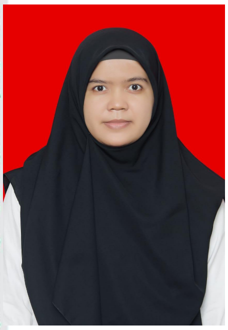
TRACE MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi

oleh :

HARTINA
11554202869



UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2021

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

Oleh :

HARTINA
11554202869

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 07 Juli 2021

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc	Fitri Aryani, M.Sc
NIP. 19811225 200604 2 003	NIP. 19770913 200604 2 002

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

TUGAS AKHIR

Oleh :

HARTINA

11554202869

Telah dipertahankan didepan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 07 juli 2021

Pekanbaru, 07 Juli 2021
Mengesahkan,

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Ari Pani Desvina, M.Sc**
NIP.196403011992031003	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI :

Ketua	**: Sri Basriati, M.Sc**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc**
Anggota I	**: Dr. Yuslenita Muda, M.Sc**
Anggota II	**: Zukrianto, M.Si**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan tugas akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjaman.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu perguruan tinggi dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis dalam naskah ini dan disebutkan didalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 07 Juli 2021

Yang Membuat Pernyataan,

HARTINA
11554202869

LEMBAR PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillah Ya Robb,... Terimakasih atas nikmat yang telah engkau berikan, baik itu kesehatan, materi dan kesempatan-kesempatan terindah yang tak akan pernah terulang dalam hidup ini.

Motivasi Hidupku

'"Dan apabila hamba-hambaku bertanya kepadamu(muhammad) tentang aku, maka sesunggunya aku dekat. aku kabulkan permohonan orang yang berd'oa apabila ia berd'oa kepada-ku. hendaklah mereka itu memenuhi (perintah)-ku dan beriman kepada-ku, agar mereka memperoleh kebenaran"(Qs.al-baqarah: 186)

karya kecil ini ku persembahkan untuk:

Untuk Ayahanda tercinta*, terimakasih karena engkau telah bersusah payah mencari rezeki untuk kami supaya kami bisa melanjutkan studi ke perguruan tinggi agar kami lebih di pandang, berguna, dapat selalu membahagiakan orang lain.*

Untuk Ibunda tercinta*, terimakasih engkau telah banyak memberi dukungan apabila aku telah berputus asa, selalu memperhatikan kondisi kesehatan apabila aku terlihat terlalu sibuk, terimakasih banyak mak, semua perjuanganmu hingga saat ini tak akan pernah terlupakan.*

Untuk kakak-kakakku tersayang serta keluarga besar, *ku persembahkan karya kecilku ini sebagai tanda terimakasih atas do'a, semangat, motivasi dan dukungan yang selalu kalian berikan kepadaku.*

Untuk Bu Fitri Aryani, M.Sc *terima kasih telah meluangkan banyak waktunya dan dengan rendah hati memberikan ilmunya tanpa pamrih untuk membimbing penulis menyelesaikan Tugas Akhir ini.*

Terima kasih kepada semua sahabat at-taysir(Ice, Eti, Nik, Husni, iki, Siti) *semoga allah mudahkan urusan kita semua.*

TRACE MATRIKS SIMETRIS BERBENTUK KHUSUS 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

HARTINA
11554202869

Tanggal Sidang : 07 Juli 2021
Periode Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas mengenai bentuk umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus 4×4 berpangkat bilangan bulat dan *trace* matriks simetris berpangkat bilangan bulat. Untuk mendapatkan bentuk umum dari *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif maka dilakukan perpangkatan matriks A_4^2 sampai A_4^{10}. Selanjutnya diduga bentuk umum perpangkatan matriks $(A_4)^n$, dan dibuktikan menggunakan induksi matematika berlaku juga perpangkatan matriks $(A_4)^{-n}$, kemudian membuktikannya dengan menggunakan aturan invers, diperoleh $tr\ (A_4)^n$ dan $tr\ (A_4)^{-n}$ dengan menggunakan definisi *trace*. Selanjutnya diaplikasikan dengan contoh-contoh soal.

Kata kunci : *matriks, perpangkatan matriks, trace, invers, induksi matematika.*

TRACE OF INTEGER POWER OF REAL 4 × 4 SPECIAL MATRICES

HARTINA
11554202869

Date of Final Exam : July, 7th 2021
Graduation Ceremony Period :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
St. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This final project discusses the general form of integer power of real 4×4 special matrices and a symmetrical trace matrices of integer power. To get the general form of a trace matrix of positive integer powers, it must has an matrix multiplication $A_4^{\,2}$ to $A_4^{\,10}$. Then, the general form of the matrix multiplication $(A_4)^n$ is assumed which is then proved by using mathematical induction. Matrix multiplication $(A_4)^{-n}$ is also valid which is then proven by using the inverse rule so that $tr\ (A_4)^n$ and $tr\ (A_4)^{-n}$ is obtained through the definition of *trace*. This then can be applied to the example questions.

Keywords: *matrix, matrix multiplication, trace, inverse, mathematical induction.*

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Assalamu'alaikum Warohmathullahi Wabarrokhatuh.

Alhamdulillahi Rabbil 'Alamin, bersyukur kepada Allah SWT robbil'alamin, memberikan jalan kemudahan dalam menuntut ilmu sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul "*Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat". Shalawat serta salam tak lupa dihadiahkan untuk junjungan alam yakni Nabi Muhammad SAW dengan mengucapkan *Allahuma Sholli'ala Sayyidina Muhammad Wa'ala Ali Sayyidina Muhammad*, yang mana beliaulah yang membawa umat manusia ke jalan kebenaran.

Rasa terima kasih penulis ucapkan kepada Ayahanda dan Ibunda yang selalu menyebut nama penulis dalam do'anya serta telah banyak memberikan arahan, nasehat. tidak lupa, penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebanyak-banyaknya dari berbagai pihak yang telah mendukung, memotivasi, menasehati serta membimbing:

1. Bapak Prof. Dr. Khairunnas, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc, selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc, selaku Sekretaris Program Studi Matematika dan Pembimbing Tugas Akhir dan selaku Pembimbing Akademik yang telah banyak memberi arahan, dan mengajarkan ilmunya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.

5. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc dan Bapak Zukrianto, M.Si selaku Penguji Tugas Akhir yang telah memberikan masukan dan arahan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.
6. Bapak dan Ibu Dosen di Fakultas Sains dan Teknologi terkhusus Program Studi Matematika yang telah memberi banyak ilmu selama proses perkuliahan.
7. Orang tuaku ayahanda sudirman dan ibunda sulidar yang telah memberikan do’a terbaiknya untuk penulis sehingga penulis bisa menyelesaikan tugas akhir ini karena do’anya, kasih sayangnya, kebaikannya hanya Allah SWT yang dapat membalas semoga Allah masukkannya kedalam surga firdaus, Aamiin yaa robbal’alamin.
8. Untuk Kakak dan abangku yang selalu memberi arahan, motivasi agar menyelesaikan tugas akhir.
9. Seluruh teman-teman seperjuangan Program Studi Matematika angkatan 2015.
10. Para sahabat rumah qur’an at-taysir (eti dayanti, nik fatimah, risky safitri, siti rukayah, husni kautsar) yang telah memberi semangat, motivasi kepada penulis agar menyelesaikan tugas akhir ini.
11. Teman-teman KKN Desa Aur Kuning, Kecamatan Kampar Kiri Hulu, Kabupaten Kampar.
12. Dan semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Akhir kata semoga tugas akhir ini bisa memberi manfaat kepada pembaca, penulis ucapkan terima kasih.

Wassalamu’alaikum Warohmathullahi Wabarrokhatuh.

Pekanbaru, 07 Juli 2021
Penulis

Hartina

DAFTAR ISI

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sebuah matriks apabila ditranspose hasilnya matriks itu sendiri disebut matriks simetris. Matriks simetris merupakan salah satu dari jenis-jenis matriks. Terdapat beberapa macam operasi dari matriks yaitu perkalian matriks, determinan matriks, invers matriks, dan *trace* matriks juga *trace* matriks berpangkat. Pembahasan mengenai *trace* matriks berpangkat telah dibahas oleh [1], penelitian tersebut membahas mengenai *trace* matriks orde 2×2 berpangkat bilangan bulat positif dengan bentuk matriks sebagai berikut :

$A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in \Re$. Adapun hasil yang diperoleh adalah bentuk umum *trace* matriks orde 2×2 berpangkat bilangan bulat positif yaitu :

$$tr(A_2{}^n) = \sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]...[\mathrm{n} - (\mathrm{r} + (r-1))](\det(\mathrm{A}))^{\mathrm{r}} (tr(A))^{n-2r},$$

n ganjil.

$$tr(A_2{}^n) = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]...[\mathrm{n} - (\mathrm{r} + (r-1))](\det(\mathrm{A}))^{\mathrm{r}} (tr(A))^{n-2r},$$

n genap.

Penelitian mengenai *trace* matriks 3×3 berpangkat bilangan bulat telah dibahas oleh [2]. Matriks yang digunakan ialah :

$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} dan \quad B_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}, \forall a,b,c \in \Re$. Adapun hasil yang diperoleh yaitu : $tr(A_3)^n = tr(B_3)^n = (a+b+c)^n$

Selanjutnya [3] telah meneliti mengenai *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif. Matriks yang digunakan ialah :

$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \forall a,b, \in \Re$. Penelitian tersebut mendapatkan bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif yaitu :

$$tr\left(A_2^{-n}\right) = \begin{cases} 0 & , n \text{ ganjil} \\ \dfrac{2}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & , \ n \text{ genap} \end{cases}$$

Penelitian [4] dalam tugas akhirnya membahas bentuk umum dari *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan adalah $A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}, \forall\, a \in \Re$. Adapun hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut yaitu : $tr(A_3)^n = (3a)^n$

Pembahasan mengenai *trace* matriks berpangkat telah dibahas oleh [5]. Pembahasannya mengenai rumus umum *trace* matriks kompleks orde 3×3 berpangkat bilangan bulat dengan bentuk matriks sebagai berikut :

$A_3 = \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix}, \forall\, a, b \in \Re \ dan\ i = imajiner,$ Adapun hasil yang diperoleh pada penelitian tersebut yaitu : $tr(A_3)^n = (3a+bi)^n$

Masih tentang bentuk umum dari *trace* matriks berpangkat bilangan bulat dalam tugas akhirnya telah dibahas oleh [6]. Matriks yang digunakan adalah matriks segitiga atas (A_4) dan matriks segitiga bawah (B_4) dengan bentuk matriks ialah :

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall\, a,b,c,d \in \Re$$

$B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall\, a,b,c,d \in \Re$ Adapun hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut yaitu :

$$tr(A_4^{-n}) = tr(B_4^{-n}) = 4\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Selanjutnya [7] juga telah membahas bentuk umum dari *trace* matriks segitiga yang berordo 5×5. Matriks yang digunakan adalah matriks segitiga atas (A_5) dan matriks segitiga bawah (B_5) sebagai berikut :

$$A_5 = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d,e \in \Re,$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d,e \in \Re.$$

Adapun hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut yaitu :

$$tr(A_5^{-n}) = tr(B_5^{-n}) = 5\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan diatas, penulis tertarik untuk membahas mengenai *trace* matriks simetris berpangkat bilangan bulat, maka penulis mengambil judul proposal tugas akhir ini dengan judul "***Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus 4 × 4 Berpangkat Bilangan Bulat".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka dapat dirumuskan suatu masalah yaitu bagaimana bentuk umum *trace* matriks simetris berbentuk khusus 4×4 dengan pangkat bilangan bulat ?

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini diperlukannya batasan masalah untuk mencegah meluasnya permasalahan yang ada dan agar pembahasan lebih terarah, adapun batasan masalahnya adalah matriks yang digunakan matriks simetris berbentuk khusus yaitu :

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix} \text{dengan } b \in \Re, b \neq 0. \qquad (1.1)$$

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks simetris berbentuk khusus 4×4 pada Persamaan (1.1) berpangkat bilangan bulat.

1.5 Manfaat Penelitian

Beberapa manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menambah wawasan yang lebih luas bagi penulis serta pembaca mengenai materi tentang *trace* matriks, khususnya untuk bentuk umum dari *trace* matriks simetris berbentuk khusus 4×4 berpangkat bilangan bulat.
2. Untuk menambah wawasan bagi penulis dan dijadikan referensi baru pada dunia pendidikan dalam bidang matematika.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada proposal tugas akhir ini dibagi menjadi beberapa bab. Berikut penjelasan masing-masing bab:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan landasan teori yang digunakan matriks simetrik, perkalian matriks, dan *trace* matriks, serta beberapa definisi dan teorema.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan tentang langkah-langkah penulis dalam menentukan bentuk umum *trace* matriks simetris berbentuk khusus 4×4 berpangkat bilangan bulat.

BAB IV PEMBAHASAN

Pada bab ini diuraikan langkah-langkah menentukan *trace* matriks simetris yang berbentuk khusus 4×4 dan berpangkat bilangan bulat.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari seluruh bab dan saran sebagai hasil dari penelitian yang telah dilakukan.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini membahas teori yang mendukung penulis dalam menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya. Teori yang dapat mendukung penyelesaian tugas akhir ini adalah matriks simetris, *trace* matriks, perkalian matriks dan perpangkatan.

2.1 Matriks Simetris

Definisi 2.1 Matriks Simetris [8] Sebuah matriks bujur sangkar A disebut simetrik jika $A = A^t$.

Contoh 2. 1 Diberikan sebuah matriks A yang ordo 4×4 yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ dan hasil transpose matriks adalah } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

maka A disebut matriks simetrik sesuai dengan Definisi 2.1

Teorema 2.1 Sifat-Sifat Matriks Simetris [8] Jika A dan B adalah matriks simetrik dengan ukuran yang sama, dan jika k adalah skalar sebarang, maka:

(a) A^t adalah simetrik.

(b) $A + B$ dan $A - B$ adalah simetrik.

(c) kA adalah simetrik.

Contoh 2.2 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$,

maka tentukan bahwa :

1. A dan B adalah simetrik.
2. $A + B$ dan $A - B$ adalah simetrik.
3. kA dan kB adalah simetrik.

Penyelesaian :

1. Akan dibuktikan bahwa A dan B matriks simetris. Berdasarkan matriks A dan B maka, diperoleh :

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} = A, \text{ dan } B^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = B, \text{ maka } A = A^t \text{ dan } B = B^t$$

.

Sehingga A dan B adalah matriks simetrik.

2. Akan dibuktikan bahwa $A+B$ dan $A-B$ adalah simetrik.

a) Akan ditunjukan bahwa $(A+B) = (A+B)^t$. Berdasarkan matriks A dan B , maka

$$A+B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 9 \\ 1 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 2 & 5 \\ 9 & 6 & 5 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\text{dan } (A+B)^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 9 \\ 1 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 2 & 5 \\ 9 & 6 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa $(A+B) = (A+B)^t$. Sehingga $(A+B)$ adalah matriks simetris.

b) Akan ditunjukan bahwa $(A-B) = (A-B)^t$. Berdasarkan matriks A dan B , maka

$$A-B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

dan $(A-B)^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Oleh karena itu, terbukti bahwa$(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = (\mathrm{A}-\mathrm{B})^{\mathrm{t}}$. Sehingga $(\mathrm{A}-\mathrm{B})$ adalah matriks simetris.

3. Akan dibuktikan kA dan kB adalah simetrik. Berdasarkan matriks A dan B, dan jika k adalah skalar, maka

$$kA = k.\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & 0 & k & 4k \\ 0 & 3k & 2k & 4k \\ k & 2k & k & 3k \\ 4k & 4k & 3k & 5k \end{bmatrix},$$

dan $(kA)^t = \begin{bmatrix} 3k & 0 & k & 4k \\ 0 & 3k & 2k & 4k \\ k & 2k & k & 3k \\ 4k & 4k & 3k & 5k \end{bmatrix}$, sehingga $kA = (kA)^t$. Selanjutnya

$$kB = k.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 4k & 5k \\ k & 3k & 3k & 2k \\ 4k & 3k & k & 2k \\ 5k & 2k & 2k & 4k \end{bmatrix},$$

dan $(kB)^t = \begin{bmatrix} 0 & k & 4k & 5k \\ k & 3k & 3k & 2k \\ 4k & 3k & k & 2k \\ 5k & 2k & 2k & 4k \end{bmatrix}$, sehingga $kB = (kB)^t$.

Berdasarkan hasil tersebut maka dapat diperoleh bahwa kA dan kB adalah matriks simetrik.

2.2 Perkalian Matriks

1. Perkalian Matriks dengan Skalar

Definisi 2.2 Perkalian Matriks Dengan Skalar [8] Jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri A dengan bilangan c. Matriks cA disebut sebagai **kelipatan skalar** (scalar multiple) dari A .

Contoh 2.3 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan hasil dari $2A$!

Penyelesaian :

Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, maka $2A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$.

2. Perkalian Matriks dengan Matriks

Definisi 2.3 Perkalian Matriks Dengan Matriks [8] Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali dari AB adalah matriks $m \times n$ yang mana entrinya didefinisikan sebagai berikut.untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

Contoh 2.4 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan AB !

Penyelesaian :

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 17 & -8 \\ 11 & 23 & 13 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. Perpangkatan Matriks

Definisi 2.4 Perpangkatan Matriks [8], Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka dapat didefinisikan dari pangkat integer taknegatif dari A adalah

$$A^0 = I, A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n \text{ faktor}} \; (n > 0),$$

berikutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat integer negatif dari A adalah :

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n \text{ faktor}}.$$

Contoh 2.5 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tentukanlah A^2!

Penyelesaian :

$$A^2 = A.A$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 & 9 \\ 3 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.3 Determinan Matriks dan Invers Matriks

Definisi 2.5 Determinan Matriks [8] Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan (*determinant function*) dinotasikan dengan det dan kita mendefinisikan det(A) sebagai jumlah dari semua hasil elementer bertanda dari A. Angka det(A) disebut determinan dari A (*determinant of A*).

Banyak metode untuk menentukan determinan suatu matriks, diantaranya metode sarrus, metode reduksi baris, dan metode ekspansi kofaktor. Pada bagian ini akan dibahas mengenai metode ekspansi kofaktor.

Definisi 2.6 Kofaktor [8] Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke- j dihilangkan dari A.Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Teorema 2. 2 Determinan [8] Determinan matriks $A_{n\times n}$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali- hasil kali yang diperoleh; dimana untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, maka

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j), $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-i).

Definisi 2.7 Kofaktor [8] Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A . Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

Contoh 2.6 Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, hitunglah $\det(A)$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama dari A!

Penyelesaian :

$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

Dengan menggunakan Teorema 2. 2 , maka:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-8) + 3(0) + 0(4) = -24.$$

c. **Invers Matriks**

Definisi 2.8 Invers Matriks [8] Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik (*invertible*) dan B disebut sebagai invers (*inverse*) dari A.

Teorema 2.3 Invers [8] Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Contoh 2.7

Misalkan $= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, hitunglah invers dari A !

Penyelesaian :

Berdasarkan Contoh 2.6 telah diperoleh $\det(A) = -24$ dan $kof(A) = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 6 & 0 \\ 12 & -12 & -12 \end{bmatrix}$, kemudian menentukan $adj(A)$ dengan menggunakan Definisi 2.7 yaitu $kof(A)^T = ajd(A)$. Sehingga diperoleh :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{-24}\begin{bmatrix} -8 & -6 & 12 \\ 0 & 6 & -12 \\ 4 & 0 & -12 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2.4 *Trace* Matriks

Definisi 2.9 *Trace* Matriks [8] Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka *trace* dari A dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama . *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujursangkar.

Contoh 2.8 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, hitunglah nilai *trace* dari matriks A !

Penyelesaian:

$$tr(A) = -3 + 6 + 5 + 1 = 9.$$

Selanjutnya diberikan contoh untuk *trace* matriks berpangkat dengan aturan perpangkatan matriks sebagai berikut:

Contoh 2.9 Tentukan $tr(A^2), tr(A^3)$ dan $tr(A^4)$ dari matriks A berikut!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 12 & 9 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \\ 6 & 14 & 16 & 17 \\ 4 & 9 & 11 & 11 \end{bmatrix},$$

dan

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 12 & 9 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \\ 6 & 14 & 16 & 17 \\ 4 & 9 & 11 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 58 & 66 & 63 \\ 12 & 27 & 33 & 33 \\ 39 & 88 & 100 & 91 \\ 26 & 59 & 67 & 60 \end{bmatrix},$$

dan

$$A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 25 & 58 & 66 & 63 \\ 12 & 27 & 33 & 33 \\ 39 & 88 & 100 & 91 \\ 26 & 59 & 67 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154 & 349 & 399 & 369 \\ 78 & 177 & 201 & 180 \\ 230 & 521 & 599 & 555 \\ 153 & 347 & 399 & 371 \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh :

$tr(A^2) = 4 + 6 + 16 + 11 = 37,$

$tr(A^3) = 25 + 27 + 100 + 60 = 212,$

$tr(A^4) = 154 + 177 + 599 + 371 = 1301.$

2.5 *Trace* Matriks Berpangkat Bilangan Bulat

Pembahasan mengenai bentuk umum *trace* matriks berpangkat telah dibahas oleh [6], dengan judul "*Trace Matriks Segitiga 4x4 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif*". Pada bagian ini khusus membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks segititiga bawah (B_4). Untuk mendapatkan bentuk umum tersebut, maka diberikan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Diberikan matriks segitiga bawah $B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix} \forall\, a, b, c, d \in R.$

2. Menentukan invers (B_4) dengan metode adjoin.

$$B_4^{-1} = \frac{1}{\det(B_4)}.Ajd(B_4)$$

$$=\frac{1}{a^4}\begin{bmatrix} a^3 & 0 & 0 & 0 \\ -a^2b & a^3 & 0 & 0 \\ ab^2-a^2c & -a^2b & a^3 & 0 \\ -b^3-a^2d+2abc & ab^2-a^2c & -a^2b & a_3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{a^3}{a^4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-a^2b}{a^4} & \frac{a^3}{a^4} & 0 & 0 \\ \frac{ab^2-a^2c}{a^4} & \frac{-a^2b}{a^4} & \frac{a^3}{a^4} & 0 \\ \frac{-b^3-a^2d+2abc}{a^4} & \frac{ab^2-a^2c}{a^4} & \frac{-a^2b}{a^4} & \frac{a^3}{a^4} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-b}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{b^2-ac}{a^3} & \frac{-b}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-b^3-a^2d+2abc}{a^4} & \frac{b^2-ac}{a^3} & \frac{-b}{a^2} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan B_4^{-10} sampai B_4^{-11}.

$$B_4^{-10}=B_4^{-9}.B_4^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{a^{10}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-10b}{a^{11}} & \frac{1}{a^{10}} & 0 & 0 \\ \frac{55b^2-10ac}{a^{12}} & \frac{-10b}{a^{11}} & \frac{1}{a^{10}} & 0 \\ \frac{-220b^3-10a^2d+110abc}{a^{13}} & \frac{55b^2-10ac}{a^{12}} & \frac{-10b}{a^{11}} & \frac{1}{a^{10}} \end{bmatrix}$$

$$B_4^{-11} = B_4^{-10}.B_4^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a^{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-11b}{a^{12}} & \frac{1}{a^{11}} & 0 & 0 \\ \frac{66b^2 - 11ac}{a^{13}} & \frac{-11b}{a^{11}} & \frac{1}{a^{11}} & 0 \\ \frac{-286b^3 - 11a^2 d + 132abc}{a^{14}} & \frac{66b^2 - 11ac}{a^{13}} & \frac{-11b}{a^{12}} & \frac{1}{a^{11}} \end{bmatrix}$$

Berikut adalah pendugaan bentuk umum untuk B_4^{-n} yaitu :

$$B^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 \\ \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 \\ \frac{-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3 - na^2 d + n(n+1)abc}{a^{14}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

3. Membuktikan bentuk umum matriks $B_4{}^{-n}$, yang diberikan pada teorema berikut :

Teorema 2.4 : Diberikan matriks segitiga atas 4×4 dengan bentuk sebagai berikut :

$$B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix} \forall\ a, b, c, d \in R, \text{ Maka}$$

$$B^{-n} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a^n} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{-nb}{a^{n+1}} & \dfrac{1}{a^n} & 0 & 0 \\ \dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \dfrac{-nb}{a^{n+1}} & \dfrac{1}{a^n} & 0 \\ \dfrac{-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3 - na^2d + n(n+1)abc}{a^{14}} & \dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \dfrac{-nb}{a^{n+1}} & \dfrac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

Bukti : Pembuktian teorema (2.4) telah dibuktikan pada laporan tugas akhir [6] pada halaman IV-21.

4. Membuktikan bentuk umum $tr(B_4^n)$ menggunakan pembuktian langsung.

Teorema 2.5 : Diberikan matriks segitiga atas 4×4 dengan bentuk sebagai berikut:

$$B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix} \forall\, a,b,c,d \in R, \text{ Maka}$$

$$tr(B_4^n) = 4\left(\frac{1}{a^n}\right), \forall\, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}^-$$

Bukti : Pembuktian teorema (2.5) telah dibuktikan pada laporan tugas akhir [6] pada halaman IV-31.

2.6 Induksi Matematika

Induksi matematika mempunyai prinsip untuk diketahui yaitu: Misalkan $p(n)$ menyatakan suatu pernyataan bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ tersebut benar untuk semua bilangan positif n, maka untuk membuktikan pernyataan ini digunakan aturan sebagai berikut:

1. Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$juga benar untuk $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, dan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**. Langkah induksi berasumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Dan akan dibuktikan untuk $p(n+1)$ juga benar, asumsi tersebut disebut **hipotesis induksi**. Setelah ditunjukkan kedua langkah tersebut benar maka sudah terbuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan n [9].

Contoh 2.10 Buktikan bahwa $1+5+9+...+(4n-3)=n(2n-1),\ \forall n \in N$!

Penyelesaian :

Misalkan $\mathrm{P}(n)$ yang menyatakan bahwa untuk setiap $n \in N$ dengan $\mathrm{P}(n)$: $1+5+9+...+(4n-3)=n(2n-1),\ \forall n \in N$.

I. *Basis induksi*

akan ditunjukkan $\mathrm{P}(1)$ benar.

$\mathrm{P}(1): \ 1 = \ 1\,(2.1-1)$

$1 = 1(1)$

$1 = 1$

Jadi, $\mathrm{P}(1)$ benar.

II. *Langkah induksi*

Asumsikan $\mathrm{P}(n)$ benar, yaitu :

$\mathrm{P}(n)\ \ 1+5+9+...+(4n-3)=n(2n-1), \forall n \in N$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu :

$\mathrm{P}(n+1): 1+5+9+...+(4n-3)=(n+1)(2n+1), \forall n \in N$.

Berikut ini dapat kita buktikan sebagai berikut :

$$1+5+9+...+(4(n+1)-3) = n(2n-1)+(4(n+1)-3)$$
$$= 2n^2 - n + 4n + 4 - 3$$
$$= 2n^2 + 3n + 1$$
$$= (n+1)(2n+1)$$

Jadi, untuk langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa $1+5+9+...+(4n-3) = n(2n-1),\ \forall n \in N.$

BAB III
METODE PENELITIAN

Metode penelitian merupakan langkah-langkah yang digunakan penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks simetris khusus 4×4 berpangkat bilangan bulat. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Diberikan matriks simetris $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix}$ $b \in \Re, b \neq 0$.
2. Menentukan perpangkatan matriks $(A_4)^2$ sampai $(A_4)^{10}$.
3. Menduga bentuk umum perpangkatan matriks $(A_4)^n$ dengan n bilangan bulat positif.
4. Membuktikan bentuk umum matriks simetris $(A_4)^n$ dengan n bilangan bulat positif menggunakan induksi matematika.
5. Menentukan bentuk umum $tr(A_4{}^n)$, n bilangan bulat positif.
6. Membuktikan $tr(A_4{}^n)$, n bilangan bulat positif dengan pembuktian langsung.
7. Menentukan invers dari matriks A_4 menggunakan metode adjoin.
8. Menentukan perpangkatan matriks $(A_4)^{-2}$ sampai $(A_4)^{-10}$.
9. Menduga bentuk umum perpangkatan matriks $(A_4)^n$ dengan n bilangan bulat negatif.
10. Membuktikan bentuk umum $(A_4)^n$, dengan n bilangan bulat negatif menggunakan aturan invers yaitu $A_4{}^{-n}A_4{}^{n} = A_4{}^{n}\, A_4{}^{-n} = \mathrm{I}$.
11. Menentukan bentuk umum $tr(A_4{}^n)$, n bilangan bulat negatif.
12. Membuktikan bentuk umum $tr(A_4)^n$, n bilangan bulat negatif dengan pembuktian langsung.
13. Aplikasi bentuk umum $tr(A^n)$, dengan n bilangan bulat dalam contoh soal.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab IV tentang *trace* matriks simetris berbentuk khusus 4×4 berpangkat bilangan bulat, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Diberikan matriks simetris $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix}$ dengan $b \in \Re,\ b \neq 0$

   Maka diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus 4×4 berpangkat bilangan bulat.

$$A_4^{\,n} = \begin{bmatrix} \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n \end{bmatrix} \quad n \text{ bilangan bulat positif}$$

atau $$A_4^{\,n} = \left[a_{ij}\right] = \begin{cases} \left(\dfrac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n\right)_{ij}, & i = j \\ \left(\dfrac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n\right)_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

dan

$$A_4^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} \end{bmatrix} \quad n \text{ bilangan bulat negatif}$$

atau $$A_4^{-n} = [b_{ij}] = \begin{cases} \left(\left(\frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n}\right)\right)_{ij}, & i = j \\ \left(\left(\frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n}\right)\right)_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

2. Bentuk *trace* matriks simetris pada Persamaan (1.1) berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat adalah :

   $tr(A_4^n) = \left(3^n - (-3)^{n+1}\right)b^n$, untuk bilangan bulat positif

   dan

   $tr(A_4^{-n}) = \left((-1)^n 3^{n+1} + 1\right)3^{-n} b^{-n}$, untuk bilangan bulat negatif

5.2 Saran

Tugas akhir ini, penulis membahas *trace* dari matriks simetris yang berbentuk khusus berukuran 4×4 dengan entri-entrinya bilangan riil. Oleh karena itu, disarankan untuk mengembangkan *trace* dari matriks simetris yang berbentuk umum.

DAFTAR PUSTAKA

[1] J. Pahade and M. Jha, "Trace of positive integer power of real 2× 2 matrices," *Adv. Linear Algebr. Matrix Theory*, vol. 5, no. 04, p. 150, 2015.

[2] F. Aryani, "Trace Matriks 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat," 2018.

[3] F. Aryani and Y. Yulianis, "Trace Matriks Berbentuk Khusus 2 x 2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika.*, vol. 4, no. 2, pp. 105–113, 2018.

[4] A. R. Suci, "Trace Matriks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat positif". Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim.," 2019.

[5] F. Aryani, C. Anam, and C. C. Marzuki, "Trace Matriks Kompleks Berbentuk Khusus 3 X 3 Berpangkat Bilangan Bulat," *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika.*, vol. 6, no. 1, Jan. 2020, doi: 10.24014/jsms.v6i1.10497.

[6] K. Susilowati, "Trace Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat negatif". Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim," 2020.

[7] Haslindah, "Trace Matriks Segitiga 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat negatif". Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim," 2020.

[8] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer: Versi Aplikasi*. Erlangga, 2004.

[9] R. Munir, *Matematika Diskrit Edisi Ketiga*. Bandung:Informatika Bandung, 2005.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 19 febbuari 1996 di pulau luas kemang indah kampar. Anak kelima dari lima bersaudara pasangan bapak sudirman dan ibu sulidar. Penulis menyelesaikan pendidikan formal pada Sekolah Dasar Muhammadiyah 031 Kemang Indah pada tahun 2009. Kemudian penulis menyelesaikan pendidikan lanjutan tingkat pertama di MTS Muhammadiyah Gobah pada tahun 2012 dan menyelesaikan pendidikan sekolah menengah atas dengan Jurusan Ilmu Pengetahuan Sosial (IPS) di MA PP Tahfizul Qur'an Sei Pinang pada tahun 2015. Setelah menyelesaikan jenjang pendidikan SMA pada tahun 2015 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Pada Tahun awal bulan juli tahun 2018 penulis melaksanakan kuliah kerja nyata (KKN) Kabupaten Kampar Kecamatan Kampar Kiri Hulu Desa Aur Kuning. Kemudian pada pertengahan bulan januari tahun 2020 penulis melaksanakan kerja pratek di UPTD Disdukcapil Kec. Payung Sekaki Pekanbaru dengan judul **"Prediksi Jumlah Peserta Pendaftaran Ktp Menggunakan Metode *Fuzzy Time Series Cheng*"** yang dibimbing oleh ibu Rahmadeni, M.Si, pada tanggal 13 januari sampai 13 febbuari 2020 dan diseminarkan pada bulan juni 2020.

Pada tanggal 07 juli 2021 penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul tugas akhir **"*Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat "** di bawah bimbingan ibu Fitri Aryani, M.Sc.