BAB IV
PEMBAHASAN

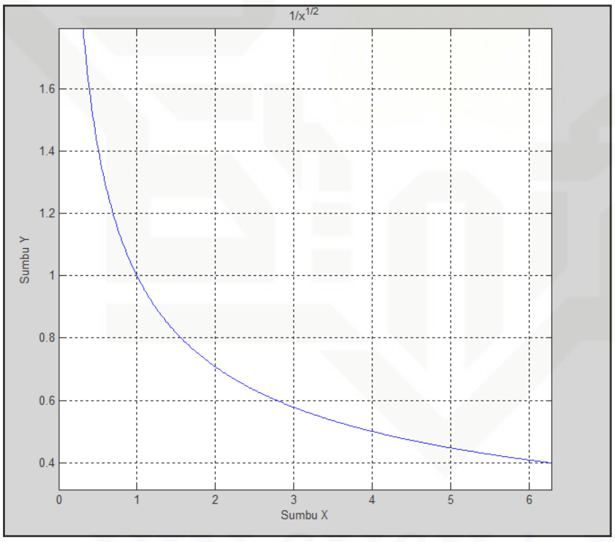
Beberapa contoh penyelesaian integral secara analitik dan numerik metode Adaptive Simpson, metode Trapesium, metode *Gauss-Legendre*, dan metode Integrasi Numerik Boole serta mengaplikasikan metode Adaptive Simpson, metode Trapesium, metode *Gauss-Legendre*, dan metode Integrasi Numerik Boole dengan Matlab kemudian menunjukkan tingkat ketelitiannya.

4.1 Penyelesaian Integral Secara Eksak

Kasus 1

Secara analitis

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$



Gambar 4.1 Grafik Kasus 1

a. Secara Numerik menggunakan Metode *Adaptive* Simpson

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 4$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = 9$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{9-4}{4} = 1{,}25$ dan $x_0 = 4$; $x_1 = 5{,}25$; $x_2 = 6{,}5$; $x_3 = 7{,}75$; $x_4 = 9$;

4. Metode Simpson $\frac{1}{3}$

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\}$$

$$= \frac{1{,}25}{3}\{f(4) + 4f(5{,}25) + 2f(6{,}5) + 4f(7{,}75) + f(9)\}$$

$$= \frac{1{,}25}{3}\left\{4^{-\frac{1}{2}} + 4\left(5{,}25^{-\frac{1}{2}}\right) + 2\left(6{,}5^{-\frac{1}{2}}\right) + 4\left(7{,}75^{-\frac{1}{2}}\right) + \left(9^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}$$

$$= 2{,}0002$$

5. Metode Simpson $\frac{3}{8}$

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{3h}{8}\{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\}$$

$$= \frac{3h}{8}\{f(4) + 3f(5{,}25) + 3f(6{,}5) + 2f(7{,}75) + f(9)\}$$

$$= \frac{3{,}75}{8}\left\{4^{-\frac{1}{2}} + 3\left(5{,}25^{-\frac{1}{2}}\right) + 3\left(6{,}5^{-\frac{1}{2}}\right) + 2\left(7{,}75^{-\frac{1}{2}}\right) + \left(9^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}$$

$$= 1{,}892699$$

b. Secara Numerik menggunakan Metode Trapesium

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 4$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = 9$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{9-4}{4} = 1{,}25$ dan $x_0 = 4$; $x_1 = 5{,}25$; $x_2 = 6{,}5$; $x_3 = 7{,}75$; $x_4 = 9$;
4. Metode Trapesium

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\}$$

$$= \frac{1{,}25}{2}\{f(4) + 2f(5{,}25) + 2f(6{,}5) + 2f(7{,}75) + f(9)\}$$

$$= \frac{1{,}25}{2}\left\{4^{-\frac{1}{2}} + 2\left(5{,}25^{-\frac{1}{2}}\right) + 2\left(6{,}5^{-\frac{1}{2}}\right) + 2\left(7{,}75^{-\frac{1}{2}}\right) + \left(9^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}$$

$$= 2{,}0057$$

c. Secara Numerik menggunakan Metode *Gauss-Legendre*

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 4$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = 9$

3. $x = \frac{(a+b)+(b-a)t}{2} = \frac{(4+9)+(9-4)t}{2} = \frac{13+5t}{2} = 6{,}5 + 2{,}5t$; dan $dx = 2{,}5dt$
4. Transformasikan $\int f(x)\,dx$ menjadi $\int f(t)\,dt$:
5. Didapatkan $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{6{,}5+2{,}5t}} 2{,}5dt$ dan $f(t) = \frac{1}{\sqrt{6{,}5+2{,}5t}}$
6. Maka

$$f(1/\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{6{,}5+2{,}5(1/\sqrt{3})}} = 0{,}5036$$

$$f(-1/\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{6{,}5+2.5(-1/\sqrt{3})}} = 0{,}9728$$

7. Dengan demikian

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \approx 2{,}5f\{(1/\sqrt{3}) + f(-1/\sqrt{3})\}$$

$$\approx 2{,}5\ (0{,}5036 + 0{,}9728)$$

$$\approx 3{,}6910$$

d. Secara Numerik menggunakan Metode Integrasi Numerik Boole

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 4$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = 9$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{9-4}{4} = 1{,}25$ dan $x_0 = 4$; $x_1 = 5{,}25$; $x_2 = 6{,}5$; $x_3 = 7{,}75$; $x_4 = 9$;
4. Aturan Boole

$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx =$

$= \frac{2h}{45}\{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\}$

$= \frac{2(1{,}25)}{45}\{7f(4) + 32f(5{,}25) + 12f(6{,}5) + 32f(7{,}75) + 7f(9)\}$

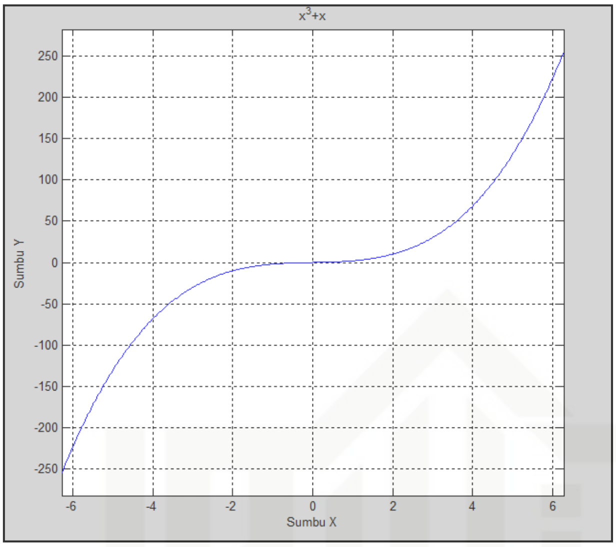
$= \frac{2{,}5}{45}\left\{7\left(4^{-\frac{1}{2}}\right) + 32\left(5{,}25^{-\frac{1}{2}}\right) + 12\left(6{,}5^{-\frac{1}{2}}\right) + 32\left(7{,}75^{-\frac{1}{2}}\right) + 7\left(9^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}$

$= 2{,}000045$

Kasus 2

Secara analitis

$$\int_0^2 (x^3 + x)dx$$



Gambar 4.2 Grafik Kasus 2

a. Secara Numerik menggunakan Metode *Adaptive* Simpson

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = 2$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{2-0}{4} = 0{,}5$ dan $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1{,}5$; $x_4 = 2$;
4. Metode Simpson $\frac{1}{8}$

$\int_0^2 (x^3 + x)dx =$

$= \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\}$

$= \frac{0{,}5}{3}\{f(0) + 4f(0{,}5) + 2f(1) + 4f(1{,}5) + f(2)\}$

$= \frac{0{,}5}{3}\{(0) + 4(0{,}5^3 + 0{,}5) + 2(1^3 + 1) + 4(1{,}5^3 + 1{,}5) + (2^3 + 2)\}$

$= 6$

5. Metode Simpson $\frac{3}{8}$

$\int_0^2 (x^3 + x)dx =$

$= \frac{3h}{8}\{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\}$

$= \frac{3(0{,}5)}{8}\{f(0) + 3f(0{,}5) + 3f(1) + 2f(1{,}5) + f(2)\}$

$= \frac{1{,}5}{8}\{(0) + 3(0{,}5^3 + 0{,}5) + 3(1^3 + 1) + 2(1{,}5^3 + 1{,}5) + (2^3 + 2)\}$

$= 5{,}179688$

b. Secara Numerik menggunakan Metode Trapesium

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = 2$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{2-0}{4} = 0{,}5$ dan $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}5; x_2 = 1; x_3 = 1{,}5; x_4 = 2;$
4. Metode Trapesium

$\int_0^2 (x^3 + x)dx =$

$= \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\}$

$= \frac{0{,}5}{2}\{f(0) + 2f(0{,}5) + 2f(1) + 2f(1{,}5) + f(2)\}$

$= \frac{0{,}5}{2}\{(0) + 2(0{,}5^3 + 0{,}5) + 2(1^3 + 1) + 2(1{,}5^3 + 1{,}5) + (2^3 + 2)\}$

$= 6{,}2500$

c. Secara Numerik menggunakan Metode *Gauss-Legendre*

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = 2$
3. $x = \frac{(a+b)+(b-a)t}{2} = \frac{(0+2)+(2-0)t}{2} = \frac{2+2t}{2} = 1 + t$; dan $dx = 1dt$
4. Transformasikan $\int f(x)\,dx$ menjadi $\int f(t)\,dt$:
5. Didapatkan $\int_0^2 (x^3 + x)dx = \int_{-1}^1 \left((1+t)^3 + (1+t)\right)dt$ dan $f(t) = \left((1+t)^3 + (1+t)\right)$
6. Maka

$f(1/\sqrt{3}) = \left((1 + 1/\sqrt{3})^3 + (1 + 1/\sqrt{3})\right) = 5{,}5019$

$f(-1/\sqrt{3}) = \left((1 - 1/\sqrt{3})^3 + (1 - 1/\sqrt{3})\right) = 0{,}4981$

7. Dengan demikian

$$\int_0^2 (x^3 + x)dx \approx f\{(1/\sqrt{3}) + f(-1/\sqrt{3})\}$$

$$\approx 5{,}5019 + 0{,}4981$$

$$\approx 6{,}0000$$

d. Secara Numerik menggunakan Metode Integrasi Numerik Boole

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = 2$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{2-0}{4} = 0,5$ dan $x_0 = 0$; $x_1 = 0,5; x_2 = 1; x_3 = 1,5; x_4 = 2;$
4. Aturan Boole

$$\int_0^2 (x^3 + x)dx = \frac{2h}{45}\{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\}$$

$$= \frac{2(0,5)}{45}\{7f(0) + 32f(0,5) + 12f(1) + 32f(1,5) + 7f(2)\}$$

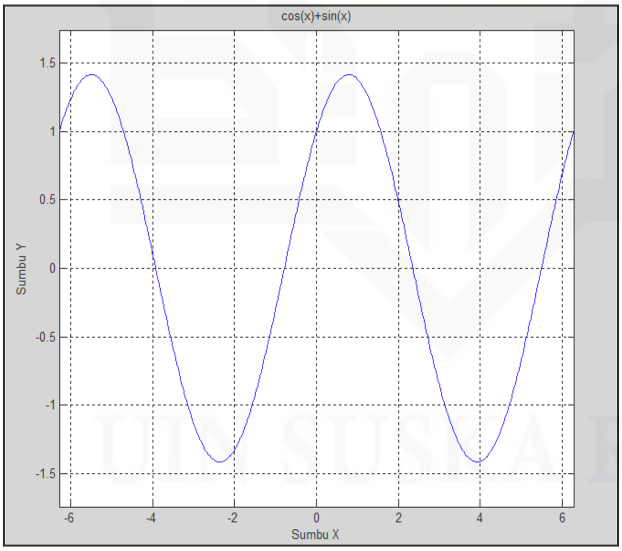
$$= \frac{1}{45}\{7(0) + 32(0,5^3 + 0,5) + 12(1^3 + 1) + 32(1,5^3 + 1,5) + 7(2^3 + 2)\}$$

$$= 6,000000$$

Kasus 3

Secara analitis

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x \, dx$$



Gambar 4.3 Grafik Kasus 3

a. Secara Numerik menggunakan Metode *Adaptive* Simpson

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = \frac{\pi}{2}$

3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} = \frac{\pi}{8}$ dan $x_0 = 0; x_1 = \frac{\pi}{8}; x_2 = \frac{\pi}{4}; x_3 = \frac{3\pi}{8}; x_4 = \frac{\pi}{2};$
4. Metode Simpson $\frac{1}{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x \, dx =$$
$$= \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\}$$
$$= \frac{\frac{\pi}{8}}{3}\left\{f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$= \frac{\pi}{24}\left\{(\cos 0 + \sin 0) + 4\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right) + 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right) + 4\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}\right) + \left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$= 2{,}0003$$

5. Metode Simpson $\frac{3}{8}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x \, dx =$$
$$= \frac{3h}{8}\{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\}$$
$$= \frac{3\left(\frac{\pi}{8}\right)}{8}\left\{f(0) + 3f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 3f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$= \frac{3\pi}{64}\left\{(\cos 0 + \sin 0) + 3\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right) 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}\right) + \left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$= 1{,}881341$$

b. Secara Numerik menggunakan Metode Trapesium

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = \frac{\pi}{2}$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} = \frac{\pi}{8}$ dan $x_0 = 0; x_1 = \frac{\pi}{8}; x_2 = \frac{\pi}{4}; x_3 = \frac{3\pi}{8}; x_4 = \frac{\pi}{2};$
4. Metode Trapesium

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x \, dx =$$

$= \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\}$

$= \frac{\frac{\pi}{8}}{2}\left\{f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$= \frac{\pi}{16}\left\{(\cos 0 + \sin 0) + 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right) + 2\left(\cos\frac{\pi}{4} +\right) + 2\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \right.\right.$

$\left.\left.\sin\frac{3\pi}{8}\right) + \left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$= 1{,}9742$

c. Secara Numerik menggunakan Metode *Gauss-Legendre*

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = \frac{\pi}{2}$
3. $x = \frac{(a+b)+(b-a)t}{2} = \frac{\left(0+\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-0\right)t}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}t$; dan $dx = \frac{\pi}{4}dt$
4. Transformasikan $\int f(x)\,dx$ menjadi $\int f(t)\,dt$:
5. Didapatkan $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}t\right)\right)\frac{\pi}{4}dt$ dan $f(t) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}t\right)\right)$
6. Maka

$f(1/\sqrt{3}) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}1/\sqrt{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}1/\sqrt{3}\right)\right) = 1{,}2713$

$f(-1/\sqrt{3}) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}1/\sqrt{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}1/\sqrt{3}\right)\right) = 1{,}2713$

7. Dengan demikian

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{4} f\{(1/\sqrt{3}) + f(-1/\sqrt{3})\}$$

$$\approx \frac{\pi}{4}\,(1{,}2713 + 1{,}2713)$$

$$\approx 1{,}9969$$

d. Secara Numerik menggunakan Metode Integrasi Numerik Boole

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = \frac{\pi}{2}$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{4} = \frac{\pi}{8}$ dan $x_0 = 0$; $x_1 = \frac{\pi}{8}$; $x_2 = \frac{\pi}{4}$; $x_3 = \frac{3\pi}{8}$; $x_4 = \frac{\pi}{2}$;
4. Aturan Boole

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x \, dx =$

$= \frac{2h}{45}\{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\}$

$= \frac{2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{45}\left\{7f(0) + 32f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 12f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 32f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 7f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$= \frac{\pi}{180}\left\{7(\cos 0 + \sin 0) + 32\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right) + 12\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right) + \right.$

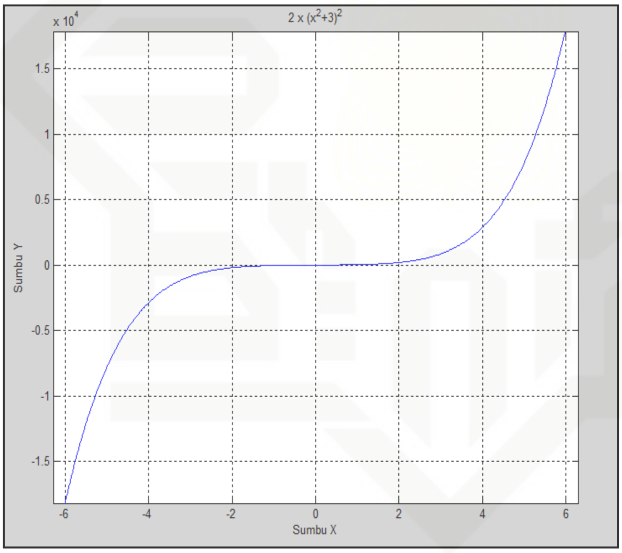
$\left. 32\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}\right) + 7\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$= 1{,}999983$

Kasus 4

Secara analitis

$$\int_0^1 2x(x^2+3)^2 dx$$



Gambar 4.4 Grafik Kasus 4

a. Secara Numerik menggunakan Metode *Adaptive* Simpson

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = 1$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$ dan $x_0 = 0; x_1 = \frac{1}{4}; x_2 = \frac{1}{2}; x_3 = \frac{3}{4}; x_4 = 1;$
4. Metode Simpson $\frac{1}{3}$

$\int_0^1 2x(x^2+3)^2 dx =$

$= \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\}$

$= \frac{\frac{1}{4}}{3}\left\{f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right\}$

$= \frac{\pi}{12}\left\{(0) + 4\left(2\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}^2 + 3\right)^2\right) + 2\left(2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}^2 + 3\right)^2\right) + 4\left(2\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}^2 + 3\right)^2\right) + \right.$

$\left.(2(1^2+3)^2)\right\}$

$= 12{,}3359$

5. Metode Simpson $\frac{3}{8}$

$\int_0^1 2x(x^2+3)^2 dx =$

$= \frac{3h}{8}\{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\}$

$= \frac{3\left(\frac{1}{4}\right)}{8}\left\{f(0) + 3f\left(\frac{1}{4}\right) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right\}$

$= \frac{\pi}{12}\left\{(0) + 4\left(2\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}^2 + 3\right)^2\right) + 2\left(2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}^2 + 3\right)^2\right) + 4\left(2\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}^2 + 3\right)^2\right) + \right.$

$\left.(2(1^2+3)^2)\right\}$

$= 10{,}859070$

b. Secara Numerik menggunakan Metode Trapesium

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = 1$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$ dan $x_0 = 0; x_1 = \frac{1}{4}; x_2 = \frac{1}{2}; x_3 = \frac{3}{4}; x_4 = 1;$
4. Metode Trapesium

$\int_0^1 2x(x^2+3)^2 dx =$

$= \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\}$

$= \frac{\frac{1}{4}}{2}\left\{f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right\}$

$$= \frac{1}{8}\Big\{(0) + 2\left(2\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}^{2} + 3\right)^{2}\right) + 2\left(2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}^{2} + 3\right)^{2}\right) + 2\left(2\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}^{2} + 3\right)^{2}\right) + (2(1^2+3)^2)\Big\}$$

$$= 12.5723$$

c. Secara Numerik menggunakan Metode *Gauss-Legendre*

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = 1$
3. $x = \frac{(a+b)+(b-a)t}{2} = \frac{(0+1)+(1-0)t}{2} = \frac{1+t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{t}{2}$; dan $dx = \frac{1}{2}dt$
4. Transformasikan $\int f(x)\,dx$ menjadi $\int f(t)\,dt$:
5. Didapatkan $\int_0^1 2x(x^2+3)^2 dx = \int_{-1}^{1}\left(2\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)^2+3\right)^2\right)\frac{1}{2}dt$ dan

   $$f(t) = \left(2\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)^2+3\right)^2\right)$$
6. Maka

$$f(1/\sqrt{3}) = \left(2\left(\frac{1}{2}+\frac{1/\sqrt{3}}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1/\sqrt{3}}{2}\right)^2+3\right)^2\right) = 20{,}6932$$

$$f(-1/\sqrt{3}) = \left(2\left(\frac{1}{2}-\frac{1/\sqrt{3}}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1/\sqrt{3}}{2}\right)^2+3\right)^2\right) = 3{,}9179$$

7. Dengan demikian

$$\int_0^1 2x(x^2+3)^2 dx \approx \frac{1}{2} f\{(1/\sqrt{3}) + f(-1/\sqrt{3})\}$$

$$\approx \frac{1}{2}(20{,}6932 + 3{,}9179)$$

$$\approx 12{,}3056$$

d. Secara Numerik menggunakan Metode Integrasi Numerik Boole

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = 1$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$ dan $x_0 = 0; x_1 = \frac{1}{4}; x_2 = \frac{1}{2}; x_3 = \frac{3}{4}; x_4 = 1;$
4. Aturan Boole

$\int_0^1 2x(x^2+3)^2 dx =$

$= \frac{2h}{45}\{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\}$

$= \frac{2\left(\frac{1}{4}\right)}{45}\left\{7f(0) + 32f\left(\frac{1}{4}\right) + 12f\left(\frac{1}{2}\right) + 32f\left(\frac{3}{4}\right) + 7f(1)\right\}$

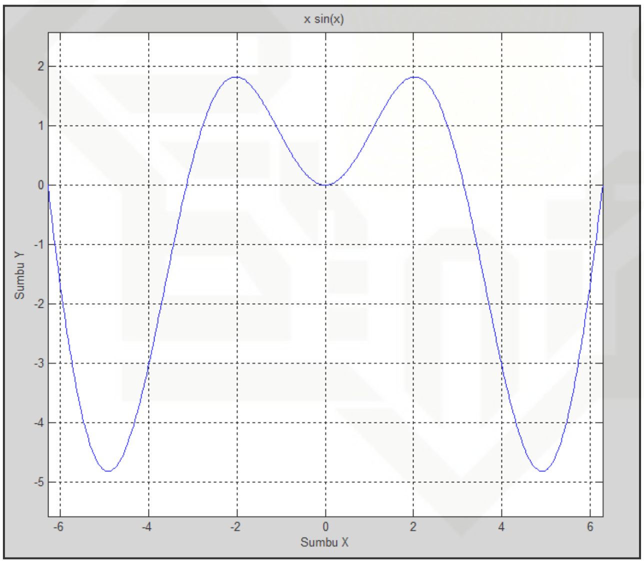
$= \frac{1}{90}\left\{7(0) + 32\left(2\frac{1}{4}\left(\frac{1^2}{4}+3\right)^2\right) + 12\left(2\frac{1}{2}\left(\frac{1^2}{2}+3\right)^2\right) + 32\left(2\frac{3}{4}\left(\frac{3^2}{4}+3\right)^2\right) + 7(2(1^2+3)^2)\right\}$

$= 12{,}333333$

Kasus 5

Secara analitis

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$



Gambar 4.5 Grafik Kasus 5

a. Secara Numerik menggunakan Metode *Adaptive* Simpson

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = \pi$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$ dan $x_0 = 0$; $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{2}$; $x_3 = \frac{3\pi}{4}$; $x_4 = \pi$;

4. Metode Simpson $\frac{1}{3}$

$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx =$

$= \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\}$

$= \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\left\{f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f(\pi)\right\}$

$= \frac{\pi}{12}\left\{(0 \sin 0) + 4\left(\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) + 4\left(\frac{3\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{4}\right) + (\pi \sin \pi)\right\}$

$= 3{,}1488$

5. Metode Simpson $\frac{3}{8}$

$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx =$

$= \frac{3h}{8}\{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\}$

$= \frac{3\left(\frac{\pi}{4}\right)}{8}\left\{f(0) + 3f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f(\pi)\right\}$

$= \frac{3\pi}{32}\left\{(0 \sin 0) + 3\left(\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right) + 3\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) + 2\left(\frac{3\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{4}\right) + (\pi \sin \pi)\right\}$

$= 2{,}860017$

b. Secara Numerik menggunakan Metode Trapesium

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = \pi$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$ dan $x_0 = 0$; $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{2}$; $x_3 = \frac{3\pi}{4}$; $x_4 = \pi$;
4. Metode Trapesium

$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx =$

$= \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\}$

$= \frac{\frac{\pi}{4}}{2}\left\{f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f(\pi)\right\}$

$= \frac{\pi}{6}\left\{(0 \sin 0) + 2\left(\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) + 2\left(\frac{3\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{4}\right) + (\pi \sin \pi)\right\}$

$= 2{,}9784$

c. Secara Numerik menggunakan Metode *Gauss-Legendre*

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$

2. Batas atas daerah integrasi $(b) = \pi$
3. $x = \frac{(a+b)+(b-a)t}{2} = \frac{(0+\pi)+(\pi-0)t}{2} = \frac{\pi+\pi t}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2}$; dan $dx = \frac{\pi}{2}dt$
4. Transformasikan $\int f(x)\,dx$ menjadi $\int f(t)\,dt$:
5. Didapatkan $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx = \int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}\right)\right)\frac{\pi}{2}dt$ dan $f(t) = \left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}\right)\right)$
6. Maka

$$f(1/\sqrt{3}) = \left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(1/\sqrt{3})\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(1/\sqrt{3})\pi}{2}\right)\right) = 1{,}5267$$

$$f(-1/\sqrt{3}) = \left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(-1/\sqrt{3})\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(-1/\sqrt{3})\pi}{2}\right)\right) = 0{,}4091$$

7. Dengan demikian

$$\int_0^{\pi} x \sin x\, dx \approx \frac{\pi}{2} f\{(1/\sqrt{3}) + f(-1/\sqrt{3})\}$$

$$\approx \frac{\pi}{2}(1{,}5267 + 0{,}4091)$$

$$\approx 3{,}0408$$

d. Secara Numerik menggunakan Metode Integrasi Numerik Boole

1. Batas bawah daerah integrasi $(a) = 0$
2. Batas atas daerah integrasi $(b) = \pi$
3. Jumlah Pias $n = 4$, sehingga $h = \frac{b-a}{4} = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$ dan $x_0 = 0$; $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{2}$; $x_3 = \frac{3\pi}{4}$; $x_4 = \pi$;
4. Aturan Boole

$$\int_0^{\pi} x \sin x\, dx =$$

$$= \frac{2h}{45}\{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\}$$

$$= \frac{2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{45}\left\{7f(0) + 32f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 12f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 32f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 7f(\pi)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{90}\left\{7(0\sin 0) + 32\left(\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right) + 12\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) + 32\left(\frac{3\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{4}\right) + 7(\pi\sin\pi)\right\}$$

$$= 3{,}139348$$

4.2 Penyelesaian Integral Menggunakan Matlab

a. Kaidah Simpson $\frac{1}{3}$

```
for i=1:n-1
    x=x+h;
    if mod(i,2)==1
       sigma=sigma +4*f(x);
        else
       sigma=sigma+2*f(x);
    end
fprintf('||  %d   || %7.2f ||  %8.2f ||\n',i,x,f(x))
end
I=(h/3)*(f(a) + sigma + f(b));
```

b. Metode Simpson $\frac{3}{8}$

```
for i=1:n-1
    x=x+h;
    if mod(i,3)==0
       sigma=sigma +2*f(x);
         else
       sigma=sigma+3*f(x);
    end
fprintf('||  %d   || %7.2f ||  %8.2f   ||\n',i,x,f(x))
end
I=(3*h/8)*(f(a) + sigma + f(b));
```

c. Metode Trapesium

```
for i=1:n-1
    x=x+h;
    sigma=sigma+2*f(x);
fprintf('||  %d   || %7.2f ||  %8.2f   ||\n',i,x,f(x))
end
```

d. Metode *Gauss-Legendre*

```
F=@(u)f(((b-a)*u+(b-a))/2);
x1=1/sqrt(3); x2=-1/sqrt(3);
g=((b-a)/2)*(F(x1)+F(x2));

disp('======================================');
fprintf('f(x1)   :  %5.4f \n',F(x1))
fprintf('f(x2)   :  %5.4f \n',F(x2))
fprintf('Hasil dengan Gauss-Legendre : %5.4f \n',g)
```

e. Metode Integrasi Numerik Boole

```
for i=1:n-1
    x=x+h;
```

```
        if mod(i,2)==1
           sigma=sigma +32*f(x);
           else if mod(i,4)==0
               sigma=sigma +14*f(x);
               else
               sigma=sigma +12*f(x);
           end
        end
fprintf('||  %d   || %7.2f ||  %8.2f   ||\n',i,x,f(x))
end
I=(2*h/45)*((7*f(a)) + sigma + (7*f(b)));
```

Setelah melakukan integrasi dengan bantuan matlab dengan menggunakan metode Adaptive Simpson, Trapesium, Gauss-Legendre dan Integrasi Numerik Boole untuk mencari hasil integral dari beberapa persoalan integral maka dapat dilihat hasil integrasinya pada tabel dibawah ini.

Tabel 4.1 Hasil integral secara eksak

No	Kasus Integral	Eksak
1	$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	2
2	$\int_0^2 (x^3 + x) dx$	6
3	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x \, dx$	2
4	$\int_0^1 (x^2 + 3)^2 2x dx$	8,75
5	$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$	3,14

Tabel 4.2 Hasil integral dari metode Adaptive Simpson, Trapesium, Gauss-Legendre dan Integrasi Numerik dengan matlab

No	Kasus Integral	Simpson $\frac{1}{3}$	Simpson $\frac{3}{8}$	Trapesium	Gauss	Boole
1	$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	2,00000	1,957774	2,0009	3,6910	2,007613
2	$\int_0^2 (x^3 + x) dx$	6,00000	5,566800	6,0400	6,0000	6,065920
3	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x \, dx$	2,0000	1,9576	1,9959	1,9969	2,008087
4	$\int_0^1 (x^2 + 3)^2 2x dx$	12,3334	11,615405	12,3716	12,3056	12,447394
5	$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$	3,1418	3,1012	3,1157	3,0408	3,155838

4.3 Analisis Galat

Kasus 1

1. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode *Adaptive* Simpson untuk kasus pertama $f(x) = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ dengan aturan simpson $\frac{1}{3}$ menghasilkan 2,0000 dan aturan simpson $\frac{3}{8}$ menghasilkan 1,957774 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 2, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 1,957774 - 2 = -0,0422256$

   Galat Mutlak

   $|\varepsilon| = |I - \hat{I}| = |1,957774 - 2| = |-0,0422256| = 0,0422256$

   dan Galat relatifnya

   $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0,0422256}{1,957774} = 0,02156816875$

   Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,0422256 dan galat relatif sebesar 0,02156816875.

2. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode Trapesium untuk kasus pertama $f(x) = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ menghasilkan 2,0009 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 2, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 2,0009 - 2 = 0,0009$

   Galat Mutlak

   $|\varepsilon| = |I - \hat{I}| = |2,0009 - 2| = |0,0009| = 0,0009$

   dan Galat relatifnya

   $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0,0009}{2,0009} = 0,0004497976$

   Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,0009 dan galat relatif sebesar 0,0004497976.

3. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode *Gauss-Legendre* untuk kasus pertama $f(x) = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ menghasilkan 3,6910 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 2, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 3{,}6910\ - 2 = 1{,}6910$

   Galat Mutlak

   $|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |3{,}6910\ - 2| = |1{,}6910| = 1{,}6910$

   dan Galat relatifnya

   $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{1{,}6910}{3{,}6910} = 0{,}4581414251$

   Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 1,6910 dan galat relatif sebesar 0,4581414251.

4. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode Integrasi Numerik Boole untuk kasus pertama $f(x) = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ menghasilkan 1,973755 dan sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 2, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 2{,}007613\ - 2 = 0{,}007613$

   Galat Mutlak

   $|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |2{,}007613\ - 2| = |0{,}007613\ | = 0{,}007613$

   dan Galat relatifnya

   $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0{,}007613}{2{,}007613} = 0{,}0037920655$

   Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,007613 dan galat relatif sebesar 0,0037920655.

Kasus 2

1. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode *Adaptive* Simpson untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^2 (x^3\ + x)dx$ dengan aturan simpson $\frac{1}{3}$ menghasilkan 6,0000 dan aturan simpson $\frac{3}{8}$ menghasilkan 5,566800 sedangkan penyelesaian

secara analitik menghasilkan 6, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

Maka galatnya

$\varepsilon = I - \hat{I} = 5{,}566800\ - 6 = -0{,}4332$

Galat Mutlak

$|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |5{,}566800\ - 6| = |-0{,}4332\ | = 0{,}4332$

dan Galat relatifnya

$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0{,}0422256}{1{,}957774} = 0{,}0778184954$

Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,4332 dan galat relatif sebesar 0,0778184954.

2. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode Trapesium untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^2 (x^3 + x)dx$ menghasilkan 6,0400 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 6, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 6{,}0400 - 6 = 0{,}0400$

   Galat Mutlak

   $|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |6{,}0400 - 6| = |0{,}0400| = 0{,}0400$

   dan Galat relatifnya

   $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0{,}0400}{6{,}0400} = 0{,}0066225166$

   Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,0400 dan galat relatif sebesar 0,0066225166.

3. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode *Gauss-Legendre* untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^2 (x^3 + x)dx$ menghasilkan 6 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 6, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 6\ - 6 = 0$

   Galat Mutlak

$|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |6 - 6| = |0| = 0$

dan Galat relatifnya

$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0}{6} = 0$

Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0 dan galat relatif sebesar 0.

4. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode Integrasi Numerik Boole untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^2 (x^3 + x)dx$ menghasilkan 5,9413 dan sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 6, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

Maka galatnya

$\varepsilon = I - \hat{I} = 6{,}065920 - 6 = 0{,}065920$

Galat Mutlak

$|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |6{,}065920 - 6| = |0{,}065920| = 0{,}065920$

dan Galat relatifnya

$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0{,}065920}{6{,}065920} = 0{,}0108672716$

Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,065920 dan galat relatif sebesar 0,0108672716.

Kasus 3

1. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode *Adaptive* Simpson untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x \, dx$ dengan aturan simpson $\frac{1}{3}$ menghasilkan 2,0000 dan aturan simpson $\frac{3}{8}$ menghasilkan 1,9576 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 2, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

Maka galatnya

$\varepsilon = I - \hat{I} = 1{,}9576 - 2 = -0{,}0424$

Galat Mutlak

$|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |1{,}9576 - 2| = |-0{,}0424| = 0{,}0424$

dan Galat relatifnya

$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0,0424}{1,9576} = 0,0216591745$

Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,0424 dan galat relatif sebesar 0,0216591745.

2. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode Trapesium untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x \, dx$ menghasilkan 1,9959 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 2, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

Maka galatnya

$\varepsilon = I - \hat{I} = 1,9959 - 2 = -0,0041$

Galat Mutlak

$|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |1,9959 - 2| = |-0,0041| = 0,0041$

dan Galat relatifnya

$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0,0041}{1,9959} = 0,0020542111$

Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,0041 dan galat relatif sebesar 0,0020542111.

3. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode *Gauss-Legendre* untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x \, dx$ menghasilkan 1,9969 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 2, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

Maka galatnya

$\varepsilon = I - \hat{I} = 1,9969 - 2 = -0,0031$

Galat Mutlak

$|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |1,9969 - 2| = |-0,0031| = 0,0031$

dan Galat relatifnya

$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0,0031}{1,9969} = 0,0015524062$

Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 1,9969 dan galat relatif sebesar 0,0015524062.

4. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode Integrasi Numerik Boole untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x \, dx$ menghasilkan 1,9710 dan sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 2 , maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 2{,}008087 - 2 = 0{,}008087$

   Galat Mutlak

   $|\varepsilon| = |I - \hat{I}| = |2{,}008087 \ - 2| = |0{,}008087\ | = 0{,}008087$

   dan Galat relatifnya

   $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0{,}008087}{2{,}008087} = 0{,}004027216$

   Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,008087 dan galat relatif sebesar 0,004027216.

Kasus 4

1. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode *Adaptive* Simpson untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^1 (x^2 + 3)^2 2x dx$ dengan aturan simpson $\frac{1}{3}$ menghasilkan 12,3334 dan aturan simpson $\frac{3}{8}$ menghasilkan 11,615405 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 8,75, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya aturan simpson $\frac{1}{3}$

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 12{,}3334 - 8{,}75 = 3{,}5834$

   Galat Mutlak

   $|\varepsilon| = |I - \hat{I}| = |12{,}3334 \ - 8{,}75| = |3{,}5834| = 3{,}5834$

   dan Galat relatifnya

   $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{3{,}5834}{12{,}3334} = 0{,}2905443754$

   Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 3,5834 dan galat relatif sebesar 0,2905443754.

   Maka galatnya aturan simpson $\frac{3}{8}$

$\varepsilon = I - \hat{I} = 11{,}615405 - 8{,}75 = 2{,}865405$

Galat Mutlak

$|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |11{,}615405 - 8{,}75| = |2{,}865405| = 2{,}865405$

dan Galat relatifnya

$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{2{,}865405}{11{,}615405} = 0{,}2466900638$

Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 2,865405 dan galat relatif sebesar 0,2466900638.

2. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode Trapesium untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^1 (x^2+3)^2 2x dx$ menghasilkan 12,3716 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 8,75, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 12{,}3716 - 8{,}75 = 3{,}6216$

   Galat Mutlak

   $|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |12{,}3716 - 8{,}75| = |3{,}6216\ | = 3{,}6216$

   dan Galat relatifnya

   $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{3{,}6216}{12{,}3716} = 0{,}2927349736$

   Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,0009 dan galat relatif sebesar 0,2927349736.

3. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode *Gauss-Legendre* untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^1 (x^2+3)^2 2x dx$ menghasilkan 12,3056 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 8,75, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 12{,}3056 - 8{,}75 = 3{,}5556$

   Galat Mutlak

   $|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |12{,}3056 - 2| = |1{,}6910| = 3{,}5556$

   dan Galat relatifnya

   $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{3{,}5556}{12{,}3056} = 0{,}2889416201$

Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 3,5556 dan galat relatif sebesar 0,2889416201.

4. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode Integrasi Numerik Boole untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^1 (x^2+3)^2 2x dx$ menghasilkan 12,187947 dan sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 8,75, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 12{,}447394 - 8{,}75 = 3{,}697394$

   Galat Mutlak

   $|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |12{,}447394 - 8{,}75| = |3{,}697394| = 3{,}697394$

   dan Galat relatifnya

   $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{3{,}697394}{12{,}447394} = 0{,}2970416137$

   Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 3,697394 dan galat relatif sebesar 0,2970416137.

Kasus 5

1. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode *Adaptive* Simpson untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ dengan aturan simpson $\frac{1}{3}$ menghasilkan 3,1418 dan aturan simpson $\frac{3}{8}$ menghasilkan 3,1012 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 3,14, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya simpson $\frac{1}{3}$

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 3{,}1418 - 3{,}14 = 0.0018$

   Galat Mutlak

   $|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |3{,}1418 - 3{,}14| = |0{,}0018| = 0{,}0018$

   dan Galat relatifnya

   $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0{,}0018}{3{,}1418} = 0{,}00057292$

Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,0018 dan galat relatif sebesar 0,00057292.

Maka galatnya simpson $\frac{3}{8}$

$\varepsilon = I - \hat{I} = 3{,}1012 - 3{,}14 = -0{,}0388$

Galat Mutlak

$|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |3{,}1012 - 3{,}14| = |0{,}0388\ | = 0{,}0388$

dan Galat relatifnya

$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0{,}0388}{3{,}1012} = 0{,}012511286$

Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,0388 dan galat relatif sebesar 0,012511286.

2. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode Trapesium untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^{\pi} x \sin x\, dx$ menghasilkan 3,1157 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 3,14, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 3{,}1157 - 3{,}14 = -0{,}0243$

   Galat Mutlak

   $|\varepsilon| = \left|I - \hat{I}\right| = |3{,}1157 - 3{,}14| = |-0{,}0243| = 0{,}0243$

   dan Galat relatifnya

   $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0{,}0243}{3{,}1157} = 0{,}0077992105$

   Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,0243 dan galat relatif sebesar 0,0077992105.

3. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode *Gauss-Legendre* untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^{\pi} x \sin x\, dx$ menghasilkan 3,0408 sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 3,14, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 3{,}0408 - 3{,}14 = -0{,}0992$

   Galat Mutlak

$|\varepsilon| = |I - \hat{I}| = |3{,}0408 - 3{,}14| = |-0{,}0992| = 0{,}0992$

dan Galat relatifnya

$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0{,}0992}{3{,}0408} = 0{,}0326229939$

Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,0992 dan galat relatif sebesar 0,0326229939.

4. Penyelesaian integral dengan menggunakan metode Integrasi Numerik Boole untuk kasus pertama $f(x) = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ menghasilkan 3,0812 dan sedangkan penyelesaian secara analitik menghasilkan 3,14, maka dari hasil tersebut akan dibandingkan untuk mengetahui seberapa besar nilai galatnya (*error*):

   Maka galatnya

   $\varepsilon = I - \hat{I} = 3{,}155838 - 3{,}14 = 0{,}015838$

   Galat Mutlak

   $|\varepsilon| = |I - \hat{I}| = |3{,}155838 - 3{,}14| = |0{,}015838| = 0{,}015838$

   dan Galat relatifnya

   $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{0{,}015838}{3{,}155838} = 0{,}0050186353$

   Jadi, besarnya galat mutlak sebesar 0,015838 dan galat relatif sebesar 0,0050186353.

Dengan demikian dapat diketahui bahwa untuk menyelesaikan persoalan integral secara numerik berdasarkan nilai galat (*error*) dengan menggunakan metode Adaptive Simpson, Trapesium, Gauss-Legendre dan Integrasi Numerik Boole dapat dilihat melalui galat (*error*) yang terkecil yang terdapat pada tabel di bawah ini.

Tabel 4.3 Galat mutlak dari metode Adaptive Simpson, Trapesium, Gauss-Legendre dan Integrasi Numerik dengan $n = 10$

No	Kasus Integral	*Error* Mutlak ($\|\varepsilon\|$) $n = 10$				
		Simpson $\frac{1}{3}$	Simpson $\frac{3}{8}$	Trapesium	Gauss	Boole
1	$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	0	0,0422256	0,0009	1,6910	0,007613
2	$\int_0^2 (x^3 + x) dx$	0	0,4332	0,0400	0	0,065920
3	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x \, dx$	0	0,0424	0,0041	1,9969	0,008087
4	$\int_0^1 (x^2 + 3)^2 2x dx$	3,5834	2,865405	0,0009	3,5556	3,697394
5	$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$	0,0018	0,0388	0,0243	0,0992	0,015838

Tabel 4.4 Galat Relatif dari metode Adaptive Simpson, Trapesium, Gauss-Legendre dan Integrasi Numerik dengan $n = 10$

No	Kasus Integral	*Error* Relatif (ε_R) $n = 10$				
		Simpson $\frac{1}{3}$	Simpson $\frac{3}{8}$	Trapesium	Gauss	Boole
1	$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	0	0,02157	0,00045	0,45814	0,003792
2	$\int_0^2 (x^3 + x) dx$	0	0,07782	0,00662	0	0,010862
3	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x + \sin x \, dx$	0	0,02166	0,00205	0,00155	0,004027
4	$\int_0^1 (x^2 + 3)^2 2x dx$	0,29054	0,24669	0,29273	0,28894	0,297041
5	$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$	0,00057	0,01251	0,0078	0,03262	0,005018

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian berdasarkan tabel galat mutlak 4.2 dan galat relatif 4.3 untuk melakukan perbandingan ketelitian atau keakuratan di dalam menyelesaikan persoalan integral antara metode *Adaptive* Simpson, Trapesium, *Gauss-Legendre* dan Integrasi Numerik Boole dari lima kasus integral pada tabel dari segi banyaknya jumlah iterasi di dalam hasil penelitian yang diperoleh pada tabel hasil numerik 4.1, bahwa metode Trapesium, *Gauss-Legendre*, dan Integasi Numerik Boole tidak mendapatkan hasil integral numerik yang memiliki tingkat kesalahan kecil pada iterasi sedikit. Sedangkan metode Adaptive Simpson hasil integral numerik memiliki tingkat kesalahan kecil pada iterasi sedikit.

Akan tetapi masing-masing mempunyai tingkat ketelitian berbeda-beda dan sifat integrasi berbeda antar metode di dalam menyelesaikan persoalan integral, seperti simpson $\frac{1}{3}$ mempunyai ketelitian yang sangat baik di dalam menyelesaikan persoalan integral tentu tetapi mempunyai ketelitian buruk di banding metode lainnya saat integral parsial sama seperti halnya metode gauss-legendre. Simpson $\frac{3}{8}$ mempunyai ketelitian sangat baik di dalam menyelesaikan persoalan integral parsial tetapi buruk di banding metode lainnya saat mengintegrasikan integral tentu sedangkan Integasi Numerik Boole mengintegrasikan persoalan integral cenderung merata integral tentu maupun parsial sama seperti halnya metode Trapesium.

Namun, jika dibandingkan dengan keselurahan metode yang diteliti maka yang lebih efektif adalah simpson $\frac{1}{3}$ untuk integral tentu dan simpson $\frac{3}{8}$ untuk integral parsial. Maka sebab itu perlu pembelajaran mengenai metode Adaptive Simpson karena pada kenyataannya untuk mencapai hasil yang efektif dan efisien dibutuhkan iterasi yang sedikit dan tingkat kesalahan yang kecil.

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya untuk kasus pembahasan integral agar diperluas untuk melihat hasil integrasi yang lebih baik dan mencoba di luar dari metode Adaptive Simpson, Trapesium, Gauss-Legendre dan Integrasi Numerik Boole atau mencari metode metode baru untuk dibandingkan.

Lampiran 1 Program Simpson 1/3

```
clear all; close all; clc;
%% Skema Parameter
disp('MENCARI NUMERIK DENGAN MENGGUNAKAN MATLAB');
f=input('Masukkan fungsi Integrannya     : ');
a=input('Masukkan batas bawah integrasi : ');
b=input('Masukkan batas atas integrasi  : ');
n=input('Masukkan banyaknya partisi     : ');
h=(b-a)/n;
x=a;
sigma=0;
pi=3.14;
disp('====================================');
disp('||  i   ||     xi    ||      f(xi)    ||');
disp('====================================');
%% Skema Metode Simpson 1/3
for i=1:n-1
    x=x+h;
    if mod(i,2)==1
        sigma=sigma +4*f(x);
        else
        sigma=sigma+2*f(x);
    end
    fprintf('||   %d    || %7.2f ||   %8.2f    ||\n',i,x,f(x))
end
disp('====================================');
I=(h/3)*(f(a) + sigma + f(b));
fprintf('Hasil Metode Simpson 1/3 : %5.4f ||\n',I)
disp('====================================');
```

Output

```
MENCARI NUMERIK DENGAN MENGGUNAKAN MATLAB
Masukkan fungsi Integrannya     : @(x)(1/sqrt(x))
Masukkan batas bawah integrasi : 4
Masukkan batas atas integrasi  : 9
Masukkan banyaknya partisi     : 10
====================================
||  i   ||    xi   ||      f(xi)    ||
====================================
||  1   ||    4.50 ||       0.47    ||
||  2   ||    5.00 ||       0.45    ||
||  3   ||    5.50 ||       0.43    ||
||  4   ||    6.00 ||       0.41    ||
||  5   ||    6.50 ||       0.39    ||
||  6   ||    7.00 ||       0.38    ||
||  7   ||    7.50 ||       0.37    ||
||  8   ||    8.00 ||       0.35    ||
||  9   ||    8.50 ||       0.34    ||
====================================
Hasil Metode Simpson 1/3 : 2.0000 ||
====================================
>>
```

Lampiran 2 Program Simpson 3/8

```
clear all; close all; clc;
%% Skema Parameter
disp('MENCARI NUMERIK DENGAN MENGGUNAKAN MATLAB');
f=input('Masukkan fungsi Integrannya     : ');
a=input('Masukkan batas bawah integrasi : ');
b=input('Masukkan batas atas integrasi  : ');
n=input('Masukkan banyaknya partisi     : ');
h=(b-a)/n;
x=a;
sigma=0;
pi=3.14;
disp('====================================');
disp('||  i   ||    xi   ||      f(xi)    ||');
disp('====================================');
%% Skema Metode Simpson 3/8
for i=1:n-1
    x=x+h;
    if mod(i,3)==0
       sigma=sigma +2*f(x);
         else
       sigma=sigma+3*f(x);
    end
    fprintf('||  %d   || %7.2f ||  %8.2f   ||\n',i,x,f(x))
end
disp('====================================');
I=(3*h/8)*(f(a) + sigma + f(b));
fprintf('Hasil Metode Simpson 3/8 : %5.4f ||\n', I)
disp('====================================');
```

Output

```
MENCARI NUMERIK DENGAN MENGGUNAKAN MATLAB
Masukkan fungsi Integrannya     : @(x)(1/sqrt(x))
Masukkan batas bawah integrasi : 4
Masukkan batas atas integrasi  : 9
Masukkan banyaknya partisi     : 10
====================================
||  i   ||    xi   ||     f(xi)    ||
====================================
||  1   ||    4.50 ||      0.47    ||
||  2   ||    5.00 ||      0.45    ||
||  3   ||    5.50 ||      0.43    ||
||  4   ||    6.00 ||      0.41    ||
||  5   ||    6.50 ||      0.39    ||
||  6   ||    7.00 ||      0.38    ||
||  7   ||    7.50 ||      0.37    ||
||  8   ||    8.00 ||      0.35    ||
||  9   ||    8.50 ||      0.34    ||
====================================
Hasil Metode Simpson 3/8 : 1.9578 ||
====================================
>>
```

Lampiran 3 Program Trapesium

```
clear all; close all; clc;
%% Skema Parameter
disp('MENCARI NUMERIK DENGAN MENGGUNAKAN MATLAB');
f=input('Masukkan fungsi Integrannya     : ');
a=input('Masukkan batas bawah integrasi : ');
b=input('Masukkan batas atas integrasi  : ');
n=input('Masukkan banyaknya partisi      : ');
h=(b-a)/n;
x=a;
sigma=0;
pi=3.14;
disp('====================================');
disp('||  i   ||    xi   ||      f(xi)    ||');
disp('====================================');
%% Skema Metode Trapesium
for i=1:n-1
    x=x+h;
    sigma=sigma+2*f(x);
    fprintf('||  %d   || %7.2f ||  %8.2f   ||\n',i,x,f(x))
end
disp('====================================');
I=(h/2)*(f(a) + sigma + f(b));
fprintf('Hasil Metode Trapesium  :  %5.4f ||\n', I)
disp('====================================');
```

Output

```
MENCARI NUMERIK DENGAN MENGGUNAKAN MATLAB
Masukkan fungsi Integrannya     : @(x)(1/sqrt(x))
Masukkan batas bawah integrasi : 4
Masukkan batas atas integrasi  : 9
Masukkan banyaknya partisi      : 10
====================================
||  i   ||    xi   ||      f(xi)    ||
====================================
||  1   ||    4.50 ||       0.47    ||
||  2   ||    5.00 ||       0.45    ||
||  3   ||    5.50 ||       0.43    ||
||  4   ||    6.00 ||       0.41    ||
||  5   ||    6.50 ||       0.39    ||
||  6   ||    7.00 ||       0.38    ||
||  7   ||    7.50 ||       0.37    ||
||  8   ||    8.00 ||       0.35    ||
||  9   ||    8.50 ||       0.34    ||
====================================
Hasil Metode Trapesium  :  2.0009 ||
====================================
>> 
```

Lampiran 4 Program Gauss-Legendre

```
close all; clear all; clc;
%% Skema Parameter
f=input('Masukkan fungsi Integral   : ');
a=input('Masukkan nilai batas bawah : ');
b=input('Masukkan nilai batas atas  : ');
pi=3.14;

%% Skema Gauss-Legendre
F=@(u)f(((b-a)*u+(b-a))/2);
x1=1/sqrt(3); x2=-1/sqrt(3);
g=((b-a)/2)*(F(x1)+F(x2));

disp('======================================');
fprintf('f(x1)  :  %5.4f \n',F(x1))
fprintf('f(x2)  :  %5.4f \n',F(x2))
fprintf('Hasil Integral dengan Gauss-Legendre : %5.4f \n',g)
```

Output

```
Masukkan fungsi Integral   : @(x)(1/sqrt(x))
Masukkan nilai batas bawah : 4
Masukkan nilai batas atas  : 9
======================================
f(x1)  :  0.5036
f(x2)  :  0.9728
Hasil Integral dengan Gauss-Legendre : 3.6910
>>
```

Lampiran 5 Program Integrasi Boole

```
clear all; close all; clc;
%% Skema Parameter
disp('MENCARI NUMERIK DENGAN MENGGUNAKAN MATLAB');
f=input('Masukkan fungsi Integrannya      : ');
a=input('Masukkan batas bawah integrasi : ');
b=input('Masukkan batas atas integrasi  : ');
n=input('Masukkan banyaknya partisi     : ');
h=(b-a)/n;
x=a;
sigma=0;
pi=3.14;
disp('====================================');
disp('||   i    ||     xi    ||      f(xi)    ||');
disp('====================================');
%% Skema Metode Integrasi Numerik Boole
for i=1:n-1
    x=x+h;
    if mod(i,2)==1
        sigma=sigma +32*f(x);
        else if mod(i,4)==0
            sigma=sigma +14*f(x);
            else
            sigma=sigma +12*f(x);
        end
    end
    fprintf('||  %d   || %7.2f ||  %8.2f   ||\n',i,x,f(x))
end
disp('====================================');
I=(2*h/45)*((7*f(a)) + sigma + (7*f(b)));
fprintf('Integrasi Numerik Boole  : %5.4f ||\n', I);
disp('====================================');
```

Output

```
MENCARI NUMERIK DENGAN MENGGUNAKAN MATLAB
Masukkan fungsi Integrannya     : @(x)(1/sqrt(x))
Masukkan batas bawah integrasi : 4
Masukkan batas atas integrasi  : 9
Masukkan banyaknya partisi      : 10
====================================
||   i    ||     xi    ||      f(xi)    ||
====================================
||   1    ||     4.50 ||       0.47    ||
||   2    ||     5.00 ||       0.45    ||
||   3    ||     5.50 ||       0.43    ||
||   4    ||     6.00 ||       0.41    ||
||   5    ||     6.50 ||       0.39    ||
||   6    ||     7.00 ||       0.38    ||
||   7    ||     7.50 ||       0.37    ||
||   8    ||     8.00 ||       0.35    ||
||   9    ||     8.50 ||       0.34    ||
====================================
Integrasi Numerik Boole  : 2.0076 ||
====================================
>>
```

DAFTAR PUSTAKA

[1] A. Prasetia, "Performansi Metode Trapesium dan Metode Gauss-Legendre dalam Penyelesaian Integral Tertentu Berbantuan Matlab," *Jurnal Mercumatika*, vol. 1, no. 1, pp. 1–12, 2016.

[2] M. N. Tentua, "Performansi Metode Trapesium Dan Metode Gauss-Legendre Dalam Penyelesaian Integral Dengan Metode Numerik Menggunakan Bahasa Pemrograman Matlab," *Jurnal Dinamika Informatika*, vol. 5, no. 2, 2016.

[3] S. N. Hutagalung, "Pemahaman Metode Numerik (Studi Kasus Metode New-Rhapson) Menggunakan Pemograman Matlab," *Jurnal Teknologi Informasi*, vol. 1, no. 1, p. 95, 2017, doi: 10.36294/jurti.v1i1.109.

[4] R. L.Burden, *Numerical Analysis*, 8th ed. USA: United States of America, 2005.

[5] N. Herfina, "Efektifitas Metode Trapesium Dan Simpson Dalam Penentuan Luas Menggunakan Pemrograman Pascal," *Jurnal Mathematics and Education*, vol. 1, pp. 53–63, 2019.

[6] Muhammad Win Afgani, "Penurunan Integrasi Kaidah Boole Dan Aplikasinya Untuk Menyelesaikan Integral Tentu Menggunakan Program Pascal," *Jurnal Raden Fatah*, 2016.

[7] Haryono Ismail, "Metode newton-cotes tertutup berdasarkan turunan pada titik tengah," pp. 1–11.

[8] E. E, P. Rahayu, and F. Zuhairoh, "Perbandingan Solusi Numerik Integral Lipat Dua Pada Fungsi Aljabar Dengan Metode Romberg Dan Simulasi Monte Carlo," *Jurnal MSA (Matematika dan Statistika serta Aplikasinya)*, vol. 5, no. 1, p. 46, 2017, doi: 10.24252/jmsa.v5n1p46.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Foto

Penulis dilahirkan di Kota Pekanbaru, Provinsi Riau pada tanggal 10 Januari 1997 dari ayah yang bernama Zulfikar Hutagalung dan ibu bernama Robidan Debata Raja. Penulis merupakan anak Ketiga dari lima bersaudara. Penulis menyelesaikan pendidikan formal Sekolah Dasar di SD Negeri 008 Tualang pada tahun 2003-2009, Sekolah Menengah Pertama di SMPS Terpadu Fataha pada tahun 2009-2012 dan penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 3Tualang pada tahun 2012-2015.

Setelah menyelesaikan pendidikan SMA pada tahun 2015, penulis melanjutkan studi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Jurusan Matematika. Pada bulan Juni 2015.