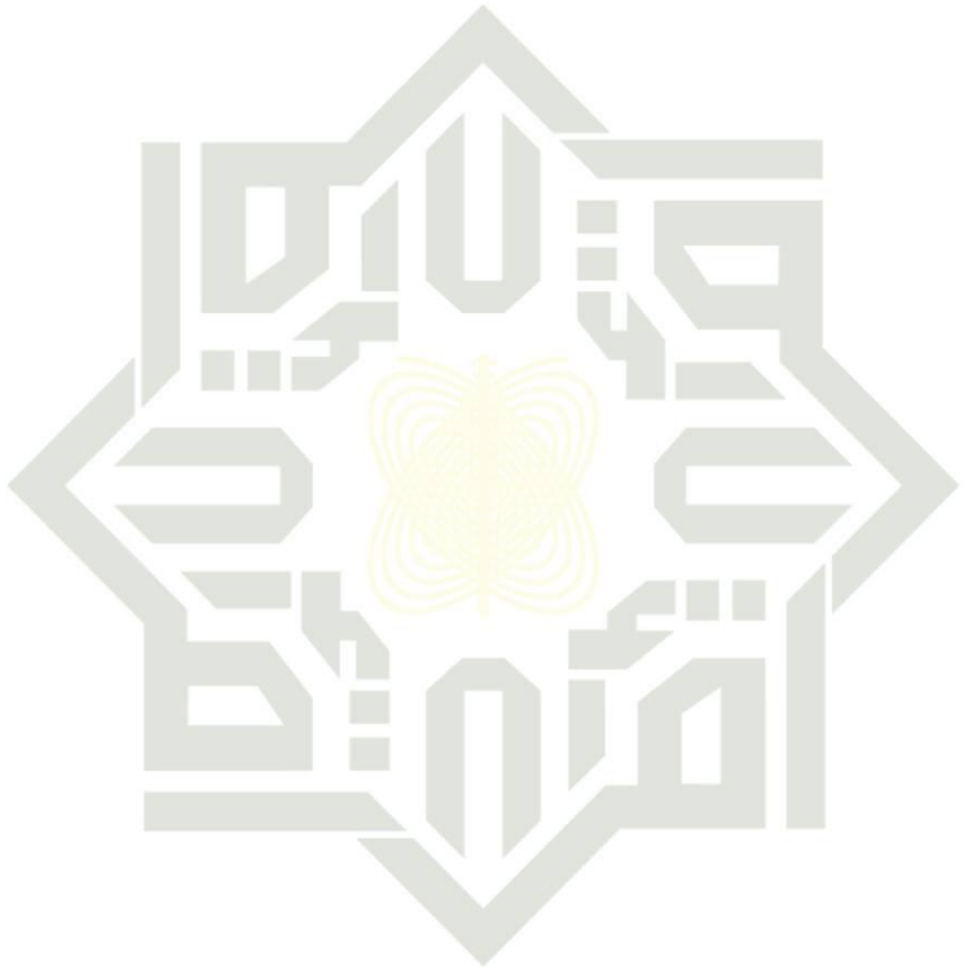
Terimakasih banyak telah mendidik, membimbing dan memberikan arahan kepada penulis pada masa perkuliahan .

Nilwan Andiradja, S.Pd, M.Si

Terimakasih banyak telah meluangkan waktunya untuk memberi bimbingan, pengarahan dan selalu sabar mendengarkan keluhan dari mahasiswa bimbingannya di perkuliahan ini.

Sahabat-Sahabatku

Terimakasih banyak kepada sahabatku dimana pun kalian berada yang tidak pernah bosan memarahi, mengkritik dan memberi semangat kepadaku, selalu menemaniku disaat suka maupun duka. Tiada balasan yang bisa aku berikan selain ucapan terimakasih dan doa demi kuseksesan kita bersama.



UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.


Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

TRACE MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS $n \times n$ BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

RAPIKADURI NASUTION
11654203703

Tanggal Sidang : 22 Juni 2022
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang *trace* matriks simetris berbentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif. Untuk memperoleh bentuk umum *trace* dari matriks simetris $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif tersebut dengan cara menentukan perpangkatan matriks simetris dari A_6^2 sampai A_6^{10} , A_7^2 sampai A_7^{10} , A_8^2 sampai A_8^{10} . Selanjutnya menduga bentuk umum perpangkatan matriks A_n^m dan dibuktikan menggunakan induksi matematika. Setelah diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks simetris A_n^m maka diperoleh *trace* matriks simetris A_n^m . Diberikan aplikasi dari bentuk umum yang diperoleh dengan contoh soal.

Kata Kunci: *Trace* matriks, matriks simetris, perpangkatan matriks dan induksi matematika.

UIN SUSKA RIAU

TRACE OF THE SYMMETRIC MATRIX $n \times n$ OF THE POWER OF POSITIVE INTEGER

RAPIKADURI NASUTION
11654203703

Date of Final Exam : 22 Juni 2022
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

This final project discusses the general form of the power of a symmetric matrix $n \times n$ of the power of positif integer. To get the general form trace of the symmetric matrix positif integer power of $n \times n$ special matrices, by determining the power of the symmetric matrix A_6^2 to A_6^{10} , A_7^2 to A_7^{10} , A_8^2 to A_8^{10} . Then we get the general form of the exponent matrix A_n^m and proved using mathematical induction. After obtaining the power of a symmetric matrikx A_n^m then obtained trace of the symmetric matrix. Given the application of the general form obtained by example problems.

Keywords : Trace matrix, symmetric matrix, matrix multiplication, and mathematic induction.

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Bersyukur kepada Allah *subhanahu wata'ala* karena untuk limpahan rahmat serta kasih sayangnya Tugas Akhir ini bisa terselesaikan dengan judul **“Trace matriks simetris berbentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif”**. shalawat serta salam dihadiahkan kepada Nabi Muhammad *shalallahu 'alaihi* wasalam yang atas pertolongannya ilmu pengetahuan dapat kita rasakan sampai saat ini.

Terimakasih juga saya ucapkan kepada semua pihak yang membantu proses penyusunan tugas akhir ini. kepada ayah dan ibu terimakasih atas nasehat, perhatian dan kasih sayangnya. Kemudian ucapan terimakasih sebanyak-banyaknya untuk:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris dan Pembimbing Akademik Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku pembimbing yang atas bimbingan, arahan, serta memotivasinya yang selalu tercurahkan kepada saya.
6. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si dan Ibu Ade Novia Rahma, S.Pd., M.Mat Selaku Penguji I dan II yang atas kritik dan sarannya sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Keluarga saya, bang rapi dan bang mora yang telah membantu saya dalam hal apapun.

Teman-teman KKN, Teman-Teman Anak Kos serta kawan-kawan saya yang telah pada lulus.

Kawan-kawan Fakultas Sains dan Teknologi Khususnya Program Studi Matematika Angkatan 2016.

Penelitian ini dikerjakan seoptimal mungkin oleh penulis. Tetapi sangat memungkinkan adanya kesalahan dalam penyampaian materi atau penulisan sehingga diharapkan kritik serta saran dari berbagai pihak agar lebih sempurnanya penelitian ini.

Wassalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 22 Juni 2022

RAPIKADURI NASUTION
NIM. 11654203703

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

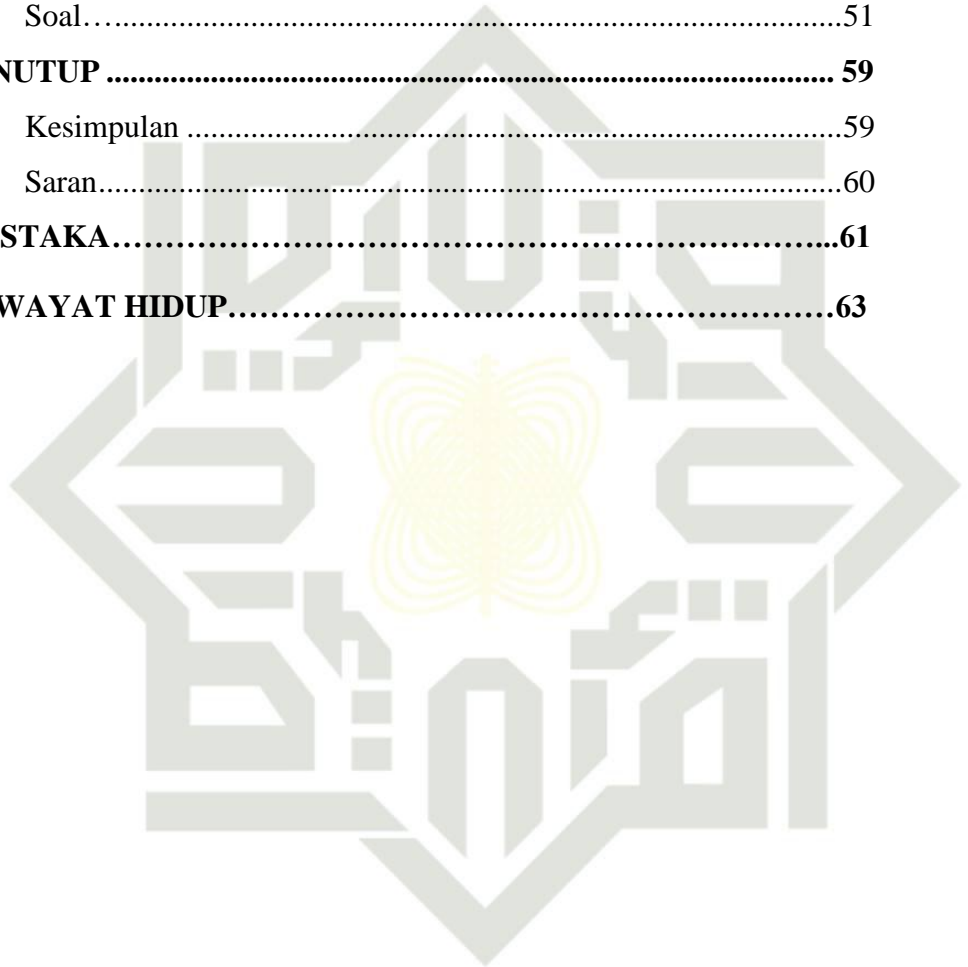
DAFTAR ISI

LEMBAR PERSETUJUAN	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL.....	iv
LEMBAR PERNYATAAN	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	viii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR.....	x
DAFTAR ISI.....	xi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Batasan Masalah.....	5
1.4 Tujuan Penelitian	6
1.5 Manfaat Penelitian	6
1.6 Sistematika Penelitian.....	6
BAB II LANDASAN TEORI.....	7
2.1 Matriks Simetris	7
2.2 Perkalian Matriks	9
2.2.1 Perkalian Matriks dengan Skalar.....	9
2.2.2 Perkalian Matriks dengan Matriks	10
2.3 Perpangkatan Matriks.....	10
2.4 <i>trace</i> Matriks	11
2.5 Trace Matriks Berpangkat Bilangan BulatPositif	12
2.6 Induksi Matematika.....	27
BAB III METODE PENELITIAN.....	29
BAB IV PEMBAHASAN.....	30

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

4.1	Perpangkatan Matriks Simetris Berbentuk Khusus $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif.....	30
4.2	<i>Trace</i> Matriks Simetris Berbentuk Khusus $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif	50
4.3	Apkulasikan Bentuk Umum $tr(A_{n \times n})^m$ dalam Bentuk Contoh Soal.....	51
BAB V PENUTUP		59
5.1	Kesimpulan	59
5.2	Saran.....	60
DAFTAR PUSTAKA.....		61
DAFTAR RIWAYAT HIDUP.....		63



UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Diarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matriks memiliki beberapa jenis diantaranya adalah matriks identitas, matriks bujursangkar, matriks segitiga, matriks simetris dan lain sebagainya. Terdapat beberapa operasi yaitu penjumlahan, perkalian, pengurangan, serta determinan, *invers*, *trace* matriks dan lain sebagainya.

Pembahasan kali ini mengenai *trace* matriks dari matriks yang berpangkat. Untuk mendapatkan *trace* matriks berpangkat yang pertama harus dilakukan adalah matriks tersebut harus di pangkatkan sampai pada pangkat yang diinginkan. Setelah bentuk perpangkatan diperoleh maka langkah selanjutnya adalah menjumlahkan entri-entri diagonal utama pada matriks tersebut didapatkan hasil *trace* matriks berpangkat tersebut.

Beberapa penelitian sebelumnya telah membahas tentang *trace* matriks berpangkat, diantaranya [1] pada tahun 2015 membahas tentang persamaan bentuk umum *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Adapun bentuk umum pada *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \cdots [n-(r+(r-1))] (\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}, \text{ genap,}$$

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \cdots [n-(r+(r-1))] (\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}, \text{ ganjil.}$$

Penelitian tahun 2020 [2] membahas mengenai *trace* matriks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan dalam penelitiannya adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix} \text{ dengan } a, b \in R, \text{ penelitian tersebut memperoleh hasil } trace \text{ matriks}$$

berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$tr(A^n) = 1 + (a + b)^n .$$

Selanjutnya penelitian yang dilakukan pada tahun 2021 oleh [3] dimana penelitian tersebut membahas mengenai *trace* matriks 3×3 berpangkat bilangan bulat. Matriks yang digunakan yaitu:

$$(A_3) = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall a, b, c \in R, \text{ Adapun hasil yang didapatkan adalah:}$$

$$tr(A_3)^n = (a + b + c)^n \text{ dengan } n \in Z^+ .$$

Selanjutnya penelitian pada tahun 2019 oleh [4] dimana penelitian tersebut membahas mengenai *trace* matriks toeplitz tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan yaitu:

$$(A_3) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}, b \neq 0, c \neq 0, \forall a, b, c \in R, \text{ Adapun hasil yang didapatkan adalah:}$$

$$tr(A_3)^n = \begin{cases} 3a^n + 4 \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r, & n \text{ genap} \\ 3a^n + 4 \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r, & n \text{ ganjil} \end{cases} .$$

Selanjutnya penelitian pada tahun 2019 oleh [5] dimana penelitian tersebut membahas mengenai *trace* matriks toeplitz simetris berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan yaitu:

$$(A_3) = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \forall a \in R, \text{ Adapun hasil yang didapatkan adalah:}$$

$$tr(A_3)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ genap} \\ 3^{\frac{n+1}{2}} a^n, & n \text{ ganjil} \end{cases} .$$

penelitian tahun 2020 oleh [6] membahas mengenai *trace* matriks kompleks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat. Matriks yang digunakan yaitu:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$(A_{3 \times 3}) = \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}$ dengan $i = \text{imajiner}$. Adapun hasil yang

diperoleh adalah:

$$\text{tr}(A_3)^n = (3a + bi)^n.$$

Tahun 2020 [7] melakukan penelitian dengan pembahasan *trace* matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat. Adapun bentuk matriksnya yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, . \text{ Adapun hasil}$$

yang diperoleh adalah:

$$\text{tr}(A_4^n) = \text{tr}(B_4^n) = 4(a^n), \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{tr}(A_4^{-n}) = \text{tr}(B_4^{-n}) = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} = 4\left(\frac{1}{a^n}\right).$$

Tahun 2020 [8] melakukan penelitian yang sama dengan [7] namun dengan ordo yang berbeda yaitu 5×5 berpangkat bilangan bulat negatif. Adapun bentuk matriksnya yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d, e \in \mathbb{R}. \text{ Adapun hasil yang diperoleh adalah:}$$

$$\text{tr}(A_5^{-n}) = \text{tr}(B_5^{-n}) = 5\left(\frac{1}{a^n}\right).$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Tahun 2021 [9] melakukan penelitian masih pada pembahasan *trace* matriks berpangkat. Namun pada penelitian kali ini berbeda dengan penelitian sebelumnya. Dimana pada penelitian sebelumnya membahas tentang matriks real secara umum sedangkan pada penelitian ini membahas matriks simetris bentuk khusus dengan ordo 3×3 . Matriks simetris yang digunakan adalah:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R, b \neq 0.$$

Adapun hasilnya bentuk umum *trace* matriks simetris 3×3 berpangkat bilangan bulat sebagai berikut:

$$tr(A_{3 \times 3})^n = (2^n - (-1)^{n+1} 2)b^n, \quad n \text{ bilangan bulat positif},$$

$$tr(A_{3 \times 3})^n = \frac{(-1)^n 2^{n+1} + 1}{2^n b^n}, \quad n \text{ bilangan bulat negatif}.$$

Masih pada tahun yang sama 2021 [10] melakukan penelitian dengan pembahasan *trace* matriks berpangkat juga. Akan tetapi penelitian ini memiliki perbedaan yang terletak pada ordo yang diperbesar, yaitu dengan menggunakan ordo 4×4 . Adapun bentuk matriksnya yaitu:

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R, b \neq 0.$$

Adapun hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut yaitu:

$$tr(A_{4 \times 4})^n = (3^n - (-1)^{n+1} 3)b^n, \quad n \text{ bilangan bulat positif},$$

$$tr(A_{4 \times 4})^n = \frac{(-1)^n 3^{n+1} + 1}{3^n b^n}, \quad n \text{ bilangan bulat negatif}.$$

Penelitian [11] sama halnya dengan [9] dan [10] yaitu membahas mengenai *trace* matriks berpangkat. Tetapi pada penelitian ini menggunakan ordo yang diperbesar lagi dari penelitian sebelumnya yaitu 5×5 . Bentuk matriksnya sebagai berikut:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$A_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R, b \neq 0 .$$

Adapun matriks yang digunakan menghasilkan trace yaitu:

$$tr(A_{5 \times 5})^n = (4^n - (-1)^{n+1} 4)b^n, \quad n \text{ bilangan bulat positif},$$

$$tr(A_{5 \times 5})^n = \frac{(-1)^n 4^{n+1} + 1}{4^n b^n}, \quad n \text{ bilangan bulat negatif}.$$

Berdasarkan dari beberapa uraian diatas, penulis tertarik untuk membahas mengenai *trace* matriks simetris berbentuk khusus yang dibahas oleh [9], [10] dan [11], tetapi dengan ukuran yang diperbesar sampai $n \times n$ dengan pangkat bilangan bulat positif. Maka judul pada tugas akhir ini ialah

“Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas maka didapatkan suatu rumusan masalah yaitu bagaimana bentuk umum dari *trace* matriks simetris berbentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif ?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini adalah *trace* matriks simetris berbentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif yang berbentuk sebagai berikut:

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & \dots & b \\ b & 0 & b & b & \dots & b \\ b & b & 0 & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & b & \dots & 0 \end{bmatrix} \forall b \in R, b \neq 0 \tag{1.1}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian pada tugas akhir ini adalah mendapatkan bentuk umum *trace* matriks simetris berbentuk khusus $n \times n$ dari Persamaan (1.1) berpangkat bilangan bulat positif.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun beberapa manfaat dari penulisan ini adalah:

1. Memberikan wawasan kepada penulis dan pembaca tentang *trace* matriks simetris berbentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif.
2. Sebagai referensi baru dalam dunia pendidikan tepatnya pada bidang matematika.

1.6 Sistematika Penelitian

Adapun sistematika pada penulisan penelitian ini yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini berisikan tentang latar belakang, rumusan masalah, batas masalah, tujuan masalah, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan landasan teori yang digunakan yaitu matriks simetris, perkalian matriks, perpangkatan matriks, *trace* matriks, *trace* matriks berpangkat dan induksi matematika.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisikan tahapan-tahapan yang digunakan untuk menentukan bentuk umum dari *trace* matriks simetris berbentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan dalam mendapatkan bentuk umum *trace* matriks simetris $n \times n$ berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisikan kesimpulan dari semua pembahasan pada tugas akhir ini dan saran dari penulis.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB II LANDASAN TEORI

Pada bagian ini akan dibahas teori pendukung untuk menyelesaikan permasalahan dalam penelitian ini.

2.1 Matriks Simetris

Definisi 2.1 [12] Suatu matriks bujursangkar A adalah simetris (*symmetric*) jika $A = A^T$.

Definisi 2.2 [12] Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari A (*transpose of A*), dinyatakan dengan A^T , didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A ; sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A , kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A , dan seterusnya.

Contoh 2.1 Diberikan suatu matriks B dengan ukuran 3×3 . Tentukan B^T !

Penyelesaian:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 5 & -7 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ maka diperoleh } B^T = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 5 & -7 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.1 [7] Jika A dan B adalah matriks-matriks simetris dengan ukuran yang sama, dan jika k adalah skalar sebarang, maka:

1. A^T adalah simetris
2. $A + B$ dan $A - B$ adalah simetris
3. kA adalah simetris

Contoh 2.2 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix}$ maka tentukan

- i. A dan B adalah simetris
- ii. $A + B$ dan $A - B$ adalah simetris
- iii. kA dan kB adalah simetris

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Penyelesaian:

i. Akan dibuktikan bahwa A dan B adalah simetris

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ diperoleh $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ sehingga $A = A^T$

Diberikan $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix}$ diperoleh $B^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix}$ sehingga $B = B^T$

Dapat dilihat bahwa $A = A^T$ dan $B = B^T$, maka matriks A dan B adalah matriks simetris.

ii. Akan dibuktikan bahwa $A + B$ dan $A - B$ adalah simetris

a. Akan ditunjukkan bahwa $A + B = (A + B)^T$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 11 & 0 \\ 11 & 6 & 11 \\ 0 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 15 & 2 \\ 15 & 11 & 15 \\ 2 & 15 & 12 \end{bmatrix}, \text{ sehingga}$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} -1 & 15 & 2 \\ 15 & 11 & 15 \\ 2 & 15 & 12 \end{bmatrix}$$

b. Akan dibuktikan bahwa $A - B = (A - B)^T$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 11 & 0 \\ 11 & 6 & 11 \\ 0 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -7 & -1 & -7 \\ 2 & -7 & -12 \end{bmatrix}, \text{ sehingga}$$

$$(A - B)^T = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -7 & -1 & -7 \\ 2 & -7 & -12 \end{bmatrix}$$

Dari hasil yang diperoleh $A + B = (A + B)^T$ dan $A - B = (A - B)^T$ maka terbukti $A + B$ dan $A - B$ adalah simetris.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Akan dibuktikan kA dan kB adalah simetris.

$$kA = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 9 & 5 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 9k & 2k \\ 9k & 5k & 9k \\ 2k & 9k & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$(kA)^T = \begin{bmatrix} k & 9k & 2k \\ 9k & 5k & 9k \\ 2k & 9k & 0 \end{bmatrix} \text{ sehingga } kA = (kA)^T$$

$$kB = k \cdot \begin{bmatrix} -2 & 18 & 8 \\ 18 & 6 & 18 \\ 8 & 18 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k & 18k & 8k \\ 18k & 6k & 18k \\ 8k & 18k & 12k \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$(kB)^T = \begin{bmatrix} -2k & 18k & 8k \\ 18k & 6k & 18k \\ 8k & 18k & 12k \end{bmatrix} \text{ sehingga } kB = (kB)^T$$

Dari hasil perolehan diatas maka kA dan kB terbukti adalah simetris.

2.2 Perkalian Matriks

Perkalian matriks terdiri dua cara ialah perkalian matriks dengan skalar dan perkalian matriks dengan matriks.

2.2.1 Perkalian Matriks dengan Skalar

Definisi 2.3 [12] Jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasilkali-nya (product) cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan c . Matriks cA disebut sebagai klipatan scalar (*scalar multiple*) dari A .

Contoh 2.3 Diberikan Matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 7 & 4 \\ 2 & 15 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ dan $k = 4$

Penyelesaian:

$$kA = 4 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 9 & 7 & 4 \\ 2 & 15 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(5) & 4(9) & 4(7) & 4(4) \\ 4(2) & 4(15) & 4(8) & 4(4) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 20 & 36 & 28 & 16 \\ 8 & 60 & 32 & 16 \end{bmatrix}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.2 Perkalian Matriks dengan Matriks

Definisi 2.4 [12] Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasilkali (*product*) AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB , pisahkanlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B . Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

Contoh 2.4 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 8 & 9 & 11 \\ 5 & 12 & 4 \end{bmatrix}$ tentukan

perkalian matriks A dan B !

Penyelesaian:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 8 & 9 & 11 \\ 5 & 12 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 & 123 & 89 \\ 108 & 201 & 143 \\ 57 & 131 & 57 \end{bmatrix}.$$

2.3 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.5 [12] Jika A adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat integer taknegatif dari A adalah:

$$A^0 = I, A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n \text{ faktor}} \quad (n > 0).$$

Selanjutnya jika A dibalik, maka definisi dari pangkat integer negative dari A adalah :

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n \text{ faktor}}$$

Contoh 2.5 Diberikan suatu matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ tentukan A^2 dan A^3 !

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan aturan perkalian matriks maka diperoleh:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & -10 & 3 \\ 26 & -6 & -24 & 9 \\ 15 & 14 & -15 & 18 \end{bmatrix}$$

dan

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & -10 & 3 \\ 26 & -6 & -24 & 9 \\ 15 & 14 & -15 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & 26 & -8 \\ -76 & 16 & -41 & 9 \\ 125 & -40 & -111 & 55 \\ 27 & 47 & -54 & 76 \end{bmatrix}$$

2.4 Trace Matriks

Definisi 2.6 [12] Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka trace dari A (*trace of A*), yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A , *trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan bujursangkar.

Contoh 2.6 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(A)$ dan $tr(A^2)$!

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Definisi (2.6), maka $tr(A)$ dan $tr(A^2)$ adalah sebagai berikut:

$$tr(A) = 1 + 9 + 1 + 3 = 14$$

Untuk menentukan $tr(A)^2$, maka matriks A harus dikalikan terlebih dahulu

$$A^2 = A \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 48 & 25 & 62 \\ 30 & 160 & 83 & 197 \\ 6 & 24 & 13 & 34 \\ 12 & 32 & 28 & 71 \end{bmatrix} \quad \text{maka diperoleh:}$$

$$tr(A)^2 = 10 + 160 + 13 + 71 = 254.$$

2.5 Trace Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pembahasan mengenai bentuk umum trace matriks berpangkat dibahas oleh [11], pada penelitian tersebut membahas tentang *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat. Untuk mendapatkan bentuk umum tersebut. Berikut langkah-langkah untuk mendapatkannya sebagai berikut:

a. Diberikan matriks simetris $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix} \forall b \in R, b \neq 0$

b. Menentukan A_5^2 sampai A_5^{10}

c. Diduga bentuk umum $(A_5)^n$, untuk n positif

Maka diperoleh dugaan :

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$= \begin{bmatrix} \frac{4^n - (-1)^{n+1} 4}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n \\ \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n - (-1)^{n+1} 4}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n \\ \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n - (-1)^{n+1} 4}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n \\ \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n - (-1)^{n+1} 4}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n \\ \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n - (-1)^{n+1} 4}{5} b^n \end{bmatrix}$$

Pendugaan bentuk diatas akan dibuktikan dengan induksi matematika yang disajikan pada Teorema berikut:

Teorema 2.2 Diberikan matriks dengan bentuk $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix} \forall b \in R, b \neq 0$

maka:

$$P(n): A_5^n = \begin{bmatrix} \frac{4^n - (-1)^{n+1} 4}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n \\ \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n - (-1)^{n+1} 4}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n \\ \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n - (-1)^{n+1} 4}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n \\ \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n - (-1)^{n+1} 4}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n \\ \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5} b^n & \frac{4^n - (-1)^{n+1} 4}{5} b^n \end{bmatrix}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penerjemahan atau keperluan resmi yang lain.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa

Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, maka

$$p(1): A_5^1 = \begin{bmatrix} \frac{4^1 - (-1)^{1+1} 4}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 \\ \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 - (-1)^{1+1} 4}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 \\ \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 - (-1)^{1+1} 4}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 \\ \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 - (-1)^{1+1} 4}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 \\ \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 + (-1)^{1+1}}{5} b^1 & \frac{4^1 - (-1)^{1+1} 4}{5} b^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}$$

maka terbukti bahwa $p(1)$ benar.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penerjemahan atau keperluan mendesak lainnya.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa

Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$A_5 = \begin{bmatrix} \frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k \\ \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k \\ \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k \\ \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k \\ \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} b^k \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan $p(k+1)$ juga benar

$$p(k+1): A_5^{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2} 4}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2} 4}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2} 4}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2} 4}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2} 4}{5} b^{k+1} \end{bmatrix}$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, p
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa

Perhatikan bahwa $A^{k+1} = A^k \cdot A$

$$\begin{bmatrix} \frac{4^k - (-1)^{k+1}4}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k \\ \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k - (-1)^{k+1}4}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k \\ \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k - (-1)^{k+1}4}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k \\ \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k - (-1)^{k+1}4}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k \\ \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} b^k & \frac{4^k - (-1)^{k+1}4}{5} b^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan untuk $i = j$

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1}4}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1}4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1}4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1}4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1}4}{5} \right) b^k \cdot b \\ &= 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1}4}{5} b^k \right) 4b \\ &= \left(\frac{4 \cdot 4^k + 4 \cdot (-1)^{k+1}4}{5} \right) b^{k+1} \\ &= \frac{4^{k+1} - (-1)(-1)^{k+1}4}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2}4}{5} b^{k+1}. \end{aligned}$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

$$\begin{aligned}
 a_{32} &= \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1} 4}{5} b^k \right) b^{k+1} + 0 + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1} 4}{5} b^k \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1} 4}{5} b^k \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1} 4}{5} b^k \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4 \cdot 4^k + 4 \cdot (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \frac{4^{k+1} - (-1)(-1)^{k+1} 4}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2} 4}{5} b^{k+1}, \\
 a_{33} &= \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1} 4}{5} b^k \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1} 4}{5} b^k \right) b^{k+1} + 0 + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1} 4}{5} b^k \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1} 4}{5} b^k \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4 \cdot 4^k + 4 \cdot (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \frac{4^{k+1} - (-1)(-1)^{k+1} 4}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2} 4}{5} b^{k+1}.
 \end{aligned}$$

1. Diarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penerjemahan atau keperluan mendesak lainnya.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

$$\begin{aligned}
 a_{55} &= \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^{k+1} + 0 + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4 \cdot 4^k + 4 \cdot (-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \frac{4^{k+1} - (-1)(-1)^{k+1} 4}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2} 4}{5} b^{k+1} \\
 a_{55} &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot 0 \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot 0 \\
 &= \left(\frac{4 \cdot 4^k + 4 \cdot (-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \frac{4^{k+1} - (-1)(-1)^{k+1} 4}{5} b^{k+1} = \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2} 4}{5} b^{k+1}
 \end{aligned}$$

1. Diarjang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, p
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarjang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

Akan ditunjukkan untuk $i \neq j$

Dambil sebarang entri yaitu:

$$a_{12} = \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b$$

$$= \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 3b$$

$$= \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^{k+1} + 0 + \left(\frac{4^k \cdot 3 + (-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1}$$

$$= \left(\frac{4^k - 4(-1)^{k+1} + 3 \cdot 4^k + 3(-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1}$$

$$= \left(\frac{4^{k+1} + (-1)(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} = \left(\frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} \right) b^{k+1}$$

$$a_{13} = \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b$$

$$= \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 3b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0$$

$$= \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k \cdot 3 + (-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1} + 0$$

1. Diararang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, p
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diararang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa



$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{4^k - 4(-1)^{k+1} + 3 \cdot 4^k + 3(-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4^{k+1} + (-1)(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} = \left(\frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} \right) b^{k+1}. \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 3b \\
 &= 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 3b \\
 &= \left(\frac{4^k - 4(-1)^{k+1} + 3 \cdot 4^k + 3(-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4^{k+1} + (-1)(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} = \left(\frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} \right) b^{k+1},
 \end{aligned}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penerjemahan, atau penyediaan informasi.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

$$\begin{aligned}
 a_{34} &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b \\
 &= \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 3b \\
 &= \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^{k+1} + 0 + \left(\frac{4^k \cdot 3 + (-1)^{k+1} 3}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4^k - 4(-1)^{k+1} + 3 \cdot 4^k + 3(-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4^{k+1} + (-1)(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} = \left(\frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} \right) b^{k+1}. \\
 a_{34} &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 3b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 \\
 &= \left(\frac{4^k \cdot 3 + (-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} 4}{5} \right) b^{k+1} + 0 \\
 &= \left(\frac{3 \cdot 4^k + 3(-1)^{k+1} + 4^k - 4(-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1}
 \end{aligned}$$

1. Diarag mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, p
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarag mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{4^{k+1} + (-1)(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} = \left(\frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} \right) b^{k+1}, \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 3b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 \\
 &= \left(\frac{4^k \cdot 3 + (-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^{k+1} + 0 \\
 &= \left(\frac{4^k \cdot 3 + 3(-1)^{k+1} + 4^k - 4(-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4^{k+1} + (-1)(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} = \left(\frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} \right) b^{k+1}, \\
 a_{41} &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^k \cdot b \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 3b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^k \cdot b \\
 &= 0 + \left(\frac{4^k \cdot 3 + (-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^{k+1}
 \end{aligned}$$

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penerjemahan, atau untuk keperluan lain.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{4^k + 3(-1)^{k+1} + 4^k - 4(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4^{k+1} + (-1)(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} = \left(\frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} \right) b^{k+1}, \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 3b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^k \cdot b \\
 &= \left(\frac{3 \cdot 4^k + (-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1} + 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4^k + 3(-1)^{k+1} + 4^k - 4(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4^{k+1} + (-1)(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} = \left(\frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} \right) b^{k+1}, \\
 a_{52} &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^k \cdot b \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 3b + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^k \cdot b
 \end{aligned}$$

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penerjemahan, atau untuk tujuan yang serupa.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa



$$\begin{aligned}
 &= 0 \left(\frac{4^k \cdot 3 + (-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1} + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4^k + 3(-1)^{k+1} + 4^k - 4(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4^{k+1} + (-1)(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} = \left(\frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} \right) b^{k+1}, \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^k \cdot b \\
 &= \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 3b + \left(\frac{4^k + (-1)^{k+1}}{5} \right) b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^k \cdot b \\
 &= \left(\frac{4^k \cdot 3 + (-1)^{k+1} \cdot 3}{5} \right) b^{k+1} + 0 + \left(\frac{4^k - (-1)^{k+1} \cdot 4}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{3 \cdot 4^k + 3(-1)^{k+1} + 4^k - 4(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} \\
 &= \left(\frac{4^{k+1} + (-1)(-1)^{k+1}}{5} \right) b^{k+1} = \left(\frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} \right) b^{k+1}.
 \end{aligned}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penerjemahan atau keperluan mendesak lainnya.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa



Hak Cipta Dihindangi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penerjemahan atau keperluan mendesak lainnya.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa

Berdasarkan pada perkalian entri-entri diatas tersebut terbukti bahwa $p(k + 1)$ benar.

$$\left[\begin{array}{ccccc} \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} & \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1} \end{array} \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{4^{k+1} - (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1}, i = j \\ \frac{4^{k+1} + (-1)^{k+2}}{5} 4^{k+1} b^{k+1}, i \neq j \end{cases}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

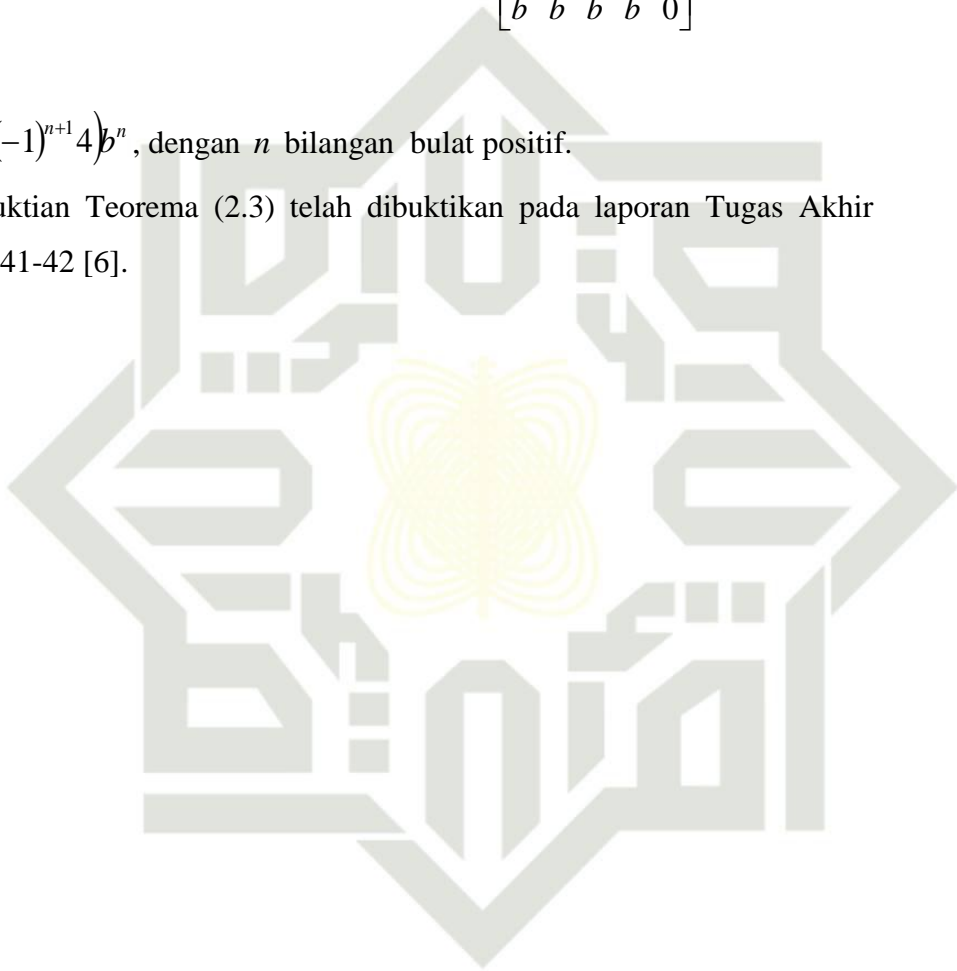
Pembuktian bentuk umum *trace* matriks simetris A_5^n

Teorema 2.3 Diberikan matriks dengan bentuk $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix} \forall b \in R, b \neq 0$

maka:

$$t(A_5^n) = (4^n - (-1)^{n+1} 4) b^n, \text{ dengan } n \text{ bilangan bulat positif.}$$

Bukti: Pembuktian Teorema (2.3) telah dibuktikan pada laporan Tugas Akhir pada halaman 41-42 [6].



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.6 Induksi Matematika

Prinsip induksi sederhana berbunyi sebagai berikut: Misalkan $p(n)$ adalah bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n , untuk membuktikan tersebut perlu ditunjukkan bahwa:

a. $p(1)$ benar

b. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n .

Langkah 1. dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**. Setelah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka terbukti sudah jika $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n [13].

Contoh 2.7 Buktikan bahwa $2+4+6+\dots+2n=n^2+n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

Penyelesaian:

a. Basis induksi

Akan ditunjukkan $p(1)$ benar.

Perhatikan bahwa:

$$p(1): 2=1^2+1$$

$$2=2. \quad p(1) \text{ benar}$$

b. Langkah induksi

Asumsikan $p(n)$ benar, yaitu:

$$p(n): 2+4+6+\dots+2n=n^2+n$$

Selanjutnya akan dibuktikan $p(n+1)$ benar, yaitu:

$$p(n+1): 2+4+6+\dots+2n+2(n+1)=(n+1)^2+(n+1)$$

Untuk membuktikan ini, tunjukkan bahwa:

$$\begin{aligned} 2+4+6+\dots+2n+2(n+1) &= [2+4+6+\dots+2n]+[2(n+1)] \\ &= n^2+n+2(n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= n^2 + n + 2n + 2 \\ &= (n^2 + 2n + 1) + (n + 1) \\ &= (n + 1)(n + 1) + (n + 1) \\ &= (n + 1)^2 + (n + 1) \end{aligned}$$

Terbukti jika $p(n + 1)$ benar.

Karena langkah (a) dan (b) terbukti benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n , terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1, 2 + 4 + 6 + \dots + n = n^2 + n$.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB III METODE PENELITIAN

Metodologi penelitian merupakan langkah-langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan tugas akhir ini untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks simetris berbentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Diberikan suatu matriks simetris $A_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \cdots b \\ b & 0 & b & b \cdots b \\ b & b & 0 & b \cdots b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \cdot b \\ b & b & b & b \cdots 0 \end{bmatrix} \forall b \in R, b \neq 0$
2. Telah diperoleh $(A_{3 \times 3})^n$, $(A_{4 \times 4})^n$ dan $(A_{5 \times 5})^n$ dari penelitian [9], [10] dan [11].
3. Menentukan $(A_{6 \times 6})^2$ sampai $(A_{6 \times 6})^{10}$, $(A_{7 \times 7})^2$ sampai $(A_{7 \times 7})^{10}$ dan $(A_{8 \times 8})^2$ sampai $(A_{8 \times 8})^{10}$.
4. Menduga bentuk umum perpangkatan matriks simetris $(A_{n \times n})^m$ dengan m bilangan bulat positif.
5. Membuktikan bentuk umum perpangkatan matriks simetris $(A_{n \times n})^m$ dengan m bilangan bulat positif menggunakan pembuktian induksi matematika.
6. Membuktikan $tr(A_{n \times n})^m$, m bilangan bulat positif dengan pembuktian langsung menggunakan definisi *trace* matriks.
7. Mengaplikasikan bentuk umum $tr(A_{n \times n})^m$ dalam contoh soal.

BAB V PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasn pada Bab IV tentang *trace* matriks simetris berbentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Diberikan matriks simetris $n \times n$

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & \cdots & b \\ b & 0 & b & b & \cdots & b \\ b & b & 0 & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & b & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \forall b \in R, b \neq 0$$

maka diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks simetris $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif, yaitu:

$$(A_{n \times n})^m = \begin{bmatrix} \frac{(n-1)^m - (-1)^{m+1}(n-1)}{n} b^m & \frac{(n-1)^m + (-1)^{m+1}}{n} b^m & \frac{(n-1)^m + (-1)^{m+1}}{n} b^m & \cdots & \frac{(n-1)^m + (-1)^{m+1}}{n} b^m \\ \frac{(n-1)^m + (-1)^{m+1}}{n} b^m & \frac{(n-1)^m - (-1)^{m+1}(n-1)}{n} b^m & \frac{(n-1)^m + (-1)^{m+1}}{n} b^m & \cdots & \frac{(n-1)^m + (-1)^{m+1}}{n} b^m \\ \frac{(n-1)^m + (-1)^{m+1}}{n} b^m & \frac{(n-1)^m + (-1)^{m+1}}{n} b^m & \frac{(n-1)^m - (-1)^{m+1}(n-1)}{n} b^m & \cdots & \frac{(n-1)^m + (-1)^{m+1}}{n} b^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(n-1)^m + (-1)^{m+1}}{n} b^m & \frac{(n-1)^m + (-1)^{m+1}}{n} b^m & \frac{(n-1)^m + (-1)^{m+1}}{n} b^m & \cdots & \frac{(n-1)^m - (-1)^{m+1}(n-1)}{n} b^m \end{bmatrix}$$

atau

$$(A_{n \times n})^m = \begin{cases} \left(\frac{(n-1)^m - (-1)^{m+1}(n-1)}{n} \right) b^m, & i = j \\ \left(\frac{(n-1)^m + (-1)^{m+1}}{n} \right) b^m, & i \neq j \end{cases}, m \text{ bilangan bulat positif.}$$

2. Bentuk umum *trace* matriks simetris berbentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

$$tr(A_{n \times n})^m = \left((n-1)^m - (-1)^{m+1}(n-1) \right) b^m.$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

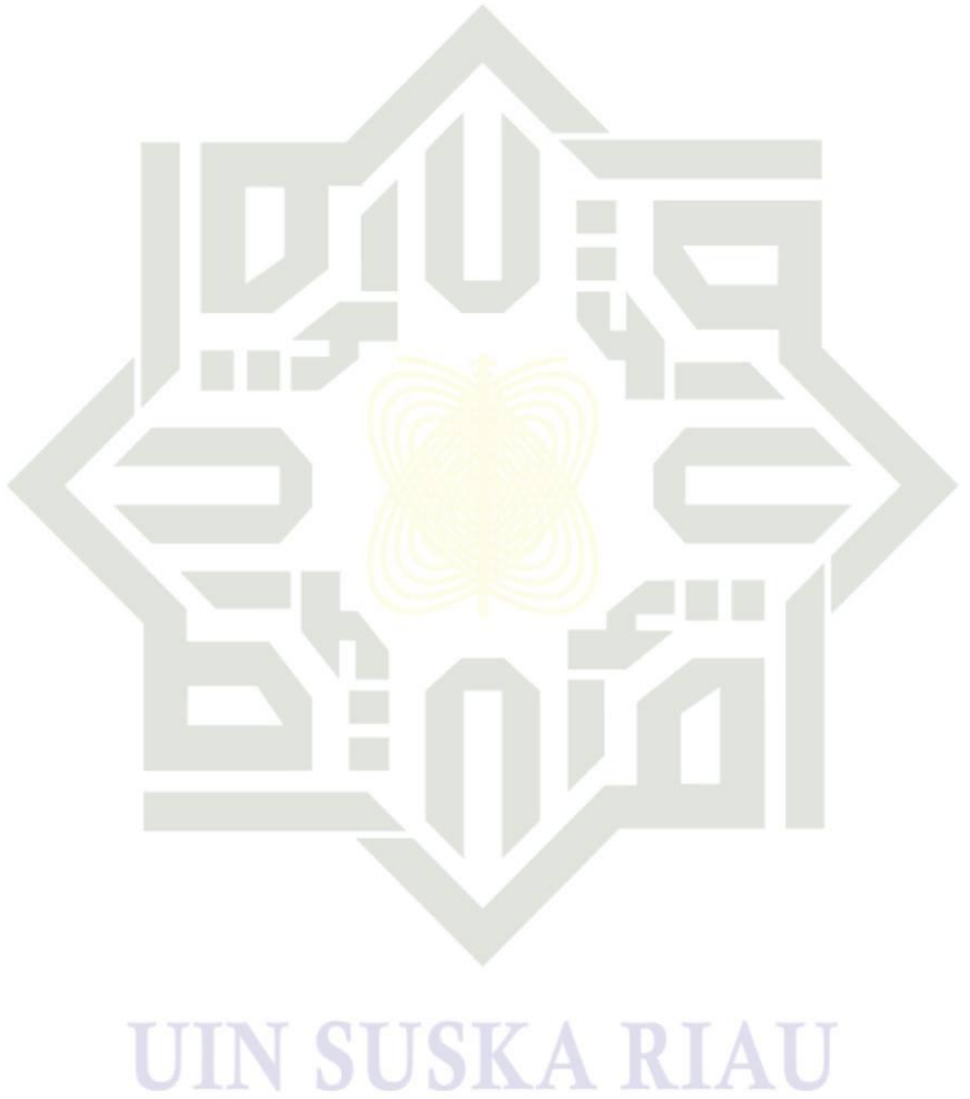
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Saran

Pada tugas akhir ini penulis membahas *trace* matriks simetris berbentuk khusus $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif. Disarankan bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini dapat memperluas dengan bentuk matriks lainnya dari laporan tugas akhir ini.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Diarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

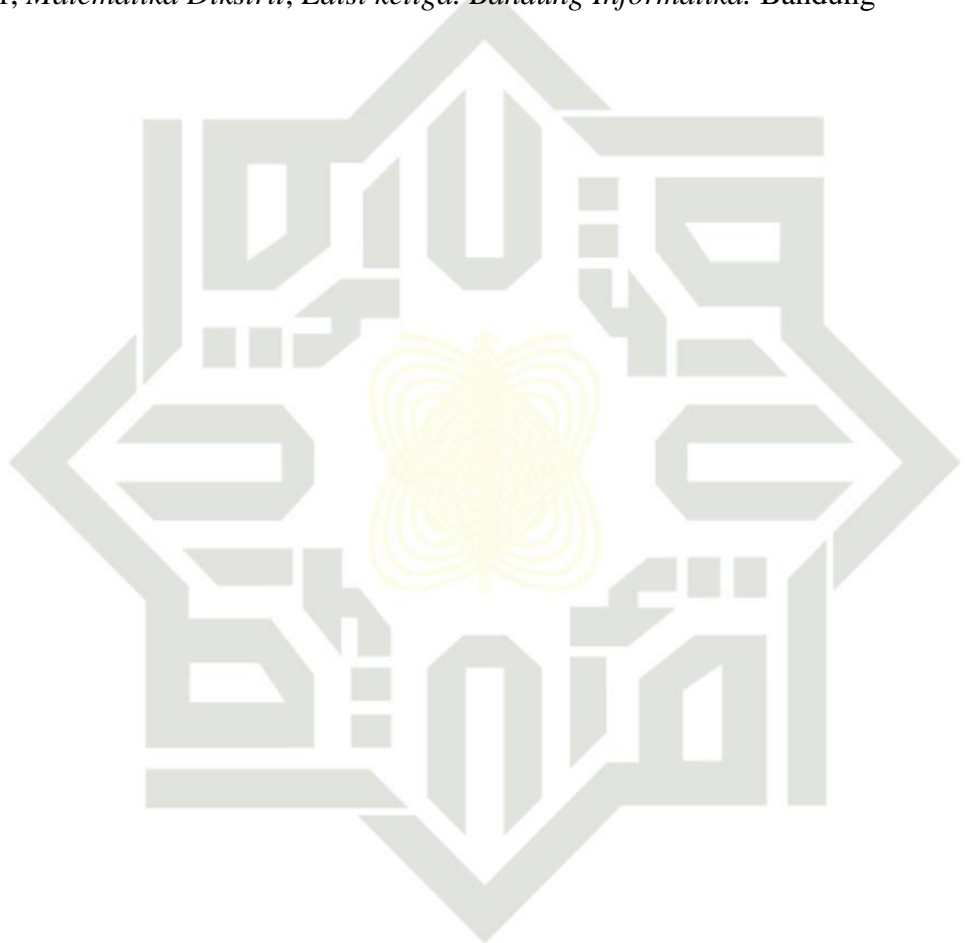
DAFTAR PUSTAKA

- [1] J. Pahade and M. Jha, "Trace of Positive Integer Power of Real 2×2 Matrices," vol. 05, no. 150–155, 2015.
- [2] F. Aryani, R. Andesta and C. Corazon Marzuki, "Trace Matriks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal. Sains Matematika. dan Statatistika.* vol. 6, no. 1, pp. 40–49, 2020.
- [3] F. Aryani and R. Taslim, "Trace Matrisk 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.*, vol. 7, no. 1, pp. 1–9, 2021.
- [4] F. Aryani and Nurul Husna, "Trace Matrisk Toeplitz Tridiagonal 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.*, vol. 4, no. 1, 2019.
- [5] Rahmawati, Ade Novia Rahma and Dkk, "Trace Matrisk Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.*, vol.5, no. 2, 2019.
- [6] F. Aryani, C. Anam and Corry Corazon Marzuki, "Trace Matrisk Simetris Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.*, vol.6, no. 1, 2020.
- [7] Haslinda, "Trace Matrisk Segitiga 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," "Skripsi UIN Sultan Syarif Kasim Riau.," 2020.
- [8] F. Aryani, K. Susilawati, dkk, "Trace Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat," "Seminar Nasional Teknologi Informasi, Kmunikasi dan Industri (SNTIKI) 12" 2020.
- [9] F. Aryani and P. Bayu Cenia, "Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat," "Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 13," 2021.
- [10] Hartina, "Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat." "Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 12," 2020..

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

- [1] F. Aryani and S. Putri Alvianov, “Trace Matriks Simetris 5×5 Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat, "Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 12, ” 2020.
- [2] H. Anton and C. Rorrer, *Aljabar Linear Elementer*, Edisi Kedelapan. Jakarta: Erlangga, 2004.
- [3] R. Munir, *Matematika Dikstrit, Edisi ketiga. Bandung Informatika*. Bandung 2005.



UIN SUSKA RIAU



DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 27 Juli 1997 di Tanjung Baru, sebagai anak ketiga dari empat bersaudara dari pasangan Bapak H. Pangadilan Nasution dan Ibu Hj. Rohimah Siregar. Penulis menyelesaikan pendidikan formal di Sekolah Dasar Negeri 0807 Tanjung Baru, Kec. Batang Lubu Sutam, Kab. Padang Lawas pada tahun 2010. Penulis melanjutkan sekolah tingkat pertama di SMP Dyah Galih Agung Pesantren Darul Arafah Raya Medan pada tahun 2013. Penulis menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas di SMA Dyah Galih Agung Pesantren Darul Arafah Raya Medan tahun 2016 dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA). Pada tahun 2016 Penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika.

Pada tahun 2020, tepatnya pada semester VIII Penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Dinas Kependudukan dan Pencatatan Sipil dengan judul **“Peramalan Jumlah Pembuatan Akte Kelahiran Tahun 2020 Dengan Menggunakan Metode Single Eksponensial”** yang dibimbing oleh Ibu Sri Basriati, S.Si., M.Si. dari tanggal 13 Januari sampai 13 Februari 2020 dan diseminarkan pada tanggal 18 nov 2020. Selanjutnya pada tahun yang sama Penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Bonal, Kecamatan Barumun Kabupaten Padang Lawas.

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.