

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

MODEL SVEIR (*SUSCEPTIBLE VACCINATED EXPOSED INFECTED RECOVERY*) TERHADAP PENYEBARAN COVID-19 DENGAN ADANYA PENGARUH MIGRASI

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh :

RISKA NASRILLIANTI
11750425184



UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2022



LEMBAR PERSETUJUAN

MODEL SVEIR (*SUSCEPTIBLE VACCINATED EXPOSED INFECTED RECOVERY*) TERHADAP PENYEBARAN COVID-19 DENGAN ADANYA PENGARUH MIGRASI

TUGAS AKHIR

oleh:

RISKA NASRILLIANTI

11750425184

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir di Pekanbaru, pada tanggal 12 Januari 2022

Ketua Program Studi

Pembimbing

Wartono, M.Sc.
NIP. 19730818 200604 1 003

Mohammad Soleh, M.Sc.
NIP.1975123 200910 1 052

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PENGESAHAN

MODEL SVEIR (*SUSCEPTIBLE VACCINATED EXPOSED INFECTED RECOVERY*) TERHADAP PENYEBARAN COVID-19 DENGAN ADANYA PENGARUH MIGRASI

TUGAS AKHIR

oleh:

RISKA NASRILLIANTI

11750425184

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Pekanbaru, pada tanggal 12 Januari 2022

Pekanbaru, 12 Januari 2022

Mengesahkan
Ketua Program Studi

Dekan

Dr. Hartono, M.Pd.

NIP. 19640301 199203 1 003

Wartono, M.Sc.

NIP. 19730818 200604 1 003

DEWAN PENGUJI :

Ketua : Fitri Aryani, M.Sc.

Sekretaris : Mohammad Soleh, M.Sc.

Anggota I : Nilwan Andiraja, S.Pd., M.Sc.

Anggota II : Irma Suryani, M.Sc.



Pampiran Surat :

Nomor : Nomor 25/2021
 Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini :

: RISKHA NASRILLIANTI
 : 11750425184
 Lahir : PEKANBARU
 Fakultas/Pascasarjana : SAINS DAN TEKNOLOGI
 : MATEMATIKA

Judul Disertasi/Thesis (Skripsi) Karya Ilmiah lainnya*:
 MODEL SEIR (SUSCEPTIBLE VACCINATED EXPOSED INFECTED RECOVERY) TERHADAP PENYEBARAN COVID-19 DENGAN ADANYA PENGARUH MIGRASI.

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan Disertasi/Thesis (Skripsi) Karya Ilmiah lainnya* dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu Disertasi/Thesis (Skripsi) Karya Ilmiah lainnya* saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan Disertasi/Thesis (Skripsi) Karya Ilmiah lainnya* saya tersebut, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan perundang-undangan.

Demikian Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 27 JANUARI 2022
 Yang membuat pernyataan



RISKHA NASRILLIANTI
 NIM : 11750425184

* pilih salah satu sesuai jenis karya tulis

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
 Dilarang mengutip, memperbanyak, atau menyalin sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seijin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 12 Januari 2022

Yang membuat pernyataan,

RISKA NASRILLIANTI
11750425184

UIN SUSKA RIAU

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERSEMBAHAN

Barang siapa menempuh suatu jalan (cara) untuk mendapatkan ilmu, maka Allah SWT pasti mudahkan baginya jalan menuju surga”
(HR. Muslim)

Allhamdulillahrabbi'l'aalamiin ucapan syukur kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas nikmat, karunia serta rahmatnya sehingga saya dapat menyelesaikan sebuah skripsi sederhana ini. Shalawat dan salam selalu terlimpahkan kepada Rasulullah Muhammad Shalallahu Alaihi Wassalaam.

Kupersembahkan karya sederhana ini kepada orang yang sangat kukasihi dan kusayangi.

Bapak dan Ibu Tercinta

Sebagai tanda bakti, hormat dan rasa terima kasih yang tiada terhingga ku persembahkan karya kecil ini kepada Bapak (Nasrul) dan Ibu (Ramulis) Terima kasih Paa... Terima kasih Maa...

Orang terdekatku

Sebagai tanda terima kasih, ku persembahkan karya kecil ini kepada kakak-kakakku (Kak Iya, Kak Ina, Kak A), keponakanku (Farzhan, Asraf, Fierly) dan saudara-saudaraku yang selalu memberiku semangat dan selalu menjadi tempatku untuk berkeluh kesah. Terima kasih...

Teman-teman

Buat kawan-kawanku yang selalu memberikan motivasi, nasehat, dukungan, yang selalu memberikan semangat untuk menyelesaikan skripsi ini sekaligus pejuang skripsi (Uus, Syafira, Tifa, Vicky, Tiza, Puspa, Raysha, Tasya, Ryandika, Simin, Yola, dan Kawan-kawan matematika angkatan 2017 terutama kelas C)

Dosen Pembimbing Tugas Akhir

Bapak Mohammad Soleh, M.Sc selaku dosen pembimbing skripsiku. Terima kasih banyak kepada bapak sudah membantuku selama ini, serta menasehati, membimbing dan mengarahkanku sampai skripsi ini selesai.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

MODEL SVEIR (*SUSCEPTIBLE VACCINATED EXPOSED INFECTED RECOVERY*) TERHADAP PENYEBARAN COVID-19 DENGAN ADANYA PENGARUH MIGRASI

RISKA NASRILLIANTI
NIM: 11750425184

Tanggal Sidang : 12 Januari 2022
Tanggal Wisuda : 2022

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Pada tugas akhir ini dibahas tentang penyebaran penyakit COVID-19 dengan adanya pengaruh migrasi menggunakan model SVEIR. Titik ekuilibrium ditentukan dengan menyelesaikan persamaan pada model SVEIR dan diuji kestabilannya dengan kriteria nilai eigen dan *Routh Hurwitz*. Analisis model kestabilan keadaan bebas penyakit dan endemik dengan menunjukkan kestabilan asimtotik keduanya. Jika imigrasi lebih besar dari emigrasi maka pada bebas penyakit populasi yang terinfeksi akan semakin bertambah dan jika imigrasi lebih kecil dari emigrasi maka populasi yang terinfeksi menjadi menurun. Pada simulasi jika jumlah individu imigrasi lebih banyak dari emigrasi maka jumlah individu yang terinfeksi penyakit COVID-19 semakin meningkat dan waktu berkurangnya individu yang terinfeksi penyakit COVID-19 semakin lama.

Kata Kunci: model SVEIR, Routh-Hurwitz, migrasi, stabil asimtotik, titik ekuilibrium.

UIN SUSKA RIAU

SVEIR MODEL (SUSCEPTIBLE VACCINATED EXPOSED INFECTED RECOVERY) ON THE SPREAD OF COVID-19 WITH THE EFFECT OF MIGRATION

RISKA NASRILLIANTI
11750425184

Date of Final Exam : 12 January 2022
Date of Graduation : 2022

Mathematics Program Study
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

In this final project discussed about the spread of COVID-19 disease with the influence of migration using a SVEIR model. The equilibrium point is determined by completing the equation on the SVEIR model and tested its stability with the criteria for eigen and Routh Hurwitz. Analisis of the stability model of disease and endemic conditions by showing the stability of the asymptoth of both. If immigration is greater than emigration, the diseasefree of the infected population will increase and if immigration is smaller than emigration, the infected population becomes decreasing. In simulation, if the number of individual immigration is more than emigration, the number of individuals infected with COVID-19 disease is increasing and the reduced time of individuals infected with COVID-19 is longer.

Keywords: *SVEIR model, Routh Hurwitz, Migration, Stable Asymptotic, Equilibrium Point.*

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum wa rahmatullahi wabarakatuh

Alhamdulillah segala puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah *Subhanahu Wata'ala* yang telah memberikan kemudahan sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini. Berkat rahmat, nikmat, kesempatan dan kesehatan sehingga penulis bisa menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul “Model SVEIR (*Susceptible Vaccinated Exposed Infected Recovery*) Terhadap Penyebaran COVID-19 dengan Adanya Pengaruh Migrasi”.

Shalawat serta salam kita hadiahkan kepada junjungan alam Nabi Besar Muhammad *Shalallahu Alaihi Wassalaam* karena berkat perjuangan beliau kita umat manusia dapat dibawa dari alam kegelapan ditunjukkan ke alam yang penuh dengan pengetahuan. Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat yang harus dilakukan untuk memperoleh gelar sarjana Sains di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini penulis banyak sekali mendapat bimbingan, bantuan, arahan, nasehat, petunjuk, perhatian serta semangat dari berbagai pihak baik langsung maupun tidak langsung terutama orang tua tercinta. Oleh karena itu, dengan hati tulus ikhlas penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc., selaku Penguji I sekaligus Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

5. Ibu Rahmadeni, M.Si., selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan dukungan serta arahan kepada penulis selama perkuliahan.
 6. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc., selaku pembimbing Tugas Akhir penulis yang selalu ada dan memberikan bimbingan serta arahan sehingga Tugas Akhir ini dapat diselesaikan.
 7. Ibu Irma Suryani, M.Sc., selaku Penguji II yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga Tugas Akhir ini dapat diselesaikan.
 8. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
 9. Kedua orang tua tercinta, Bapak Nasrul dan Ibu Ramulis, yang tiada hentihentinya mendoakan, memberi dorongan moril maupun materi selama menempuh pendidikan serta kakak, abang dan keponakan penulis yang tersayang yaitu Kak iya, Kak Ina, Kak A, Farzhan, Asraf, dan Fierly.
 10. Semua pihak yang telah banyak membantu baik secara langsung maupun tidak langsung dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini yang tidak dapat ditulis satu persatu.
 11. Teman-teman di Program Studi Matematika, terkhusus Uus, Syafira, Tifa, Vicky, Tiza, Puspa, dan Angkatan 2017 kelas C.
- Tugas akhir ini telah disusun semaksimal mungkin oleh penulis. Namun, tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan dalam penulisan masih sangat diharapkan oleh penulis demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.

Wassalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 12 Januari 2022

UIN SUSKA RIAU

Riska Nasrillianti



DAFTAR ISI

LEMBAR PERSETUJUAN	ii
LEMBAR PENGESAHAN.....	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL.....	iv
LEMBAR PERNYATAAN	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
KATA PENGANTAR.....	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR SIMBOL.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xiv
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Masalah.....	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
BAB II LANDASAN TEORI.....	6
2.1 <i>Coronavirus Diseas</i> 19 (COVID-19).....	6
2.2 Nilai Eigen	7
2.3 Persamaan Diferensial.....	8
2.4 Sistem Persamaan Diferensial	10
2.5 Titik Ekuilibrium.....	12
2.6 Kestabilan Titik Ekuilibrium.....	13
2.7 Kriteria Routh Hurwitz.....	17

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB III METODE PENELITIAN	19
BAB IV PEMBAHASAN.....	21
4.1 Model SVEIR Terhadap Penyebaran COVID-19	21
4.1.1 Pembentukan Model Matematika	21
4.2 Titik Ekuilibrium.....	24
4.2.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit	24
4.2.2 Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit	25
4.3 Kestabilan Titik Ekuilibrium.....	26
4.3.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit	29
4.3.2 Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit	33
4.4 Simulasi Kasus Model SVEIR.....	39
BAB V PENUTUP	52
5.1 Kesimpulan.....	52
5.2 Saran.....	53
DAFTAR PUSTAKA.....	54
LAMPIRAN	55
DAFTAR RIWAYAT HIDUP.....	56



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

© Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
 UIN Suska Riau
 State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

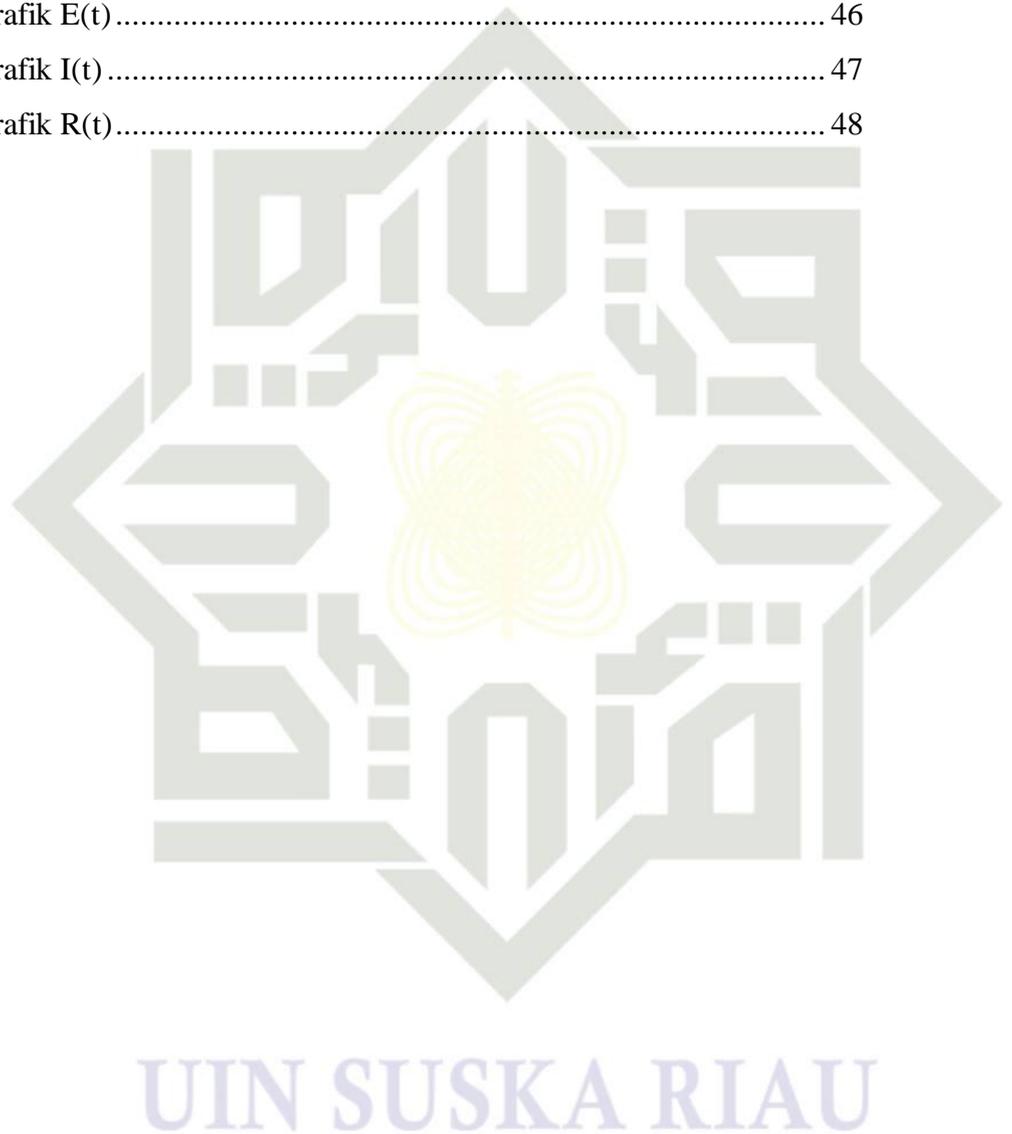
DAFTAR SIMBOL

- N : Jumlah populasi individu pada waktu ke-t
- S : Jumlah individu rentan terinfeksi pada waktu ke-t
- V : Jumlah individu divaksinasi pada waktu ke-t
- E : Jumlah individu laten pada waktu ke-t
- I : Jumlah individu terinfeksi pada waktu ke-t
- R : Jumlah individu sembuh pada waktu ke-t
- μ : Laju kelahiran dan kematian alami
- θ : Individu rentan yang divaksinasi
- $1 - \theta$: Individu rentan yang tidak divaksinasi
- ρ_1 : Laju imigrasi
- ρ_2 : Laju emigrasi
- γ : Laju vaksin berkurang
- σ : Laju vaksin yang bekerja dengan baik
- α : Laju individu rentan menjadi individu laten setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi
- β : Laju individu laten menjadi individu terinfeksi
- ζ : Laju kematian yang disebabkan oleh COVID-19
- δ : Laju kesembuhan

UIN SUSKA RIAU

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1	Skema Model SVEIR pada Penyebaran COVID-19	23
Gambar 4.2	Grafik $S(t)$	44
Gambar 4.3	Grafik $V(t)$	44
Gambar 4.4	Grafik $E(t)$	46
Gambar 4.5	Grafik $I(t)$	47
Gambar 4.6	Grafik $R(t)$	48

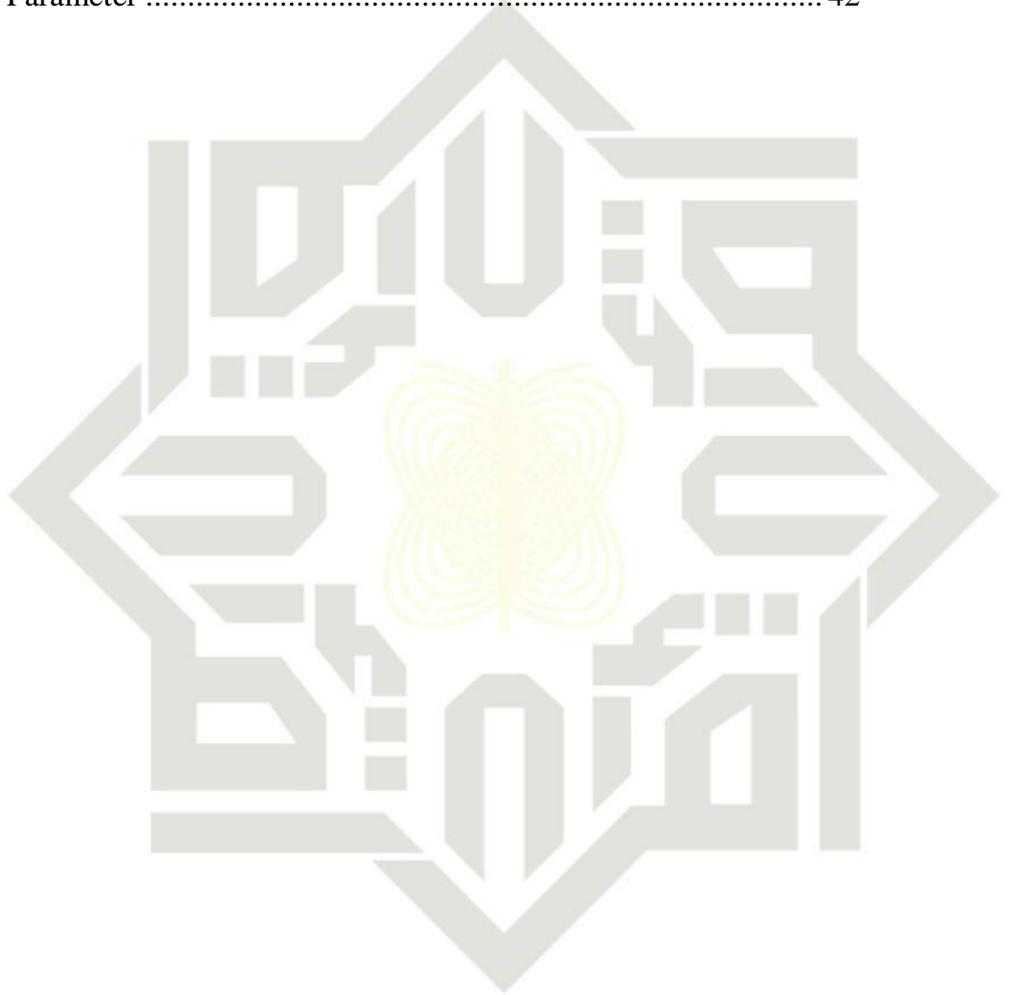


Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR TABEL

Tabel 4. 1 Daftar Variabel pada Penyebaran COVID-19	21
Tabel 4. 2 Daftar Parameter pada Penyebaran COVID-19	21
Tabel 4. 3 Data Penyebaran COVID-19	39
Tabel 4. 4 Nilai Parameter	42

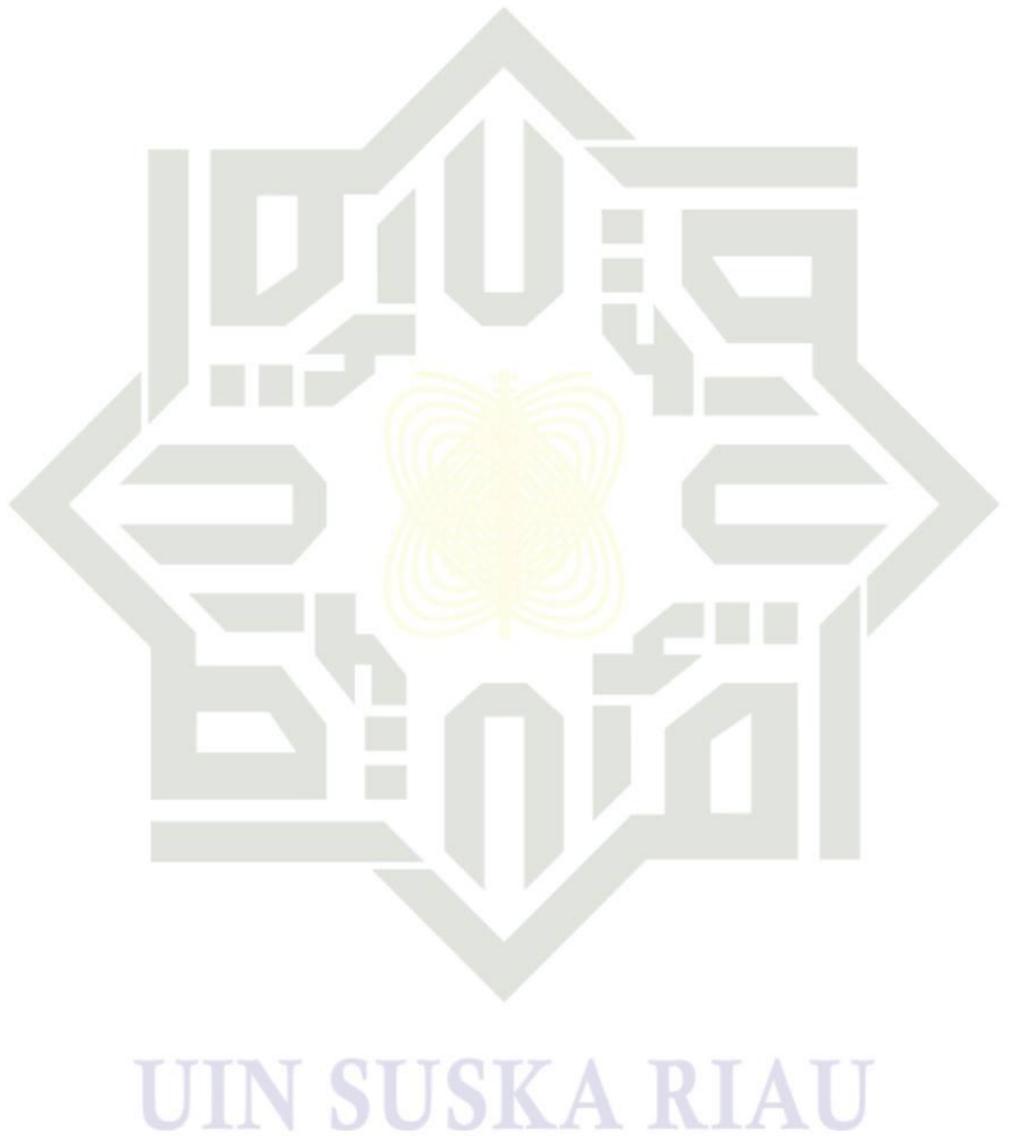


UIN SUSKA RIAU

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	55
----------------	----



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB I PENDAHULUAN

1. Latar Belakang

Saat ini dunia sedang dilanda wabah *Corona Virus Disease 2019* (COVID-19). COVID-19 disebabkan oleh coronavirus jenis baru yang di beri nama *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2* (SARS-CoV-2). Virus ini bermula dari Kota Wuhan, Provinsi Hubei, Tiongkok pada bulan Desember 2019 dan pada tanggal 11 Maret 2020 COVID-19 ditetapkan sebagai pandemi oleh *World Health Organization* (WHO) [1].

Virus ini menyebar dari manusia ke manusia melalui percikan air liur orang yang sedang batuk dan bersin (*droplet*). Kemudian virus ini menjadi teror yang menakutkan bagi masyarakat dunia, terutama setelah merenggut ribuan jiwa dalam waktu yang relatif singkat. Sampai pada tanggal 31 Maret 2021 masyarakat yang terkonfirmasi positif COVID-19 berjumlah 128,540,982 jiwa dan 2,808,308 jiwa meninggal dunia yang sudah tersebar di 223 negara salah satunya Indonesia.

Kasus pertama terinfeksi di Indonesia pada tanggal 02 Maret 2020 yang diumumkan oleh Gugus Tugas COVID-19, hingga saat ini pada tanggal 31 Maret 2021 yang terinfeksi berjumlah 1,511,712 jiwa dan yang meninggal dunia berjumlah 40,858 jiwa. Pada tanggal 05 April 2021 Riau berada di peringkat ke-9 Provinsi yang terinfeksi COVID-19 di Indonesia.

Untuk menekan penyebaran COVID-19, warga Riau diminta untuk menaati protokol kesehatan. Selain menerapkan protokol kesehatan, kini Indonesia sedang menjalankan program vaksinasi. Vaksin berguna untuk mendorong pembentukan kekebalan pada penyakit COVID-19 agar tidak tertular dari individu yang terpapar serta dapat mengurangi gejala berat yang muncul. Meskipun sudah di vaksin, kita tetap melakukan upaya perlindungan dengan 3M sebagai protokol kesehatan selama pandemik COVID-19 yaitu: Memakai masker, Menjaga jarak dan Mencuci tangan dengan sabun [2]. Selain himbauan untuk menerapkan



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

protokol kesehatan, pemerintah juga menghimbau untuk melakukan *social distancing* dan *physical distancing* serta melakukan Pembatasan Sosial Berskala Besar (PSBB) agar memperkecil penyebaran COVID-19. Kebijakan pemerintah dengan PSBB dapat membatasi adanya migrasi masyarakat dari satu daerah ke daerah lain yang dapat membuka peluang penyebaran COVID-19.

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika memberikan peranan dalam menganalisa permasalahan yang muncul di berbagai bidang. Misalnya peranan matematika di bidang kesehatan dalam fenomena penyebaran penyakit menular dapat dianalisis dengan pemodelan matematika. Model matematika merupakan sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang mengungkapkan perilaku suatu masalah yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Tujuan membuat model matematika adalah untuk memprediksi bagaimana suatu penyakit menyebar dari waktu ke waktu, memprediksi jumlah korban yang terinfeksi, memprediksi durasi suatu endemi/pandemi akan terjadi, memperkirakan berbagai parameter epidemiologis seperti laju sebaran wabah (*reproduction rate*).

Salah satu model matematika untuk mempelajari sebaran wabah yang terjadi di suatu wilayah adalah Model SIR yang pertama kali dikemukakan oleh Kermack-McKendrick pada tahun 1927. Model ini memiliki tiga kompartemen atau subpopulasi, yaitu subpopulasi yang rentan atau dapat tertular (*susceptible*), subpopulasi yang terinfeksi dan dapat sembuh (*infected*), subpopulasi yang dinyatakan sembuh dan kebal terhadap penularan (*recovery*) [3]. Selanjutnya model SEIR yang memiliki empat kompartemen atau subpopulasi, yaitu menambahkan subpopulasi laten (*Exposed*) pada model SIR. Kemudian model SVEIR oleh Sitty, dkk [3] yang memiliki lima kompartemen atau subpopulasi yang dikembangkan dari model SEIR, yaitu menambahkan subpopulasi yang divaksinasi (*Vaccinated*).

COVID-19 merupakan penyakit yang muncul di akhir tahun 2019, virus ini menyebar begitu cepat. Sudah banyak penelitian terkait model matematika penyebaran COVID-19, seperti penelitian yang dilakukan oleh Bitla [4] yang menggunakan model sederhana SIR (*Susceptible Infected Recovered*). Selanjutnya



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

penelitian yang dilakukan oleh Joko [5] yang melakukan penelitian model matematika COVID-19 dengan model SEIR, model ini digunakan untuk memprediksi dinamika jumlah korban yang terinfeksi dan menentukan ambang batas laju penularan virus yang harus ditekan agar seluruh korban dapat tertangani. Kemudian penelitian oleh Nikolaos, dkk [6] yang melakukan penelitian penyebaran COVID-19 dengan membandingkan kasus penyebaran COVID-19 sebelum adanya vaksinasi (menggunakan model SEIR) dan sesudah adanya vaksinasi (menggunakan model SVEIR).

Berdasarkan penelitan-penelitan diatas, penulis tertarik untuk mengembangkan model SVEIR oleh Sitty, dkk [3] dengan menambahkan adanya asumsi migrasi pada setiap subpopulasi. Maka judul penelitian ini adalah **“Model SVEIR (*Susceptible Vaccinated Exposed Infected Recovery*) Terhadap Penyebaran COVID-19 dengan Adanya Pengaruh Migrasi”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang, maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana model SVEIR pada penyebaran COVID-19 dengan adanya migrasi?
2. Bagaimana kestabilan titik ekuilibrium penyebaran COVID-19 model SVEIR dengan adanya migrasi?
3. Bagaimana simulasi numerik model matematika penyebaran COVID-19 dengan adanya migrasi?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan latar belakang, adapun batasan masalah pada tugas akhir ini adalah:

1. Penelitian ini menggunakan data pasien COVID-19 di kota Pekanbaru.
2. Penelitian ini menggunakan model SVEIR dengan adanya migrasi.
3. Uji kestabilan dilakukan dengan simulasi.

1.4 Tujuan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah:



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

1. Memperoleh model penyebaran COVID-19 model SVEIR dengan adanya migrasi.
2. Mengetahui kestabilan titik ekuilibrium penyebaran COVID-19 model SVEIR dengan adanya migrasi.
3. Mengetahui simulasi numerik model matematika penyebaran COVID-19 dengan adanya migrasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan tugas akhir ini diharapkan dapat memperkenalkan suatu model matematika khususnya model matematika SVEIR, penelitian ini juga diharapkan bisa membantu pemerintah maupun pihak-pihak terkait dalam mencegah penyebaran COVID-19. Model matematika yang dihasilkan dapat menjadi gagasan untuk penulisan karya ilmiah maupun tugas akhir selanjutnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penelitian tugas akhir ini terdiri dari pokok-pokok permasalahan yang masing-masing akan diuraikan menjadi beberapa bagian, sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini membahas tentang gambaran umum isi tugas akhir yang meliputi latar belakang masalah yang akan dibahas, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang teori-teori pendukung yang berkaitan dengan Sistem persamaan diferensial, nilai eigen, kriteria *Routh-Hurwitz*, titik ekuilibrium dan kestabilan ekuilibrium.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini berisikan langkah-langkah yang dilakukan penulis untuk mencapai tujuan penelitian mulai dari metode penelitian, teknik pengalihan data sampai tahapan penelitian.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

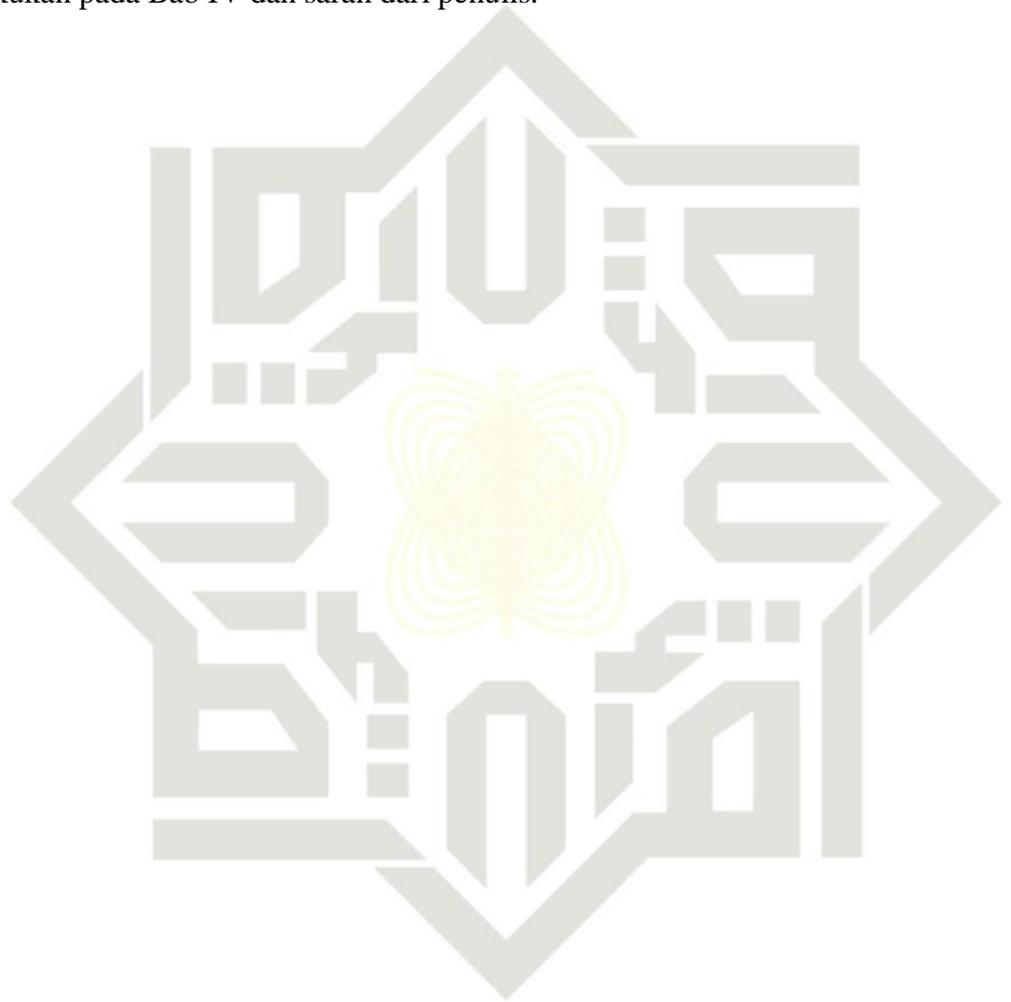
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi penjelasan bagaimana mendapatkan hasil penelitian Tugas Akhir.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil pembahasan yang telah dilakukan pada Bab IV dan saran dari penulis.



UIN SUSKA RIAU



BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bagian ini akan dibahas teori pendukung untuk menyelesaikan permasalahan dalam penelitian ini.

2.1 *Coronavirus Disease-2019 (COVID-19)*

Coronavirus Disease-2019 (COVID-19) atau yang biasa dikenal dengan virus corona merupakan penyakit sindrom pernapasan parah yang disebabkan oleh virus *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus-2 (SARS-CoV-2)*. Virus ini berpotensi untuk menular apabila individu rentan berinteraksi dengan individu yang terinfeksi. Proses infeksi membutuhkan periode inkubasi selama 5-6 hari atau selambatnya 14 hari sejak terpapar virus. Masa inkubasi virus yang cukup panjang mengakibatkan pendeteksian dini gejala penyakit COVID-19 jadi penting. Semakin dini mengetahui gejala virus corona maka akan membantu meringankan gejalanya agar tidak semakin berat.

Ada berbagai macam gejala yang dapat menyatakan bahwa individu tersebut terinfeksi virus corona, dimulai dari gejala ringan hingga berat. Gejala umum yang terjadi pada individu terinfeksi COVID-19 yaitu demam dengan suhu $> 38^{\circ}\text{C}$, batuk, kesulitan bernafas, hilangnya indra perasa dan penciuman, sesak memberat serta nyeri tenggorokan [7].

Telah berbagai macam upaya yang dianjurkan untuk mencegah penularan COVID-19, diantaranya mengurangi aktifitas keluar rumah, sering mencuci tangan dengan sabun atau cairan antiseptik, menerapkan etika bersin dan batuk, menghindari menyentuh wajah dengan tangan, mengenakan masker, menjaga jarak dan menjauhi kerumunan umum serta tidak kontak dengan orang yang terkonfirmasi positif COVID-19.

Kontak yang menyebabkan seseorang dapat terinfeksi adalah ketika orang yang mengalami salah satu kejadian di bawah ini selama 2 hari sebelum dan 14 hari setelah adanya gejala dari kasus terkonfirmasi [8].

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

1. Kontak langsung dengan kasus terkonfirmasi dalam radius 1 meter lebih dari 15 menit.
2. Kontak fisik langsung dengan kasus terkonfirmasi.
3. Merawat langsung pasien terkonfirmasi penyakit COVID-19 tanpa menggunakan Alat Pelindung Diri (APD) yang sesuai.

2.2 Nilai Eigen

Nilai eigen merupakan nilai karakteristik dari suatu matriks berukuran $n \times n$, vektor eigen merupakan vektor kolom tak nol yang jika dikalikan dengan suatu matriks berukuran $n \times n$ akan menghasilkan vektor lain yang memiliki nilai kelipatan dari vektor eigen itu sendiri.

Misalkan A merupakan matriks berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol x dalam R^n disebut vektor eigen dari matriks A dan jika Ax merupakan kelipatan skalar dari x , maka untuk suatu skalar λ , $Ax = x\lambda$, dimana λ merupakan nilai eigen dari matriks A dan x merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ . Untuk mencari nilai eigen dari matriks A , maka $Ax = \lambda x$ dikalikan dengan matriks identitas I , yang ditulis sebagai $(A - \lambda I) = 0$, λ akan menjadi nilai eigen jika dan hanya jika persamaan memiliki pemecahan tak nol, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\det(A - \lambda I) x = 0 \quad (2.1)$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan karakteristik dari matriks A , skalar persamaan tersebut adalah nilai eigen dari matriks A . $\det(A - \lambda I)$ merupakan polinom λ yang disebut polinom karakteristik dari matriks A . Jika salah satu akar polinom karakteristik bernilai nol dan akar lainnya bernilai positif maka sistem non-linier tak stabil. Jika salah satu akar polinom karakteristik bernilai nol dan akar lainnya bernilai negatif maka sistem non linier dapat stabil atau tidak stabil bergantung pada unsur non linier yang diabaikan [9].

Contoh 2.1

Tentukan nilai eigen dari : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

Langkah 1: mencari matriks $A - \lambda I$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 A - \lambda I &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8 - \lambda \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Langkah 2: mencari determinan dari matriks $A - \lambda I$

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8 - \lambda \end{bmatrix} \\
 &= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4 \\
 &= \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 \\
 &(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0
 \end{aligned}$$

Langkah 3: mencari nilai eigen

Solusi untuk $(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$ dicari menggunakan rumus kuadrat, maka diperoleh $2 + \sqrt{3}$ dan $2 - \sqrt{3}$. Sehingga didapatkan nilai-nilai eigen dari matriks A, yaitu:

$$\lambda = 4 \qquad \lambda = 2 + \sqrt{3} \qquad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

2.3 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan matematika yang meliputi turunan fungsi satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas [10]. Persamaan diferensial diklasifikasikan ada 2 jenis, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Contoh 2.2

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 6x \frac{dy}{dx} = 0$$

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Contoh 2.3

$$3 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Orde pada persamaan diferensial merupakan tingkat turunan tertinggi pada suatu persamaan tersebut [10].

Contoh 2.4

1. $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$ adalah PD orde 1 karena dalam persamaan tersebut, turunan tertingginya adalah 1.
2. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6x \frac{dy}{dx} = 0$ adalah PD orde 2 karena dalam persamaan tersebut, turunan tertingginya adalah 2.
3. $\frac{d^3y}{dx^3} - y \frac{dy}{dx} + e^{4x} = 0$ adalah PD orde 3 karena dalam persamaan tersebut, turunan tertingginya adalah 3.

Berdasarkan kelinierannya, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua yaitu persamaan diferensial linier dan persamaan diferensial nonlinier.

Persamaan diferensial biasa linier adalah persamaan diferensial biasa orde n dengan variabel bebas x dan variabel tak bebas y yang dapat dinyatakan dalam bentuk:[10]

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \tag{2.2}$$

Persamaan diferensial dikatakan linier jika F adalah fungsi linier dari variabel y, y', \dots, y^n .

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0 \tag{2.3}$$

Ciri-ciri dari persamaan diferensial linier adalah:

1. Variabel tak bebas y dan turunannya hanya berderajat satu.
2. Tidak ada perkalian antara variabel tak bebas y dan turunannya.
3. Variabel tak bebas y maupun turunannya tidak termasuk fungsi transenden; logaritma, trigonometri dan eksponensial.

Contoh 2.5

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Suatu persamaan diferensial dikatakan non-linier jika persamaan tidak memiliki ciri-ciri dari persamaan diferensial linier.

Contoh 2.6

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$$

2.4 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan perpaduan berdasarkan beberapa persamaan diferensial. Secara sistematis, sistem persamaan diferensial bisa ditulis menggunakan bentuk:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{2.4}$$

dengan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

dimana x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel terikat dan t adalah variabel bebas.

Jika pada Persamaan (2.4) variabel t tidak dinyatakan secara eksplisit, maka Persamaan (2.4) disebut sistem otonomus sehingga dapat ditulis secara matematis dengan bentuk:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.6}$$

dengan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Berdasarkan kelinierannya, sistem persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua, yaitu sistem persamaan diferensial linier dan sitem persamaan non-linier.

1. Sistem Persamaan Diferensial Linier

Secara umum bentuk persamaan diferensial biasa dapat ditulis sebagai berikut: [10]

$$F(t, x, x', \dots, x^n) = 0 \quad (2.8)$$

Bentuk umum dari persamaan diferensial linier yaitu:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}x_2 + \dots + a_{1(n-1)}x^{n-1} + a_{1n}x^n &= f_1(t) \\ a_{21}x + a_{22}x_2 + \dots + a_{2(n-1)}x^{n-1} + a_{2n}x^n &= f_2(t) \\ &\vdots \\ a_{n1}x + a_{n2}x_2 + \dots + a_{n(n-1)}x^{n-1} + a_{nn}x^n &= f_n(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Maka sistem persamaan diferensial linier dengan variabel bebas $x(t)$ dan variabel t dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = x'_1(t) &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x'_2(t) &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) = x'_n(t) &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

sehingga dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) \quad (2.11)$$

dengan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Berdasarkan (2.12) sistem persamaan diferensial linier dikatakan homogen jika $n = 1, 2, \dots, k$ dan $f(t) = 0$. Dengan demikian, dapat ditulis Persamaan (2.12) dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.13)$$

dengan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Contoh 2.7 (Sistem Persamaan Diferensial Linier Homogen)

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2$$

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 + 8x_2$$

Contoh 2.8 (Sistem Persamaan Diferensial Linier Non Homogen)

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2 - 3t + 5$$

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 + 8x_2 - 7t + 5$$

Contoh 2.8 dikatakan sistem persamaan diferensial non homogen karena ada nilai $-3t + 5$ dan $-7t + 5$ yang menyatakan bahwa fungsi $f(t)$ bernilai tak nol.

2. Sistem Persamaan Diferensial Non-Linear

Pada Persamaan (2.8) jika fungsi F terdapat x, x', \dots, x^n yang bukan merupakan fungsi linier, maka sistem persamaan diferensial tersebut menjadi non-linier [10]. Maka sistem persamaan dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Contoh 2.9

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + x_1x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4x_2^2 - 2x_1 - x_2^2$$

Contoh 2.9 dikatakan sistem persamaan diferensial non-linier karena memuat perkalian antara variabel tak bebas x_1 dan x_2 pada persamaan pertama dan terdapat kuadrat dari variabel x_2 pada persamaan kedua.

2.1 Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium atau titik kesetimbangan merupakan titik yang tidak berpengaruh terhadap waktu. [11]

Contoh 2.10

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + x_1x_2 \tag{2.16}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4x_2 - 7x_1 - x_2^2 \tag{2.17}$$

Selanjutnya akan dicari titik ekuilibrium menggunakan metode substitusi.

Berdasarkan Persamaan (2.16) diperoleh

$$x_1(3 + x_2) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ dan } x_2 = -3$$

Kemudian substitusi $x_1 = 0$ ke Persamaan (2.17) diperoleh

$$4x_2 - 7(0) - x_2^2 = 0$$

$$4x_2 - 0 - x_2^2 = 0$$

$$4x_2 - x_2^2 = 0$$

$$x_2(4 - x_2) = 0$$

$$x_2 = 0 \text{ dan } x_2 = 4$$

Selanjutnya substitusi $x_2 = -3$ ke Persamaan (2.17) diperoleh

$$4(-3) - 7x_1 - (-3)^2 = 0$$

$$-12 - 7x_1 - 9 = 0$$

$$-21 - 7x_1 = 0$$

$$-7x_1 = 21$$

$$x_1 = -3$$

Maka diperoleh titik ekuilibrium $(0,0)$, $(0,4)$ dan $(-3,-3)$.

2.6 Kestabilan Titik Ekuilibrium

Penyelesaian sistem persamaan diferensial bisa ditentukan dengan menganalisis kestabilan titik ekuilibrium. Kestabilan pada sistem berarti perubahan kecil dalam sistem hanya akan sedikit mengubah solusi untuk waktu yang akan datang, jika perubahan kecil pada sistem menyebabkan perubahan besar pada perilaku penyelesaian untuk waktu yang akan datang, maka sistem disebut tidak stabil. Penyelesaian kestabilan titik ekuilibrium dapat diselesaikan secara analitik ataupun numerik.

Definisi 2.1 [11]

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$ dan $x(t, x_0)$ adalah solusi persamaan $\dot{x} = f(x)$ pada saat t dengan nilai awal $x(0) = x_0$. Titik ekuilibrium \bar{x} dikatakan stabil, stabil asimtotik dan tidak stabil, jika

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

1. Stabil, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga, jika $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$, maka $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon \forall t \geq 0$.
2. Stabil asimtotik, jika stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0$ apabila $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta_1$.
3. Tidak stabil jika definisi 1 tidak terpenuhi.

Berdasarkan kelinierannya, kestabilan titik ekuilibrium diklasifikasikan menjadi dua yaitu kestabilan sistem persamaan diferensial linier dan kestabilan sistem persamaan diferensial non-linier.

1. Kestabilan Sistem Persamaan Diferensial Linier

Definisi 2.2

Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$, nilai eigen dari matriks A adalah akar-akar karakteristik dari polynomial $\det(A - \lambda I) = 0$, maka dapat ditulis dalam bentuk

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (2.18)$$

Dengan $a_0 = 1$

Kemudian akan ditunjukkan teorema yang menyatakan hubungan nilai eigen dengan kestabilan titik ekuilibrium.

Teorema 2.1

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$, dengan A suatu matriks $n \times n$ dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j$ dimana $j \leq n$

1. Titik ekuilibrium \mathbf{x}^* dikatakan stabil asimtotik jika $\lambda_i < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$.
2. Titik ekuilibrium \mathbf{x}^* dikatakan stabil jika $\lambda_i < 0$ dan $\exists \lambda_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$.
3. Titik ekuilibrium \mathbf{x}^* dikatakan tidak stabil jika $\exists \lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Pada Contoh 2.1 diperoleh nilai $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$ dan $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$.

Berdasarkan Teorema 2.1 maka titik ekuilibrium dari Contoh 2.1 dikatakan tidak stabil karena nilai $\lambda_{1,2,3} > 0$.

2. Kestabilan Sistem Persamaan Diferensial Non-Linier

Untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial non-linier dapat dilakukan dengan cara linierisasi sistem non-linier. Linierisasi dilakukan pada sistem non-linier untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

ekuilibrium. Pada sistem non-linier, linierisasi dimaksudkan untuk memperoleh aproksimasi yang baik. Proses linierisasi dapat dilakukan dengan menggunakan deret Taylor disekitar titik ekuilibrium $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ dengan $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$ yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1(x^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2(x^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n(x^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots \end{aligned}$$

Jika suku-suku non-liniernya diabaikan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Apabila Persamaan (2.20) ditulis dalam bentuk matriks, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Misalkan

$$z_1 = x_1 - x_1^*, z_2 = x_2 - x_2^*, \dots, z_n = x_n - x_n^* \tag{2.21}$$

Diperoleh

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx_1}{dt}, \frac{dz_2}{dt} = \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dz_n}{dt} = \frac{dx_n}{dt} \tag{2.22}$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (2.21) dan (2.22) ke Persamaan (2.20), sehingga Persamaan (2.20) ditulis sebagai berikut

$$\frac{dz}{dt} = f_1(x^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} z_1 + \dots + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} z_n$$

$$\frac{dz_1}{dt} = f_2(x^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} z_1 + \dots + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} z_n$$

⋮

$$\frac{dz_n}{dt} = f_n(x^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} z_1 + \dots + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} z_n \quad (2.23)$$

$$\frac{dx}{dt} = J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)} Z \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) merupakan hasil linierisasi dari persamaan diferensial non-linier. Selanjutnya akan dibahas teorema mengenai kriteria kestabilan titik ekuilibrium pada persamaan diferensial nonlinier.

Teorema 2.2 [12]

Diberikan matriks Jacobian $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$ dari Persamaan (2.23)

1. Jika semua bilangan real pada nilai eigen dari matriks $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$ bernilai negatif, maka titik ekuilibrium dari $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ pada sistem persamaan diferensial non-linier (2.15) stabil asimtotik lokal.
2. Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen dari matriks $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$ bernilai positif, maka titik ekuilibrium dari $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ pada sistem persamaan diferensial non-linier (2.15) tidak stabil.

Contoh 2.11

Berikut contoh dari kestabilan titik ekuilibrium, berdasarkan Contoh 2.10 diperoleh titik ekuilibrium yaitu $(0,0)$, $(0,4)$ dan $(-3,-3)$. Selanjutnya dilakukan linierisasi di sekitar titik ekuilibrium untuk melihat kelinierannya dengan Matriks Jacobian.

$$J_{(x)} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dx_1} & \frac{dx_1}{dx_2} \\ \frac{dx_2}{dx_1} & \frac{dx_2}{dx_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + x_2 & x_1 \\ -2 & 4 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

Untuk $x^* = (0,0)$

$$\begin{bmatrix} 3 + (0) & 0 \\ -2 & 4 - 2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik untuk $J_{(0,0)}$ adalah

$$\det(J_{(0,0)} - \lambda I) = 0$$

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ -2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(3 - \lambda)(4 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \text{ dan } \lambda_2 = 4$$

Karena $\lambda_1 = 3 > 0$ dan $\lambda_2 = 4 > 0$ maka berdasarkan Teorema 2.2 nilai titik ekuilibrium (0,0) pada sistem persamaan tersebut tidak stabil.

2.7 Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai eigen dapat dihitung dengan menentukan akar persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I)$. Tetapi akar-akar persamaan karakteristik seringkali sulit ditemukan, sehingga diperlukan suatu aturan untuk memastikan bahwa akar-akar persamaan karakteristik tersebut negatif atau positif. Kriteria Routh-Hurwitz merupakan salah satu alternatif untuk menentukan nilai eigen dari suatu polinomial yang tidak mudah dilakukan. Tanda negatif atau positif dapat digunakan untuk menentukan sifat kestabilan dari suatu titik ekuilibrium [13].

Definisi 2.3

Persamaan karakteristik dari bentuk polinomial yang diberikan adalah sebagai berikut:

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^i + a_1 \lambda^{i-1} + \dots + a_j = 0 \tag{2.25}$$

dimana $a_0 = 1, j = 1, 2, \dots, n$ anggota bilangan real. Maka didefinisikan matriks j sebagai berikut:

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} \dots$$

$$H_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & a_k \end{bmatrix} \dots$$

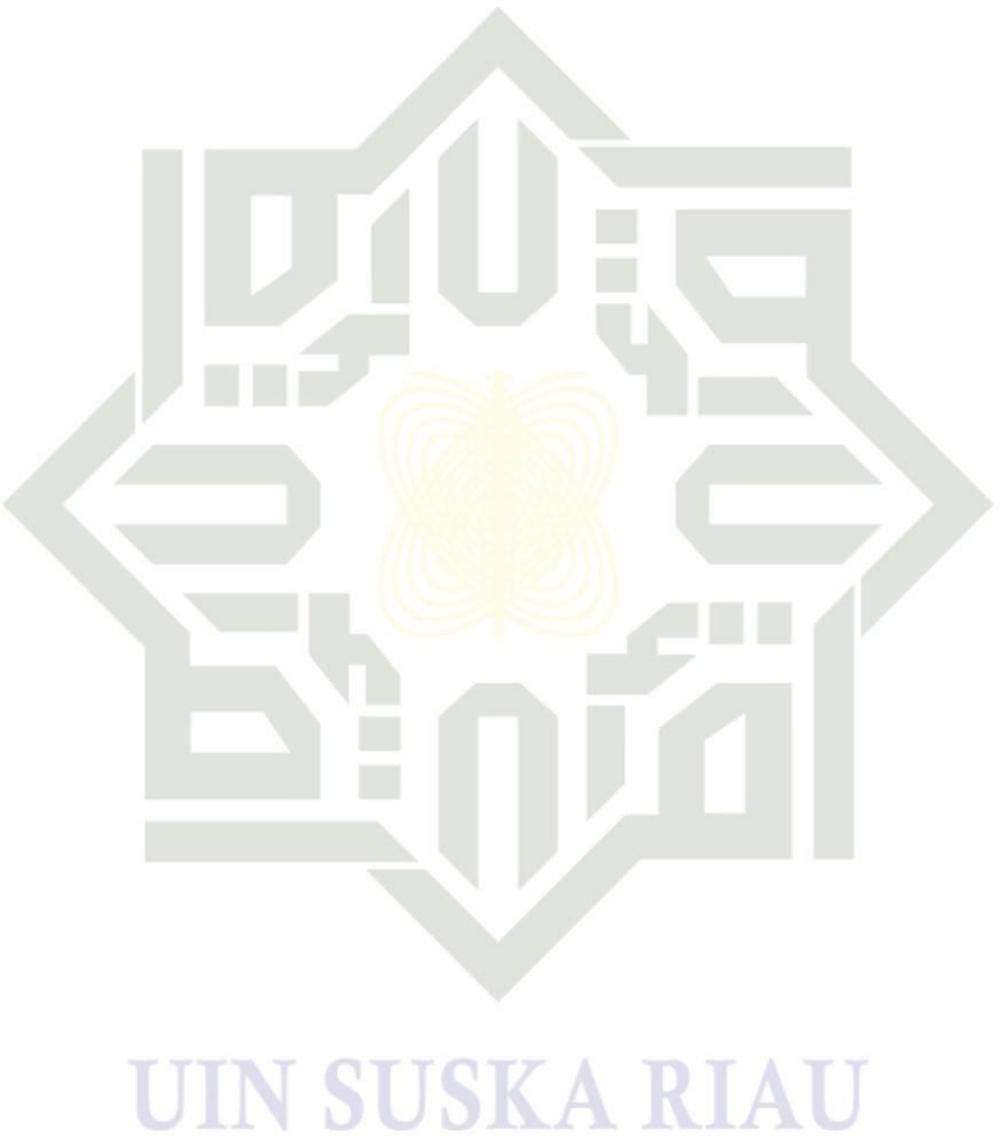
$$H_i = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Determinan matriks Routh-Hurwitz tingkat ke- i dinotasikan dengan Δ_i , dengan $i = 1, 2, \dots, n$ yang diperoleh dari Persamaan (2.26). jika setiap Δ_i bernilai positif

maka semua akar-akar persamaan karakteristik Persamaan (2.25) mempunyai nilai real negatif.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.





1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB III

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan menggunakan metode penelitian studi literatur, yaitu dengan mempelajari buku-buku serta jurnal-jurnal yang berkaitan dengan pemodelan matematika. Hal ini dilakukan untuk mencermati, menelaah dan mengidentifikasi pengetahuan yang menunjang penelitian ini. Adapun langkah-langkah penelitiannya sebagai berikut:

1. Membuat asumsi model

Untuk membangun model SVEIR (*Susceptible, Vaccinated, Exposed, Infected, Recovery*) pada penyebaran COVID-19 dapat di asumsikan beberapa hal sebagai berikut:

 - a) Jumlah kelahiran alami dan kematian alami diasumsikan sama.
 - b) Populasi diasumsikan terbuka, karena terjadinya migrasi.
 - c) Setiap individu diasumsikan mempunyai peluang yang sama untuk melakukan kontak dengan individu lain.
 - d) Individu rentan yang telah mendapatkan vaksinasi masuk kedalam subpopulasi *Vaccinated (V)*.
 - e) Individu yang telah divaksinasi mengalami dua kemungkinan, yaitu mengalami kekebalan permanen terhadap COVID-19 dan tidak mengalami kekebalan permanen terhadap COVID-19. Individu yang tidak mengalami kekebalan permanen, maka menjadi subpopulasi *Exposed (E)*.
 - f) Infeksi virus terjadi ketika individu rentan kontak dengan individu terinfeksi.
 - g) Individu yang terinfeksi virus dapat sembuh dari penyakit.
 - h) Individu yang telah sembuh memiliki kekebalan permanen terhadap COVID-19 sehingga tidak dapat terinfeksi lagi.

Variabel yang digunakan dapat disajikan dalam Tabel 3.1.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2. Diberikan jurnal dari Sitty, dkk [3] :

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \alpha(1 - \theta)SI - (\eta + \theta)S,$$

$$\frac{dV}{dt} = \theta S - \eta V,$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha(1 - \theta)SI - (\beta + \eta + \xi)E,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta E - (\zeta + \eta + \delta)I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I + \xi E - \eta R$$

3. Dari model diatas, dibentuk model baru dengan menambahkan faktor migrasi (imigrasi dan emigrasi) di setiap subpopulasi. Kemudian pada subpopulasi V (*Vaccinated*) terjadinya 2 kemungkinan yaitu individu yang mengalami kekebalan permanen dan individu yang tidak mengalami kekebalan permanen sehingga menjadi individu laten.
4. Menyelesaikan sistem persamaan diferensial dari diagram transfer yang terbentuk.
5. Mencari titik ekuilibrium (kesetimbangan) dari model yang dibuat, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit.
6. Menganalisa sifat kestabilan dari titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit dengan melakukan linearisasi pada sistem dengan menentukan matriks Jacobian di titik ekuilibrium. Kemudian diperoleh nilai eigen dari matriks dan ditentukan sifat kestabilannya dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*.
7. Membuat simulasi numerik dengan mendefinisikan nilai parameter dan digambarkan dengan menggunakan *software Maple 13*.
8. Membuat kesimpulan dari hasil yang diperoleh.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB V PENUTUP

5. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematis yang diperoleh pada penyebaran COVID-19 dengan adanya pengaruh migrasi menggunakan model SVEIR, yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N + \rho_1 S - \mu S - \rho_2 S - \alpha(1 - \theta)SI - \theta S$$

$$\frac{dV}{dt} = \theta S + \rho_1 V - \mu V - \rho_2 V - \sigma V - \gamma V$$

$$\frac{dE}{dt} = \gamma V + \alpha(1 - \theta)SI + \rho_1 E - \mu E - \rho_2 E - \beta E$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta E + \rho_1 I - \mu I - \rho_2 I - \zeta I - \delta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I + \sigma V + \rho_1 R - \mu R - \rho_2 R$$

Dengan $S(t) + V(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N$ merupakan jumlah keseluruhan populasi. Dimana S merupakan populasi *susceptible* (populasi yang rentan), V merupakan populasi *vaccinated* (populasi yang divaksinasi), E merupakan populasi *exposed* (populasi laten), I merupakan populasi *infected* (populasi yang terinfeksi penyakit), R merupakan populasi *recovery* (populasi yang dinyatakan sembuh).

2. Terdapat dua titik ekuilibrium pada model SVEIR penyebaran COVID-19 dengan adanya migrasi, yaitu:
 - a. Titik ekuilibrium bebas penyakit

$$E_1 = \left(\frac{\mu N}{(\mu + \rho_2 + \theta - \rho_1)}, \frac{\theta \mu N}{(\mu + \rho_2 + \theta + \rho_1)(\mu + \rho_2 + \sigma + \gamma - \rho_1)}, 0, 0, \frac{\sigma \theta \mu N}{(\mu + \rho_2 + \theta + \rho_1)(\mu + \rho_2 + \sigma + \gamma - \rho_1)(\mu + \rho_2 - \rho_1)} \right)$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

b. Titik ekuilibrium endemik penyakit

$$E_2 = \left(\frac{\mu N}{\mu + \rho_2 + \alpha(1-\theta)I^* + \theta - \rho_1}, \frac{\theta \mu N}{(\rho_1 - \mu - \rho_2 - \alpha(1-\theta)I^* - \theta)(\mu + \rho_2 + \sigma + \gamma - \rho_1)}, \frac{(\mu + \rho_2 + \zeta + \delta - \rho_1)I^*}{\beta}, \gamma V^* + \alpha(1-\theta)S^*I^* + \rho_1 E^* - \mu E^* - \rho_2 E^* - \beta E^*, \frac{\delta I^* + \sigma \mu N}{(\mu + \rho_2 + \alpha(1-\theta)I^* - \rho_1)(\rho_1 - \mu - \rho_2 - \sigma - \gamma)(\rho_2 + \mu - \rho_1)} \right)$$

Ada dua kestabilan titik ekuilibrium pada model SVEIR terhadap penyebaran COVID-19 dengan adanya pengaruh migrasi, yaitu:

a. Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit.

Jika laju imigrasi kecil dari atau sama dengan laju emigrasi maka titik kestabilan ekuilibrium bebas penyakit tersebut stabil asimtotik sedangkan pada saat laju imigrasi lebih besar dari laju emigrasi, maka titik kestabilan ekuilibrium bebas penyakit tersebut tidak stabil.

b. Kestabilan titik ekuilibrium endemik penyakit.

Jika laju imigrasi kecil dari atau sama dengan laju emigrasi maka titik kestabilan ekuilibrium bebas penyakit tersebut stabil asimtotik sedangkan pada saat laju imigrasi lebih besar dari laju emigrasi, maka titik kestabilan ekuilibrium endemik penyakit tersebut tidak stabil.

Sehingga dapat disimpulkan bahwasannya perbedaan besar laju imigrasi dan laju emigrasi sangat berpengaruh terhadap penyebaran COVID-19. Semakin besar laju imigrasi dibanding dengan laju emigrasi, maka jumlah terinfeksi akan semakin bertambah. Oleh karena itu upaya lockdown oleh pemerintah sangat diperlukan dalam pencegahan penyebaran COVID-19.

5. Saran

Dalam penulisan ini, penulis membahas model SVEIR terhadap penyebaran COVID-19 dengan adanya migrasi. Dalam penelitian ini subpopulasi yang digunakan yaitu *Susceptible (S)*, *Vaccinated (V)*, *Exposed (E)*, *Infected (I)*, *Recovery (R)*. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini, penulis memberikan saran agar menambahkan subpopulasi *Quarantined (Q)* yaitu orang yang melakukan karantina atau orang melakukan isolasi mandiri.



DAFTAR PUSTAKA

- [1] World Health Organization, “WHO Director-General’s opening remarks at the media briefing on COVID-19 - 11 March 2020,” *who.int*, 2020. [Online]. Available: <https://www.who.int/director-general/speeches/detail/who-director-general-s-opening-remarks-at-the-media-briefing-on-covid-19---11-march-2020>. [Accessed: 02-Apr-2021].
- [2] “Vaksin COVID-19,” 2021. [Online]. Available: <https://covid19.go.id/vaksin-covid19>. [Accessed: 13-Jun-2021].
- [3] S. O. S. P. Ahaya, E. Rahmi, and Nurwan, “Analisis dinamik model SVEIR pada penyebaran penyakit campak,” 2020.
- [4] B. H. Prasad, “MATHEMATICAL STUDY ON COVID - 19 WITH SIR EPIDEMIC,” vol. IX, no. V, pp. 177–184.
- [5] Joko Sampurno, “Pemodelan evolusi pandemi Covid-19 di Kota Pontianak,” *Jurnal Fisika*, vol. 10, no. 1, pp. 22–29, 2020.
- [6] N. P. Rachaniotis, T. K. Dasaklis, F. Fotopoulos, and P. Tiniotis, “A Two-Phase Stochastic Dynamic Model for COVID-19 Mid-Term Policy Recommendations in Greece : A Pathway towards Mass Vaccination,” 2021.
- [7] Yuliana, “Corona Virus Disease (COVID-19); Sebuah tinjauan literatur,” vol. 2, no. February, pp. 187–192, 2020.
- [8] D. Handayani, D. R. Hadi, F. Isbaniah, E. Burhan, and H. Agustin, “Penyakit Virus Corona 2019,” *Respirologi Indonesia*, vol. 40, no. 2, pp. 119–129, 2020.
- [9] S. Campbell and R. Haberman, *Introduction to Differential Equations with Dynamical System*. New Jersey: Princeton University Press, 2008.
- [10] S. L. Ross, *Differential Equation*, 3rd ed. New Jersey: Wiley, 1989.
- [11] O. G. J., *Delft University Press*. 2003.
- [12] L. Perko, *Equations and Dynamical Systems*. 2001.
- [13] Hasnawati, R. Ratianingsih, and J. W. Puspita, “Analisis Kestabilan Model Matematika Pada Penyebaran Kanker Serviks Menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz,” *Jurnal Ilmiah Matematika Dan Terapan*, vol. 14, no. 1, pp. 120–127, 2017.
- [14] M. Azizah, “Model Matematika Penyebaran Penyakit Coronavirus Disease 2019 (Covid-19) Dengan Vaksinasi, Isolasi Mandiri, Dan Karantina Di Rumah Sakit,” *Jurnal Sains dan Matematika*, vol. 2019, p. 97, 2020.

LAMPIRAN

```

> restart : with(plots) : with(DEtools);
> mu := 0.0125 : theta := 0.103691511 : gamm := 0.03110745 : sigma := 0.07258406 : alpha := 0.000002 : beta := 0.6 : delta := 0.9791777 : zeta := 0.02399859 : rho1 := 0.3 : rho2
:= 0.45 : N := 983356;
> de1 := diff(S(t), t) = mu * N + rho1 * S(t) - mu * S(t) - rho2 * S(t) - alpha * (1 - theta) * S(t) * K(t) - theta * S(t);
> de2 := diff(V(t), t) = theta * S(t) + rho1 * V(t) - mu * V(t) - rho2 * V(t) - sigma * V(t) - gamm * V(t);
> de3 := diff(E(t), t) = gamm * V(t) + alpha * (1 - theta) * S(t) * K(t) + rho1 * E(t) - mu * E(t) - rho2 * E(t) - beta * E(t);
> de4 := diff(K(t), t) = beta * E(t) + rho1 * K(t) - mu * K(t) - rho2 * K(t) - zeta * K(t) - delta * K(t);
> de5 := diff(R(t), t) = delta * K(t) + sigma * V(t) + rho1 * R(t) - mu * R(t) - rho2 * R(t);
> imits := [ S(0) = 983012, V(0) = 101930, E(0) = 9861, K(0) = 5667, R(0) = 5549];
> myopts := stepsize = 0.1;
> plot1 := DEplot([de1, de2, de3, de4, de5], [S(t), V(t), E(t), K(t), R(t)], t = 0..50, [imits], scene = [t, S], arrows = none, myopts) : display(plot1);
> plot2 := DEplot([de1, de2, de3, de4, de5], [S(t), V(t), E(t), K(t), R(t)], t = 0..50, [imits], scene = [t, V], arrows = none, myopts, linecolor = red) : display(plot2);
> plot3 := DEplot([de1, de2, de3, de4, de5], [S(t), V(t), E(t), K(t), R(t)], t = 0..50, [imits], scene = [t, E], arrows = none, myopts, linecolor = green) : display(plot3);
> plot4 := DEplot([de1, de2, de3, de4, de5], [S(t), V(t), E(t), K(t), R(t)], t = 0..50, [imits], scene = [t, K], arrows = none, myopts, linecolor = blue) : display(plot4);
> plot5 := DEplot([de1, de2, de3, de4, de5], [S, V, E, K, R], t = 0..50, [imits], scene = [t, R], arrows = none, myopts, linecolor = black) : display(plot5);

```

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Pekanbaru, 16 Oktober 1999, sebagai anak keempat dari empat bersaudara dari pasangan Bapak Nasrul dan Ibu Ramulis. Penulis menyelesaikan pendidikan Formal pada Sekolah Dasar Negeri 008 Bukit Raya yang telah berubah nama menjadi Sekolah Dasar Negeri 104 Pekanbaru tahun 2011. Menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Kemala Bhayangkari pada tahun 2014 dan

menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Kejuruan dengan jurusan Teknik Kimia Industri di SMK 2 Pekanbaru pada tahun 2017. Setelah menyelesaikan studi di bangku SMK, pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan lulus di Fakultas Sains dan Teknologi dengan program studi Matematika.

Pada bulan Januari 2020 penulis melaksanakan Kerja Praktek di PT Perkebunan Nusantara V dengan judul “ Pengaruh Luas Lahan dan Jumlah Hari Kerja terhadap Produksi Kelapa Sawit di PT Perkebunan Nusantara V “ yang dibimbing oleh Ibu Irma Suryani, M.Sc. dan Ibu Nela Anggita, S.P. pada tanggal 13 Januari 2020 sampai dengan 13 Februari 2020 dan diseminarkan pada tanggal 5 Mei 2020. Pada bulan Juli-Agustus 2020 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Binawidya, Kecamatan Tampan, Kota Pekanbaru, Riau.

Penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana pada tanggal Januari 2022 dengan judul tugas akhir “ Model SVEIR (*Susceptible Vaccinated Exposed Infected Recovery*) terhadap Penyebaran COVID-19 dengan Adanya Pengaruh Migrasi “ dibawah bimbingan Bapak Mohammad Soleh, M.Sc.