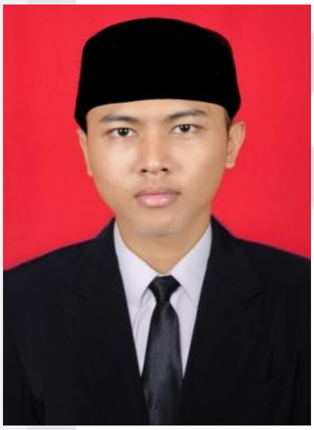
INVERS MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS $n \times n$, $(n \geq 3)$ DENGAN MATRIKS BLOK 2×2

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh :



TEDDY IRAWAN
11754101311

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2022

LEMBAR PERSETUJUAN

INVERS MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS $n \times n$, ($n \geq 3$) DENGAN MATRIKS BLOK 2×2

TUGAS AKHIR

oleh:

TEDDY IRAWAN
11754101311

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 06 Januari 2022

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Ade Novia Rahma, M.Mat.**
NIP. 19730818 200604 1 003	**NIP. 130517048**

LEMBAR PENGESAHAN

INVERS MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS $n \times n$, ($n \geq 3$) DENGAN MATRIKS BLOK 2×2

TUGAS AKHIR

oleh:

TEDDY IRAWAN
11754101311

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 06 Januari 2022

Pekanbaru, 06 Januari 2022
Mengesahkan

Dekan

Dr. Hartono, M.pd.
NIP. 19640301 199203 1 003

Ketua Program Studi

Wartono, M.Sc.
NIP. 19730818 200604 1 003

DEWAN PENGUJI :

Ketua : **Wartono, M.Sc.**

Sekretaris : **Ade Novia Rahma, M.Mat.**

Anggota I : **Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**

Anggota II : **Zukrianto, M.Si.**

Lampiran Surat :
Nomor : Nomor 25/2021
Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini :

Nama : Teddy Irawan
NIM : 11754101311
Tempat/ Tgl. Lahir : Pekanbaru, 05 Januari 1999
Fakultas/Pascasarjana : Sains dan Teknologi
Prodi : Matematika

Judul ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah~~ lainnya*:
INVERS MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS n x n
(n ≥ 3) DENGAN MATRIKS BLOK 2 x 2

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan ~~Disertai/Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~* dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~* saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/~~(Karya Ilmiah lainnya)~~* saya tersebut, maka saya besedia menerima sanksi sesuai peraturan peraturan perundang-undangan.

Demikian Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 21 Januari 2022
Yang membuat pernyataan

10000 SEPULUH RIBU RUPIAH METERAI TEMPEL 0AC85AJX650870917

TEDDY IRAWAN
NIM : 11754101311

- *pilih salah salah satu sesuai jenis karya tulis*

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 06 Januari 2022

Yang membuat pernyataan,

TEDDY IRAWAN

11754101311

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur tak henti-hentinya kepada Allah Subhanahu wa Ta'ala, atas nikmat, karunia dan rahmat–Nya sehingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir ini

..

"Man Jadda Wa Jada" Artinya Barang siapa yang bersungguh-sungguh, dia pasti berhasil.

..

"dan bahwa manusia hanya memperoleh apa yang telah diusahakannya," (Q.S An-Najm:39)

..

"Jika kamu tidak sanggup menahan lelahnya belajar maka kamu harus sanggup menahan perihnya kebodohan" –Imam Syafi'i.

INVERS MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS $n \times n$, $(n \geq 3)$ DENGAN MATRIKS BLOK 2×2

TEDDY IRAWAN
NIM: 11754101311

Tanggal Sidang : 06 Januari 2022
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Invers mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Salah satu cara sederhana dalam menentukan invers suatu matriks dengan cara memblok matriks menjadi beberapa submatriks. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers matriks Toeplitz berbentuk khusus dengan matriks blok 2×2 melalui penerapan komplemen *schur*, terdapat beberapa langkah yang dikerjakan. Pertama diberikan matriks Toeplitz berbentuk khusus. Matriks Toeplitz berbentuk khusus tersebut diblok menjadi matriks blok 2×2. Selanjutnya menentukan invers submatriks yang *invertible* dari matriks Toeplitz sehingga didapat bentuk umumnya. Terakhir diperhatikan bentuk pola invers dari dua cara memblok matriks Toeplitz berbentuk khusus orde 3×3 sampai 8×8 sehingga didapat bentuk umum invers matriks Toeplitz berbentuk khusus. Hasil yang diperoleh adalah didapatkannya bentuk umum invers matriks Toeplitz bentuk khusus $n \times n, (n \geq 3)$ dengan matriks blok 2×2.

Kata Kunci: Toeplitz, blok 2×2, invers, komplemen schur, matriks.

INVERSE TOEPLITZ MATRIX WITH SPECIAL FORM $\boldsymbol{n \times n}$ $(\boldsymbol{n \geq 3})$ *WITH* $\boldsymbol{2 \times 2}$ *BLOCK MATRIX*

TEDDY IRAWAN
NIM: 11754101311

Date of Final Exam : January, 06th 2022
Date of Graduation : January, 06th 2022

Mathematics Program Study
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

Invers has an important role in solving several problems in the matrix and is widely used in mathematics and applied sciences. One simple way to determine the inverse of a matrix is by blocking the matrix into several submatrices. This study aims to determine the inverse of a special form Toeplitz matrix with a 2×2 *block matrix through the application of Schur Complement, there are several steps taken. First, it is given a specially shaped Toeplitz matrix. The specially shaped Toeplitz matrix is blocked into a* 2×2 *block matrix. Next, determine the invertible submatrix of the Toeplitz matrix so that the general form is obtained. Finally, the inverse pattern of the two ways of blocking the Toeplitz matrix is specifically in order of* 3×3 *to* 8×8 *so that the general form of the special form Toeplitz matrix is obtained. The results obtained are the general form of the inverse matrix of the special form Toeplitz matrix* $n \times n, (n \geq 3)$ *with* 2×2 *block matrix.*

Keywords: *Toeplitz,* 2×2 *block, inverses, matrix, schur complements.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis ucapkan kepada Allah subhanahu wata'ala karena atas rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya dengan judul **"Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus $\boldsymbol{n \times n}, (\boldsymbol{n \geq 3})$ dengan Matriks Blok $\boldsymbol{2 \times 2}$"**. Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana. Shalawat beriring salam kepada Nabi Besar Muhammad shallallahu 'alahi wassallam yang mana sehingga kita dapat merasakan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi seperti sekarang ini. Selanjutnya dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu sudah sepantasnya penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta, Ayahanda Nasri dan Ibunda Yusra. Ibunda dan Ayahanda yang tidak pernah lelah dan tiada henti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi yang membuat penulis mampu untuk terus melangkah serta materi yang tidak mungkin mampu terbalas. Semoga Allah subhanahu wata'ala selalu merahmati Ayahanda dan Ibunda, memberikan kebahagiaan dunia dan akhirat, Aamiin. Kemudian penulis juga mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau sekaligus sebagai Pembimbing Akademik.
4. Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc., selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

5. Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat., selaku Pembimbing Tugas Akhir yang telah memberi bimbingan, pengarahan serta ilmunya.
6. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc., selaku penguji yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga selesainya tugas akhir ini.
7. Bapak Zukrianto, M.Si., selaku penguji yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga selesainya tugas akhir ini.
8. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, khususnya di Program Studi Matematika yang telah banyak membantu penulis dalam berbagai hal.
9. Sahabat penulis khususnya Dzakwan Harist Mahendra, Fadhlillah Benedicto, Fadhillah Benedicto, Fajrin R Nugraha, Fajar Ardiansya, Fikri Fauzan Hafizh, Rian Aulia, dan Ricky Wijaya Kusuma yang telah membantu dan memberikan semangat dan motivasi kepada penulis.
10. Teman-teman Program Studi Matematika angkatan 2017 yang telah memberikan semangat kepada penulis.
11. Teman-teman KKN-DR Plus Swakarya, Kecamatan Tampan.
12. Semua pihak yang telah banyak membantu baik secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaian penelitian ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Akhirnya dalam penyusunan dan penulisan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin untuk menghindari kesalahan. Tetapi penulis hanyalah manusia dan manusia adalah tempat salah dan khilaf, sesuai dengan pepatah tak ada gading yang tak retak. Penulis mengharapkan kepada pembaca tugas akhir ini agar memberikan kritik dan saran. Semoga tugas akhir ini dapat memberikan kontribusi yang bermanfaat.

Pekanbaru, 06 Januari 2022

Teddy Irawan

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Invers dikenal sebagai kebalikan dari suatu matriks [1]. Invers memiliki peranan penting dalam menyelesaikan beberapa permasalahan, salah satu kegunaannya untuk menyelesaikan sistem persamaan linier [2]. Terdapat banyak metode yang dapat digunakan dalam menghitung invers matriks, diantaranya blok matriks, perkalian matriks invers elementer, dan menggunakan metode adjoin [2].

Pembahasan mengenai invers suatu matriks blok telah banyak diteliti pada penelitian sebelumnya. Pada tahun 2002, terdapat penelitian yang membahas mengenai invers dengan matriks blok 2×2 [3]. Kemudian pada tahun 2017, terdapat penelitian dengan matriks blok 2×2 yang membahas mengenai determinan dan invers matriks secara umum dengan matriks blok 2×2 [4]. Gambaran umum matriks blok 2×2 adalah sebagai berikut:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{(m-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ \hline a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1)(n-k))} & a_{(m-(k-1)(n-(k-1)))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \quad (1.1)$$

Pada tahun 2019 juga terdapat penelitian dengan matriks blok 2×2 yang membahas mengenai bentuk umum invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLDcirc_r$ [5]. Berdasarkan [5] maka bentuk umum invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLDcirc_r$ dengan bentuk khusus yaitu seperti berikut:

$$P_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ ra & -ra & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ra & -ra & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{dengan } a, r \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Persamaan (1.2) dapat ditulis dengan $P_n = FLDcirc_r\ (0,0,a,0,\dots,0)$. Adapun hasil yang diperoleh dari pembahasan tersebut yaitu seperti berikut:

$$(P_n)^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -(ra)^{-1} & -(ra)^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -(ra)^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dalam mencari invers matriks dimulai dengan memblok matriks menjadi matriks blok 2×2 sehingga didapat submatriks $A, B, C,$ dan D. Untuk menyederhanakan matriks dalam mencari invers dapat menggunakan sifat-sifat blok matriks selanjutnya dengan menerapkan komplemen *schur* pada submatriks $A, B, C,$ dan D maka invers matriks dapat ditentukan dengan matriks blok 2×2.

Selain dari beberapa matriks yang telah disebutkan di atas, Ada beberapa jenis matriks yang sering dibahas dalam ruang lingkup aljabar salah satunya adalah matriks Toeplitz. Pada tahun 2019, terdapat penelitian yang membahas tentang matriks Toeplitz. Penelitian tersebut membahas mengenai matriks Toeplitz simetris yang menjelaskan bahwa matriks Toeplitz simetris merupakan matriks Toeplitz yang setiap entri diagonalnya sama [6]. Adapun bentuk matriks dari penelitian tersebut sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in \mathbb{R} \qquad (1.3)$$

Pada tahun yang sama juga terdapat penelitian yang membahas tentang matriks Toeplitz yaitu mendapatkan bentuk umum invers matriks Toeplitz bentuk khusus menggunakan metode adjoin [2]. Adapun bentuk khusus matriks Toeplitz tersebut seperti berikut:

$$|A_3| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{ dengan } \alpha \neq 0 \in \mathbb{R} \qquad (1.4)$$

Dari penjelasan latar belakang dan penelitian-penelitian terkait di atas, maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian yang membahas mengenai matriks Toeplitz bentuk khusus yaitu menentukan inversnya dengan judul “Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus $n \times n$, $(n \geq 3)$ dengan Matriks Blok 2×2” dengan bentuk khusus sebagai berikut:

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & a & a & \cdots & a & a & a & a \\ a & 0 & a & \cdots & a & a & a & a \\ a & a & 0 & \cdots & a & a & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 0 & a & a & a \\ a & a & a & \cdots & a & 0 & a & a \\ a & a & a & \cdots & a & a & 0 & a \\ a & a & a & \cdots & a & a & a & 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } a \in \mathbb{R} \qquad (1.5)$$

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan penjelasan dari latar belakang tersebut, maka perumusan masalah dalam penulisan ini yaitu menentukan bentuk umum invers dari matriks Toeplitz bentuk khusus dari Persamaan (1.5) dengan matriks blok 2×2.

1.3 Batasan Masalah

Pembatasan permasalahan pada penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Matriks yang dibahas berorde $n \times n, n \geq 3$.
2. Matriks blok diberikan batasan ukuran yaitu matriks blok 2×2.
3. Mengaplikasikan komplemen *schur* pada sub-sub matriks yang *invertible*.
4. Invers matriks dengan matriks blok 2×2 hanya pada Persamaan (1.5).

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian dari tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum invers matriks Toeplitz bentuk khusus dari Persamaan (1.5) dengan matriks blok 2×2.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang didapatkan melalui penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperdalam wawasan penulis terhadap matriks dan mengembangkan pengetahuan disiplin ilmu yang telah dikaji dan bertujuan agar dapat menyelesaikan salah satu persoalan aljabar linear khususnya tentang mengerjakan invers matriks Toeplitz.
2. Sebagai referensi untuk pemecahan masalah yang memiliki keterkaitan dengan persoalan yang dipelajari dalam penelitian ini, yaitu mencari invers matriks Toeplitz.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penelitian tugas akhir ini terdiri dari pokok-pokok permasalahan yang masing-masing akan diuraikan menjadi beberapa bagian, sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini memberi penjelasan terkait latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan hal terkait dengan teori dan definisi tentang matriks, matriks blok 2×2, matriks Toeplitz, metode komplemen *schur* dan invers matriks.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini memiliki uraian terkait langkah-langkah dalam memblok matriks Toeplitz bertujuan untuk menentukan bentuk umum invers submatriks yang *invertible* dan bentuk umum invers matriks Toeplitz dengan matriks blok 2×2.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan tentang bagaimana aturan memblok matriks Toeplitz, menentukan bentuk umum invers submatriks yang *invertible* dan bentuk umum invers matriks Toeplitz dengan matriks blok 2×2.

BAB V PENUTUP

Bab ini memiliki uraian tentang kesimpulan berdasarkan hasil dan pengkajian yang telah dilakukan pada pembahasan dan saran dari penulis.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bagian ini akan dibahas teori pendukung untuk menyelesaikan permasalahan dalam penelitian ini.

2.1 Pengertian dan Jenis-jenis Matriks

Definisi 2.1 [1] Matriks adalah susunan bilangan-bilangan riil atau bilangan kompleks yang membentuk segiempat siku-siku yang disusun menurut baris dan kolom.

Selanjutnya bilangan-bilangan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Entri dalam sebuah matriks A yang berada pada baris ke-i dan kolom ke-j dinotasikan dengan a_{ij}.

Secara umum bentuk matriks dari ukuran $m \times n$ bersama entri-entrinya dapat dinyatakan seperti berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dengan a_{ij} = elemen atau unsur matriks

$i = 1,2,3, \dots, m$

$j = 1,2,3, \dots, n$

Jenis-jenis matriks menurut [1]:

1. Matriks Identitas

   Matriks *identitas* atau matriks satuan bujur sangkar-n ditulis I_n atau hanya I adalah matriks bujur sangkar-n dengan bilangan 1 pada diagonalnya dan 0 pada entri-entri lainnya.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks yang setiap entri atau elemennya adalah bilangan nol.

3. Matriks Diagonal

Matriks bujur sangkar yang yang semua elemen di atas dan di bawah diagonalnya nol atau elemennya berada pada diagonal dinamakan matriks diagonal.

4. Matriks Segitiga

Matriks bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas (*lower triangular*), dengan bentuk umum seperti:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah (*upper triangular*), dengan bentuk umum seperti:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

5. Matriks Transpos

Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$, maka transpos dari A dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A dan seterusnya.

6. Matriks Simetris

Suatu matriks bujur sangkar A adalah simetris jika $A = A^T$. Suatu matriks simetris secara umum dapat ditulis sebagai berikut.

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.2 Matriks Blok

Definisi 2.2 [1] Matriks blok adalah matriks yang diblok menjadi beberapa matriks yang ukurannya lebih kecil dengan memasukkan garis horizontal dan vertikal antara baris dan kolom matriks. Matriks-matriks yang ukurannya kecil hasil blok matriks tersebut disebut submatriks.

Definisi 2.3 [4] Matriks blok 2×2 adalah blok matriks bujur sangkar yang diblok atas dua baris dan dua kolom sub-sub matriks. Gambaran secara umum matriks blok 2×2 adalah sebagai berikut:

Misalkan P merupakan suatu matriks $m \times n$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{(m-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1)(n-k))} & a_{(m-(k-1)(n-(k-1)))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Selanjutnya garis horizontal dan vertikal dimasukkan ke dalam matriks supaya membentuk matriks pada Persamaan (2.1) berikut:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{(m-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ \hline a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1)(n-k))} & a_{(m-(k-1)(n-(k-1)))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

dengan perumpamaan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1)(n-k))} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1)(n-(k-1)))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1: Tentukan cara memblok matriks berikut menjadi matriks blok 2×2.

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks diatas dapat diblok menjadi empat cara, yaitu:

Cara 1:

$$P = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Cara 2:

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Cara 3:

$$P = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Cara 4:

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

2.3 Matriks Toeplitz

Definisi 2.4 [7] Matriks Toeplitz adalah matriks yang memiliki ukuran $n \times n$ dan diberi notasi $T_n = [t_{kj}; k, j = 0,1, \dots, n-1]$, dengan $t_{kj} = t_{k-j}$ sebuah matriks dengan bentuk :

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2:

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Komplemen *Schur*

Definisi 2.5 [8] Komplemen *schur* merupakan salah satu metode atau cara dalam analisis matriks yang banyak menggunakan pertidaksamaan matriks. Dalam teori tentang matriks, komplemen *schur* biasanya digunakan pada matriks bujur sangkar yang berukuran besar dimana matriks tersebut telah diblok.

Diberikan matriks:

$$\underset{(j+k)\times(l+m)}{P} = \begin{pmatrix} \underset{j\times l}{A} & \underset{j\times m}{B} \\ \underset{k\times l}{C} & \underset{k\times m}{D} \end{pmatrix}$$

1. Jika A adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari A adalah $D - CA^{-1}B$.
2. Jika D adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari D adalah $A - BD^{-1}C$.
3. Jika B adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari B adalah $C - DB^{-1}A$.
4. Jika C adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari C adalah $B - AC^{-1}D$.

2.5 Invers Matriks

Definisi 2.6 [1] Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar dan jika B dapat dicari sedemikian sehingga matriks $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers dari A dan dapat ditulis $B = A^{-1}$.

Teorema 2.1 [1] Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar. Jika A memiliki satu baris atau satu kolom bilangan nol, maka $|A| = 0$.

Suatu matriks A mempunyai invers yang ditulis dengan A^{-1} apabila matriks A dapat dibalik (*invertible*) dimana $\det(A) \neq 0$ dan matriks A disebut juga dengan matriks tak singular dan disebut singular apabila A tidak mempunyai invers.

Definisi 2.7 [3] Sebuah matriks tak singular P dan inversnya P^{-1} dapat diblok menjadi blok 2×2 dengan cara memblok matriks tersebut sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ dan } P^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Untuk membuat perkalian P dengan P^{-1} dan P^{-1} dengan P, ukuran semua blok tidak dapat sembarang. Misalkan $A, B, C,$ dan D mempunyai ukuran berturut-turut $j \times l,\ j \times m,\ k \times l,$ dan $k \times m$, dengan $j + k = l + m$. Kemudian E, F, G dan H harus berturut-turut $l \times j,\ l \times k,\ m \times j$, serta $m \times k$. Dengan kata lain, P^{-1} ada di dalam blok transpos dari P.

Di bagian ini, dapat ditulis rumus untuk E, F, G dan H dalam hal $A, B, C,$ dan D. Misalkan suatu blok dari A, B, C serta D adalah matriks bujur sangkar tak singular untuk menghindari invers yang diperumum. Sehingga, mempunyai tiga kemungkinan blok:

1. Blok diagonal bujur sangkar: $j = l$ dan $k = m$.
2. Kuadrat blok diagonal: $j = m$ dan $k = l$.
3. Semua blok bujur sangkar: $j = k = l = m$.

Teorema 2.2 [3] Jika P merupakan matriks bujur sangkar, maka:

i. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ akan memiliki matriks invers jika dan hanya jika A dan D memiliki invers dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.

ii. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ akan memiliki matriks invers jika dan hanya jika B dan C memiliki invers dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.3 [3] Jika P merupakan matriks bujur sangkar, maka:

i. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$ akan memiliki matriks invers jika dan hanya jika A dan D memiliki invers dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$.

ii. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ akan memiliki matriks invers jika dan hanya jika A dan D memiliki invers dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.

Teorema 2.4 [3] Misalkan matriks P merupakan matriks bujur sangkar:

i. Diasumsikan submatriks A pada matriks P dalam Persamaan (1.1) adalah tak singular. Matriks pada Persamaan (1.1) punya invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari A punya invers dan $(D - CA^{-1}B)$ juga memiliki invers didapat

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}.$$

ii. Diasumsikan submatriks D pada matriks P dalam Persamaan (1.1) adalah tak singular. Matriks P pada Persamaan (1.1) punya invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari D punya invers dan $(A - BD^{-1}C)$ juga memiliki invers didapat

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}.$$

iii. Diasumsikan submatriks B pada matriks P dalam Persamaan (1.1) adalah tak singular. Matriks P pada Persamaan (1.1) punya invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari B punya invers dan $(C - DB^{-1}A)$ juga memiliki invers didapat

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}$$

iv. Diasumsikan submatriks C pada matriks P dalam Persamaan (1.1) adalah tak singular. Matriks P pada Persamaan (1.1) punya invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari C memiliki invers dan $(B - AC^{-1}D)$ juga memiliki invers didapat

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1} & C^{-1} + C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & -(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$$

Teorema 2.5 [3] Jika P merupakan matriks bujur sangkar, maka:

i. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$ akan memiliki matriks invers jika dan hanya jika B dan C memiliki invers dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

ii. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ akan memilki matriks invers jika dan hanya jika B dan C memiliki invers dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$.

Contoh 2.3: Tentukan Invers dari matriks pada Contoh 2.1.

Berdasarkan Cara 1 maka dapat dimisalkan

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$, dan $D = [4]$

Blok matriks A menjadi matriks 2×2

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}$$

Misalkan: $K = 1,\ L = 3,\ M = 1,$ dan $N = 4$.

Berdasarkan Teorema 2.3 maka untuk dapat menentukan invers A^{-1} maka dimisalkan dengan $A^{-1} = \begin{bmatrix} E' & F' \\ G' & H' \end{bmatrix}$.

$H' = (N - MK^{-1}L)^{-1} = ([4] - [1][1][3])^{-1} = 1$

$F' = -K^{-1}LH^{-1} = [-1][3][1] = -3$

$G' = -H'MK^{-1} = [-1][1][1] = -1$

$E' = K^{-1} - K^{-1}LG' = [1] - [1][3][-1] = 4$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Selanjutnya dapat ditentukan invers P dengan memisalkan $P^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$.

$H = (D - CA^{-1}B)^{-1} = \left([4] - [1 \quad 3]\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right)^{-1} = 1$

$F = -A^{-1}BH = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}[1] = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$G = -HCA^{-1} = [-1][1 \quad 3]\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [-1][1 \quad 0] = [-1 \quad 0]$

$E = A^{-1} - A^{-1}BG = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}[-1 \quad 0]$

$E = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Untuk menentukan invers dengan cara berikutnya dapat melalukan hal yang sama.

BAB III
METODE PENELITIAN

Langkah-langkah dalam studi literatur yang dimanfaatkan dalam metode penelitian pada penulisan ini adalah seperti berikut:

1. Diberikan matriks Toeplitz T_n yang berorde 3×3 sampai 8×8 dari Persamaan (1.5).
2. Memblok matriks Toeplitz T_n menjadi matriks blok 2×2 yang berorde 3×3 sampai 8×8 dengan memisalkan $A, B, C,$ dan D.
3. Menerapkan komplemen *schur* pada submatriks yang *invertible* dari matriks Toeplitz T_n yang berorde 3×3 sampai 8×8.
4. Menentukan invers matriks Toeplitz T_n yang berorde 3×3 sampai 8×8 dengan matriks blok 2×2 berdasarkan Teorema 2.4.
5. Menduga bentuk umum matriks invers submatriks yang *invertible* dan invers secara umum dari matriks Toeplitz T_n dengan mengamati polanya.
6. Membuktikan bentuk umum invers submatriks yang *invertible* dari matriks Toeplitz T_n dengan menggunakan aturan invers.
7. Membuktikan bentuk umum invers secara umum dari matriks Toeplitz T_n dengan pembuktian $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.
8. Mengaplikasikan bentuk umum invers secara umum dari matriks Toeplitz T_n pada contoh soal.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dan pembahasan pada bab-bab sebelumnya terdapat dua cara memblok matriks Toeplitz bentuk khusus pada Persamaan (1.5) dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Bentuk umum invers submatriks B dan C yang *invertible* dari matriks Toeplitz bentuk khusus pada Persamaan (4.7) adalah sebagai berikut.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \\ -\left(\frac{n-3}{a}\right) & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \text{ dan } C^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$$

2. Bentuk umum invers submatriks B dan C yang *invertible* dari matriks Toeplitz bentuk khusus pada Persamaan (4.8) adalah sebagai berikut.

$$B^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right] \text{ dan } C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\left(\frac{n-3}{a}\right) \\ -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

3. Bentuk umum invers matriks Toeplitz bentuk khusus $n \times n, (n \geq 3)$ dengan matriks blok 2×2 pada Persamaan (1.5) adalah sebagai berikut.

$$T_n^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{n-2}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \cdots & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} \\ \frac{1}{(n-1)a} & -\frac{n-2}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \cdots & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} \\ \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & -\frac{n-2}{(n-1)a} & \cdots & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \cdots & -\frac{n-2}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} \\ \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \cdots & \frac{1}{(n-1)a} & -\frac{n-2}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} \\ \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \cdots & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & -\frac{n-2}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} \\ \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \cdots & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & \frac{1}{(n-1)a} & -\frac{n-2}{(n-1)a} \end{bmatrix}$$

5.2 Saran

Dalam pembahasan yang telah dikemukakan, penulis hanya membahas tentang langkah-langkah dan cara menentukan invers matriks Toeplitz bentuk khusus $n \times n, (n \geq 3)$ dengan matriks blok 2×2. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini dapat melanjutkan pembahasan tentang menentukan determinan dari suatu matriks berbentuk khusus lain dengan matriks blok 2×2 atau matriks blok 3×3 serta penerapannya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] H. Anton dan C. Rorres, *Aljabar Linier Elementer*, Ed. 8, Jakarta: Erlangga, 2004.

[2] C. C. Marzuki dan F. Aryani, Invers Matriks Toepliz Dengan Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol. 5 (1), halaman 58–67, 2019.

[3] T. T. L. dan S. H. Shiou, Inverses of 2 × 2 Block Matrices, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 43 (1–2), halaman 119–129, 2002.

[4] Ilhamsyah, Helmi, dan F. Fran, Determinan dan Invers Matriks Blok 2 x 2, *Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan Terapannya*, Vol. 06 (3), halaman 193–202, 2017.

[5] M. Anggelina, Invers Matriks Blok 2×2 Dalam Aplikasi Matriks FLDcircr Bentuk Khusus, *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*, 2019.

[6] Rahmawati, N. A. Putri, F. Aryani, dan A. N. Rahma, Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, Vol. 5 (2), halaman 61–70, 2019.

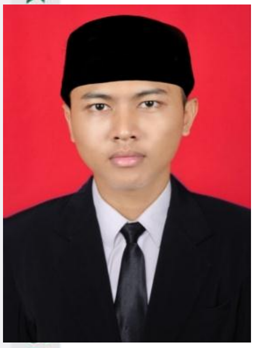
[7] R. M. Gray, *Toeplitz and Circulan Matrices*, Standford 94305, Department of Electrical Engineering Standford, USA, 2005.

[8] M. R. Zaglia, Pseudo-Schur Complements and their Properties, *Applied Numerical Mathematics*, Vol 50 (3-4), halaman 511–519, 2004.

[9] Y. Tian dan Y. Takane, Schur Complements and Banachiewicz-Schur Forms, *The Electronic Journal of Linear Algebra*, Vol 13, halaman 1–14, 2005.

[10] T. L. Markham dan R. L. Smith, A Schur complement inequality for certain P-matrices, *Linear Algebra and its Applications*, Vol 281, halaman 33-41, 1998.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama Teddy Irawan lahir di Pekanbaru pada tanggal 05 Januari 1999. Penulis bertempat tinggal Jalan Garuda Sakti Km.3, Panam, Pekanbaru. Penulis merupakan anak pertama dari lima bersaudara dari Ayahanda yang bernama Nasri dan ibunda Yusra. Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar (SD) pada tahun 2011 di SDN 026 Tampan. Lalu melanjutkan Pendidikan Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMPN 23 Pekanbaru dan lulus pada tahun 2014, untuk jenjang Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMAN 12 Pekanbaru dan lulus pada tahun 2017. Setelah menyelesaikan Pendidikan di SMAN 12 Pekanbaru, kemudian penulis diterima sebagai mahasiswa di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi Program Studi Matematika dengan Program Strata 1 (S1).

Dalam masa perkuliahan penulis telah melaksanakan Kerja Praktek (KP) secara Daring dan penulis juga telah menyelesaikan program pengabdian kepada masyarakat yakni Kuliah Kerja Nyata di Kelurahan Tuah Karya Kecamatan Tampan. Penulis dinyatakan lulus ujian sarjana pada tanggal 06 Januari 2022 dengan judul Tugas Akhir **“Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus $n \times n$, ($n \geq 3$) dengan Matriks Blok 2×2”** dengan dosen pembimbing Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat.