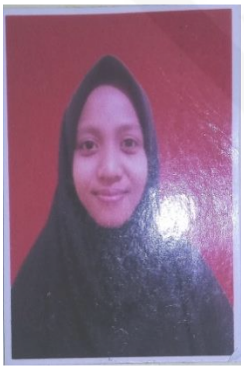
TRACE MATRIKS $FLDcirc_r$ BERBENTUK KHUSUS BERPANGKAT NEGATIF DUA, TIGA DAN EMPAT

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi

oleh:

DESI ANDRIANI
11654203604



UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2021

LEMBAR PERSETUJUAN

***TRACE* MATRIKS *FLDcirc*$_r$ BERBENTUK KHUSUS BERPANGKAT NEGATIF DUA, TIGA DAN EMPAT**

TUGAS AKHIR

Oleh :

DESI ANDRIANI
11654203604

Telah diperiksa dan disetujui sebagai Laporan Tugas Akhir
Di Pekanbaru, pada tanggal 23 Juli 2021

Ketua Program Studi Matematika	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19770913 200604 2 002**

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS *FLDcirc$_r$* BERBENTUK KHUSUS BERPANGKAT NEGATIF DUA, TIGA DAN EMPAT

TUGAS AKHIR

Oleh :

DESI ANDRIANI
11654203604

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Di Pekanbaru, pada tanggal 23 Juli 2021

Pekanbaru, 23 Juli 2021
Mengesahkan,

Dekan,	**Ketua Program Studi,**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI :

Ketua	**: Mohammad Soleh, M.Sc.**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota I	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si.**
Anggota II	**: Rahmawati, M.Sc.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dengan mengikuti kaidah ilmiah serta menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjam Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda meminjam, dan tanggal peminjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 23 Juli 2021
Yang membuat pernyataan,

DESI ANDRIANI
11654203604

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمنِ الرَّحِيْمِ

Sembah sujud serta syukur kepada ALLAH SWT yang telah memberikan kekuatan, kesehatan dan membekaliku dengan ilmu. Atas karunia serta kemudahan yang engkau berikan akhirnya skripsi ini dapat terselesaikan. Shalawat dan salam selalu terlimpahkan kehadiran Rasulullah Muhammad SAW.

Kupersembahkan karya sederhana ini kepada orang yang kusayangi dan kucintai

Ibunda dan Ayahanda Tercinta

Terimakasih yang tiada terhingga kupersembahkan karya kecil ini kepada Ibu Erlinawati dan Ayah Nasri yang telah mendidik, memberikan kasih sayang, dukungan, ridho dan cinta kasih yang tiada terhingga yang tidak mungkin dapat ku balaskan hanya dengan selembar kertas yang bertuliskan kata persembahan. Semoga ini menjadi langkah awal untuk membuat Ibu dan Ayah bahagia.
Terima kasih Ibu... Terima kasih Ayah...

Dosen Pembimbing Tugas Akhir

Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku dosen pembimbing tugas akhir saya, terima kasih banyak Ibu sudah membantu, menasehati, mengajari dan mengarahkan saya sampai tugas akhir ini selesai.

ABSTRAK

TRACE MATRIKS *FLDcirc*$_r$ BERBENTUK KHUSUS BERPANGKAT NEGATIF DUA, TIGA DAN EMPAT

DESI ANDRIANI
11654203604

Tanggal Sidang : 23 Juli 2021
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas KM 15 No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks *FLDcirc*$_r$ berbentuk khusus berpangkat negatif dua, tiga dan empat. Untuk mendapatkan bentuk umum tersebut, terlebih dahulu menentukan perpangkatan matriks *FLDcirc*$_r$ berbentuk khusus berpangkat negatif dua, kemudian dilakukan perpangkatan matriks *FLDcirc*$_r$ berbentuk khusus berpangkat negatif tiga dan empat. Selanjutnya, diperoleh *trace* matriks *FLDcirc*$_r$ berbentuk khusus berpangkat negatif dua, tiga dan empat. Kedua bentuk umum tersebut dibuktikan dengan cara pembuktian langsung. Diberikan juga contoh aplikasi dari *trace* matriks *FLDcirc*$_r$ berbentuk khusus berpangkat negatif dua, tiga dan empat.

Kata Kunci : matriks *FLDcirc*$_r$ berbentuk khusus, pembuktian langsung, *trace* matriks.

ABSTRACT

TRACE FLDcirc$_r$ MATRIX SPECIAL SHAPE THE POWER NEGATIVE TWO, THREE AND FOUR

DESI ANDRIANI
11654203604

Date of Final Exam : 23 July 2021
Date of Graduation ceremony :

Dapartment of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No. 155 Pekanbaru

This final Project aims to get a general form trace FLDcirc$_r$ matrix special form of negative powers two, three and four. To get thegeneral form, first determine the power of the special-shaped FLDcirc$_r$ matrix to the negative power of two, then do the power of the special-shaped FLDcirc$_r$ matrix to the negative of three and four. Furthermore, obtained trace FLDcirc$_r$ matrix special form of negative powers two, three and four. The two general forms are proven by means of direct proof. The application example of the trace FLDcirc$_r$ matrix special form of negative two, three and four.

Keywords : *Special shape FLDcirc$_r$ matrix, direct proof, trace matrix.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Alhamdulillahhirabbil'alamin segala puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah *Subhannahu Wata'ala* yang telah memberikan kemudahan sehingga penulis dapat meyelesaikan Tugas Akhir ini. Berkat rahmat, nikmat kesempatan dan kesehatan sehinga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul "*Trace* Matriks *FLDcirc*$_r$ Berbentuk Khusus Berpangkat Negatif Dua, Tiga dan Empat".

Shalawat serta salam kita hadiahkan kepada junjungan alam Nabi Besar Muhammad *Shalallahu Alaihi Wassalam* karena berkat perjuangan beliaulah kita umat manusia dapat dibawa dari alam kegelapan ditunjukkan kealam yang penuh dengan pengetahuan. Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat yang harus dilakukan untuk memperoleh gelar sarjana sains di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini penulis banyak sekali mendapat bimbingan, bantuan, arahan, nasehat, petunjuk serta semangat dari berbagai pihak baik langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih khususnya kepada kedua orang tua tercinta Ayahanda Nasri Ibunda Erlinawati dan Rian Saputra, S.P, Aditya Al Islami, Sri Ramadani, Mutia Safitri yang senantiasa mendo'akan, melimpahkan kasih sayang, perhatian dan materi yang tak terhingga. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih dengan hati tulus ikhlas yang tak terhingga kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika dan sekaligus pembimbing Tugas Akhir penulis yang selalu ada dan memberikan bimbingan serta arahan sehingga Tugas Akhir ini dapat diselesaikan.
5. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si. dan ibu Rahmawati, M.Sc. selaku penguji yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga Tugas Akhir ini dapat diselesaikan.
6. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
7. Keluarga tercinta yang tidak henti-hentinya memberikan motivasi, dukungan, semangat, do'a, materi serta kasih sayang yang sangat tulus kepada penulis.
8. Sahabat, teman-teman, dan semua pihak yang telah banyak membantu baik secara langsung maupun tidak langsung dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini yang tidak dapat ditulis satu persatu.
9. Teman-teman di Program Studi Matematika, terkhusus Angkatan 16.

Tugas Akhir ini telah disusun semaksimal mungkin oleh penulis. Namun tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahn dan kekurangan daam penulisan maupun penyajian materi. Oleh karena itu, kritik dan saran dari berbagai pihak masih sangat diharapkan oleh penulis demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Pekanbaru, 23 Juli 2021

Desi Andriani

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matriks terdiri dari beberapa jenis diantaranya adalah matriks bujur sangkar, matriks simetris, matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah, matriks *circulant*, matriks $FLDcirc_r$ dan lain-lain. Menurut [1] matriks $C \in M_{n\times n}(R)$ dikatakan matriks *circulant* jika berbentuk sebagai berikut :

$$C=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Menurut [2] matriks $FLDcirc_r$ adalah sebuah tipe baru dari matriks *circulant*. Bentuk umum dari matriks $FLDcirc_r$ adalah sebagai berikut :

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0-ra_{n-1} & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ ra_{n-2} & ra_{n-1}-ra_{n-2} & a_0-ra_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ra_2 & ra_3-ra_2 & ra_4-ra_3 & \cdots & a_0-ra_{n-1} & a_1 \\ ra_1 & ra_2-ra_1 & ra_3-ra_2 & \cdots & ra_{n-1}-ra_{n-2} & a_0-ra_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Persamaan (1.2) dapat ditulis dengan $A=FLDcirc_r(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$.

Penelitian tentang matriks $FLDcirc_r$ juga telah dibahas oleh [3] dengan matriks $A_n=FLDcirc_r(0,x,0,0,\ldots,0)$ berorde $n\geq 2$ sebagai berikut :

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } x, r \in R \tag{1.3}$$

Berdasarkan penelitian tersebut dapat diperoleh bentuk umum invers suatu matriks yaitu $(A_n)^{-1} = FLDcirc_r\left(x^{-1}, 0, 0, 0, \ldots, (rx)^{-1}\right)$ dengan orde $n \times n$ pada Persamaan (1.3) sebagai berikut :

$$(A_n)^{-1} = \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (rx)^{-1} \\ x^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x^{-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Terdapat beberapa operasi pada matriks seperti perkalian matriks, penjumlahan matriks, *trace* matriks, perpangkatan matriks, dan *trace* matriks berpangkat. Pada tugas akhir ini yang dibahas adalah *trace* matriks berpangkat. *Trace* matriks adalah jumlah dari setiap elemen-elemen diagonal utama suatu matriks bujur sangkar, yang dinotasikan dengan $tr(A)$. Sedangkan menurut [4] *trace* matriks berpangkat sering di

gunakan pada beberapa bidang matematika, khususnya analisis jaringan (*network analysis*), teori bilangan, sistem dinamik, teori matriks, dan persamaan differensial.

Penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat telah dibahas oleh [5] yaitu meneliti *trace* dari matriks real berpangkat bilangan bulat negatif. Penelitian tersebut menggunakan matriks real dengan bentuk $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in R$.

Berdasarkan matriks tersebut hasil yang diperoleh dari bentuk umum *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif sebagai berikut :

Untuk n, ganjil :

$$tr(A^{-n})=\frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}$$

$$=\frac{\sum_{r=0}^{n-1/2}\frac{(-1)^r}{r!}n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}$$

untuk n genap, dan

$$tr(A^{-n})=\frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}$$

$$=\frac{\sum_{r=0}^{n/2}\frac{(-1)^r}{r!}n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}$$

Penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat juga dibahas oleh [6] yang mengenai *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif. Dengan bentuk matriks yaitu $A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall a,b \in R$ dengan A mempunyai invers, maka bentuk umum A^{-n} untuk n ganjil dan n genap diperoleh :

$$A^{-n}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}} \\ \frac{1}{a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ ganjil, dan}$$

$$A^{-n}=\begin{bmatrix} \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ genap.}$$

Hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut adalah mendapatkan bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif yaitu :

$$tr(A^{-n}) = \begin{cases} 0 & , n \text{ ganjil} \\ \dfrac{2}{(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}} & , n \text{ genap} \end{cases}$$

Penelitian selanjutnya yang telah dilakukan oleh [7] pada tahun 2020 membahas tentang *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat empat dan negatif satu dari graf roda. Matriks yang digunakan adalah adalah matriks ketetanggaan $n \times n$ dari graf roda sebagai berikut :

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Hasil yang diperoleh pada penelitian tersebut adalah mendapatkan bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat empat dan negatif satu dari graf roda yaitu :

Untuk *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat empat dari graf roda :

$$tr(A_n^4) = 2(n+10)(n-1).$$

Untuk *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat negatif satu dari graf roda :

$$tr(A_n^{-1}) = \frac{-n^2+3n+2}{2(-n+1)}, \text{untuk } n \equiv 2 (\text{mod } 4)$$

$$tr(A_n^{-1}) = \frac{-n-3}{2(n-1)}, \text{untuk } n \equiv 3 (\text{mod } 4).$$

Berdasarkan pemaparan diatas, maka peneliti ingin mengembangkan penelitian yang telah dilakukan oleh pada matriks *FLDcirc*$_{r}$. tepatnya akan ditentukan *trace* matriks *FLDcirc*$_{r}$ berpangkat bilangan bulat negatif. Sehingga judul dari tugas akhir ini penulis tertarik untuk melakukan kajian mengenai

“Trace Matriks *FLDcirc*$_r$ Berbentuk Khusus Berpangkat Negatif Dua, Tiga dan Empat”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang diuraikan oleh penulis, maka rumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah “Bagaimana bentuk umum dari *trace* matriks *FLDcirc*$_r$ berbentuk khusus berpangkat negatif dua, tiga dan empat?”.

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah, maka harus dilakukan batasan masalah agar penelitian ini dapat tercapai dengan baik dan tepat. Batasan masalah yang digunakan pada penelitian Tugas Akhir ini yaitu :

1. Matriks $A_n = FLDcirc_r(0, x, 0, 0, \ldots, 0)$ sesuai Persamaan (1.3) dengan orde $n \geq 2$ sebagai berikut :

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{dengan} \quad x, r \in R.$$

2. Bentuk umum invers matriks $(A_n)^{-1} = FLDcirc_r\left(x^{-1}, 0, 0, 0, \ldots, (rx)^{-1}\right)$ sesuai Persamaan (1.4) yaitu :

$$(A_n)^{-1} = \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (rx)^{-1} \\ x^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan dari rumusan masalah maka tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus berpangkat negatif dua, tiga dan empat pada Persamaan (1.3).

1.5 Manfaat Penelitian

Ada beberapa manfaat dari penelitian yaitu :

1. Menambah ilmu dan wawasan bagi penulis tentang matriks.
2. Dapat dijadikan sebagai referensi untuk pembanding penelitian yang akan datang yang berkaitan dengan matriks $FLDcirc_r$ dengan operasi *trace* suatu matriks.

1.6 Sistematika Penelitian

Adapun sistematika pada saat penulisan penelitian ini yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori yang berkaitan tentang matriks, matriks $FLDcirc_r$, *trace* suatu matriks, *trace* matriks berpangkat negatif dua, tiga dan empat, dan perpangkatan matriks, serta beberapa definisi, teorema, dan contoh.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah dalam menentukan *trace* matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus berpangkat negatif dua, tiga dan empat.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan secara detail untuk mendapatkan *trace* matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus berpangkat negatif dua, tiga dan empat.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisikan kesimpulan secara singkat dari pembahasan dan saran dari penulis.

BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori yang mendukung penulis dalam menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya. Teori yang berkaitan dengan permasalahan penulis diantaranya definisi matriks *FLDcirc*$_r$, perkalian matriks, *trace* matriks, *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif, dan perpangkatan matriks.

2.1 Matriks *FLDcirc*$_r$

Definisi 2.1 Definisi Matriks *FLDcirc*$_r$ [2] Suatu matriks bujur sangkar dikatakan matriks *FLDcirc*$_r$ (*the first and last difference r-circulant matrix*) jika memenuhi :

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0-ra_{n-1} & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ ra_{n-2} & ra_{n-1}-ra_{n-2} & a_0-ra_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ra_2 & ra_3-ra_2 & ra_4-ra_3 & \cdots & a_0-ra_{n-1} & a_1 \\ ra_1 & ra_2-ra_1 & ra_3-ra_2 & \cdots & ra_{n-1}-ra_{n-2} & a_0-ra_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Matriks diatas dapat ditulis dengan $A=FLDcirc_r(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$.

Matriks *FLDcirc*$_r$ juga telah dibahas oleh [3] dengan matriks $A_n=FLDcirc_r(0,x,0,0,\ldots,0)$ berbentuk khusus berorde $n\geq 2$ sebagai berikut :

$$A_n=\begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dengan } x,r\in R.$$

Pembahasan dari bentuk A_n diatas maka dari laporan Tugas Akhir [3] tersebut telah mendapatkan bentuk umum invers dari matriks $FLDcirc(0, x, 0, 0, \ldots, 0)$ yang dinyatakan pada Teorema 2.1 berikut :

Teorema 2.1 Invers Matriks *FLDcirc* Bentuk Khusus Orde $n \times n$ [3] Diberikan A_n suatu matriks *FLDcirc* bentuk khusus berorde $n \geq 2$ dengan $a, r \in R$ maka inver dari matriks A_n adalah :

$$(A_n)^{-1} = \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (rx)^{-1} \\ x^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.1 Diberikan matriks $FLDcirc_r$ berorde 7×7 adalah sebagai berikut :

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks A_7 diatas dapat juga ditulis dengan $A_7 = FLDcirc_2(0, 1/2, 0, 0, 0, 0, 0)$.

2.2 Perkalian Matriks

Definisi 2.2 Perkalian Matriks [8] Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil kali yang diperoleh.

Contoh 2.2 Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ maka AB dan BA sebagai berikut :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pada Contoh (2.2) dapat disimpulkan bahwa hasilkali AB dan BA tidak sama.

2.3 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.3 Perpangkatan Matriks [8] Jika A adalah matriks bujursangkar, maka definisi pangkat bilangan bulat taknegatif dari A adalah :

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n\,faktor} \quad (n > 0).$$

Selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka defenisi pangkat bulat negatif adalah :

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \qquad A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n\,faktor}.$$

Contoh 2.3 Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

maka

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}, \text{dan}$$

$$A^{-3} = \left(A^{-1}\right)^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ 15 & 11 \end{bmatrix}.$$

2.4 *Trace* Matriks

Definisi 2.4 *Trace* Matriks [8] Jika A adalah sebuah matriks persegi, maka *trace* A dinyatakan dengan $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks persegi.

Contoh 2.4 Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

maka $tr(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ dan $tr(B)=-1+5+7+0=11$.

Teorema 2.2 Sifat-Sifat *Trace* [9] Misalkan $A=(a_{ij})$ suatu matriks persegi berukuran $n\times n$, maka *trace* dari A didefinisi sebagai jumlah dari elemen diagonal A dan dinotasikan dengan $tr(A)$, yaitu $tr(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\ldots+a_{nn}$.

Beberapa sifat dari *trace* matriks diantaranya adalah sebagai berikut :

1. $tr(kA)=k\ tr(A)$
2. $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
3. $tr(A^T)=tr(A)$

dengan k adalah sembarang skalar, sedangkan A dan B adalah matriks berukuran $n\times n$.

Bukti :

1. Akan dibuktikan bahwa $tr(kA)=k\ tr(A)$.

Ambil sembarang matriks $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ dan skalar k

$$tr(kA)=\left(k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$=tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$=ka_{11}+ka_{22}+\cdots+ka_{nn}$$

$$= k(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

$$= ktr(A)$$

2. Akan dibuktikan bawa $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

Ambil sembarang matrik $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$

maka

$$tr(A+B) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

$$= tr\left(a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}\right)$$

$$= \left(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}\right) + (b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn})$$

$$= tr(A) + tr(B)\ .$$

3. Akan dibuktikan bahwa $tr(A^t) = tr(A)$.

Ambil sebarang matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, maka

$$
\begin{aligned}
tr(A^t) &= tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^t\right) \\
&= tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) \\
&= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\
&= tr(A).
\end{aligned}
$$

Contoh 2.6 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

maka tentukan:

1. $tr(A)$
2. $tr(10A)$
3. $tr(A+B)$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Teorema 2.1 maka diperoleh

1. $tr(A) = 1 + 0 = 1$
2. $tr(10A) = 10tr(A) = 10(1) = 10$
3. $tr(A+B) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right)$

$$
\begin{aligned}
&= tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan matriks A dan B,

maka

$tr(A) = 1 + 0 = 1,$ dan

$tr(B) = 1 + 2 = 3,$ sehingga

$tr(A) + tr(B) = 4$

$\qquad\qquad = tr(A + B)$

2.5 *Trace* Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Pembahasan mengenai *trace* matriks berpangkat telah dibahas oleh [7] Pada Penelitian tersebut pada halaman IV-1 sampai IV-37 mencari bentuk umum matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat empat dan pada halaman IV-38 mencari *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat empat dan dengan menggunakan matriks ketetanggaan $n \times n$ dari graf roda berikut :

1. Diberikan matriks ketetanggaan $n \times n$ dari graf roda yaitu :

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Mendapatkan bentuk umum matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat empat dari graf roda (A_n^4).

Teorema 2.3 Bentuk umum A_n^4 dari matriks ketetanggan $n \times n$ dari graf roda yaitu :

$$A_n^4=\begin{bmatrix}
n+17 & n+11 & n+15 & n+11 & n+12 & n+11 & \cdots & n+11 & n+12 & n+11 & n+15 & n+11 & 4n+4\\
n+11 & n+17 & n+11 & n+15 & n+11 & n+12 & \cdots & n+11 & n+11 & n+12 & n+11 & n+15 & 4n+4\\
n+15 & n+11 & n+17 & n+11 & n+15 & n+11 & \cdots & n+11 & n+11 & n+11 & n+12 & n+11 & 4n+4\\
n+11 & n+15 & n+11 & n+17 & n+11 & n+15 & \cdots & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & n+12 & 4n+4\\
n+12 & n+11 & n+15 & n+11 & n+17 & n+11 & \cdots & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & 4n+4\\
n+11 & n+12 & n+11 & n+15 & n+11 & n+17 & \cdots & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & 4n+4\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 4n+4\\
n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & n+15 & \cdots & n+17 & n+11 & n+15 & n+11 & n+12 & 4n+4\\
n+12 & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & \cdots & n+11 & n+17 & n+11 & n+15 & n+11 & 4n+4\\
n+11 & n+12 & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & \cdots & n+15 & n+11 & n+17 & n+11 & n+15 & 4n+4\\
n+15 & n+11 & n+12 & n+11 & n+11 & n+11 & \cdots & n+11 & n+15 & n+11 & n+17 & n+11 & 4n+4\\
n+11 & n+15 & n+11 & n+12 & n+11 & n+11 & \cdots & n+12 & n+11 & n+15 & n+11 & n+17 & 4n+4\\
4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & \cdots & 4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & (n+3)(n-1)
\end{bmatrix}$$

Bukti :

Membuktikan bentuk umum A_n^4 dengan menggunakan pembuktian langsung. Maka terlebih dahulu ditentukan A_n^2 sebagai berikut :

$$A_n^2 = A_n A_n$$

$$A_n^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_n^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & n-1 \end{bmatrix}$$

Kemudian ditentukan A_n^4 yang dibuktikan dengan aturan :

$$A_n^4 = A_n^2 A_n^2$$

$$A_n^4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & n-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & n-1 \end{bmatrix}$$

$$A_n^4=\begin{bmatrix}
n+17 & n+11 & n+15 & n+11 & n+12 & n+11 & \cdots & n+11 & n+12 & n+11 & n+15 & n+11 & 4n+4\\
n+11 & n+17 & n+11 & n+15 & n+11 & n+12 & \cdots & n+11 & n+11 & n+12 & n+11 & n+15 & 4n+4\\
n+15 & n+11 & n+17 & n+11 & n+15 & n+11 & \cdots & n+11 & n+11 & n+11 & n+12 & n+11 & 4n+4\\
n+11 & n+15 & n+11 & n+17 & n+11 & n+15 & \cdots & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & n+12 & 4n+4\\
n+12 & n+11 & n+15 & n+11 & n+17 & n+11 & \cdots & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & 4n+4\\
n+11 & n+12 & n+11 & n+15 & n+11 & n+17 & \cdots & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & 4n+4\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 4n+4\\
n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & n+15 & \cdots & n+17 & n+11 & n+15 & n+11 & n+12 & 4n+4\\
n+12 & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & \cdots & n+11 & n+17 & n+11 & n+15 & n+11 & 4n+4\\
n+11 & n+12 & n+11 & n+11 & n+11 & n+11 & \cdots & n+15 & n+11 & n+17 & n+11 & n+15 & 4n+4\\
n+15 & n+11 & n+12 & n+11 & n+11 & n+11 & \cdots & n+11 & n+15 & n+11 & n+17 & n+11 & 4n+4\\
n+11 & n+15 & n+11 & n+12 & n+11 & n+11 & \cdots & n+12 & n+11 & n+15 & n+11 & n+17 & 4n+4\\
4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & \cdots & 4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & 4n+4 & (n+3)(n-1)
\end{bmatrix}$$

Penjabaran pembuktian Teorema (2.3) terdapat pada laporan Tugas Akhir [7] terdapat pada halaman IV-7.

3. Membuktikan bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat empat dari graf roda.

Setelah diperoleh bentuk umum matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat empat dari graf roda dan bentuk umum matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat negatif satu dari graf roda, selanjutnya akan dibuktikan bentuk umum untuk *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat empat dari graf roda dan bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat negatif satu dari graf roda.

Berdasarkan Teorema 2.3 maka dapat ditentukan bentuk umum untuk *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat empat dari graf roda yang disajikan pada Teorema 2.4 sebagai berikut :

Teorema 2.4 Diberikan matriks ketetanggaan $n \times n$ berpangkat graf roda

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka :

$$tr(A_n^4) = 2(n+10)(n-1)$$

Bukti. Pembuktian Teorema (2.4) telah dibuktikan pada laporan Tugas Akhir [7] pada halaman IV-50.

BAB III

METODE PENELITIAN

Metodologi penelitian merupakan proses yang dilakukan penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Dengan kajian yang diperoleh dari beberapa referensi. Langkah-langkah yang akan dilakukan penulis untuk menentukan bentuk umum *trace* matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif yaitu :

1. Diberikan matriks $A_n = FLDcirc_r(0, x, 0, 0, \ldots, 0)$ sebagai berikut :

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n \geq 2, \text{dengan } x, r \in R.$$

2. Menentukan perpangkatan matriks dari $(A_n)^{-2}$ dengan cara $(A_n)^{-1}(A_n)^{-1}$
3. Menentukan perpangkatan matriks dari $(A_n)^{-3}$ dengan cara $(A_n)^{-2}(A_n)^{-1}$.
4. Menentukan perpangkatan matriks dari $(A_n)^{-4}$ dengan cara $(A_n)^{-3}(A_n)^{-1}$.
5. Menentukan $tr(A_n)^{-2}$, $tr(A_n)^{-3}$, $tr(A_n)^{-4}$ dengan pembuktian langsung.
6. Mengaplikasikan $tr(A_n)^{-2}$, $tr(A_n)^{-3}$, $tr(A_n)^{-4}$, dengan contoh soal.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan pada bab IV tentang *trace* matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus berpangkat negatif dua, tiga dan empat, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Diberikan matriks $FLDcirc_r\left(0,x,0,0,\ldots,0\right)$:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, n \geq 2 \quad \text{dengan } x, r \in R.$$

matriks diatas dapat ditulis dengan $A_n = FLDcirc_r\left(0,x,0,0,\ldots,0\right)$, maka

a. Perpangkatan matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus berpangkat negatif dua

$$\left(A_n\right)^{-2} = \begin{bmatrix} x^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r^{-1}x^{-2} & r^{-1}x^{-2} \\ x^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & r^{-1}x^{-2} \\ x^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x^{-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, n \geq 2.$$

atau dapat ditulis :

$$(A_n)^{-2} = [a_{ij}] = \begin{cases} x^{-2}, & i = j = 1 \\ & i = j+1, \quad j = 1 \\ & i = j+2, \quad j = 1,2,\dots,n-2 \\ r^{-1}x^{-2} & i = 1, \quad j = n-1 \quad dan \quad n \\ & 1 = 2, \quad j = 1 \\ 0, & selainnya. \end{cases}$$

b. Perpangkatan matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus berpangkat negatif tiga

$$(A_n)^{-3} = \begin{bmatrix} x^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & r^{-1}x^{-3} & r^{-1}x^{-3} & r^{-1}x^{-3} \\ x^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r^{-1}x^{-3} & r^{-1}x^{-3} \\ x^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & r^{-1}x^{-3} \\ x^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-3} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x^{-3} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{-3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$(A_n)^{-3} = [b_{ij}] = \begin{cases} x^{-3}, & i = j = 1 \\ & i = j+1, \quad j = 1 \\ & i = j+2, \quad j = 1 \\ & i = j+3, \quad j = 1,2,\dots,n-3 \\ r^{-1}x^{-3} & i = 1,2,3 \quad j = i+n-3 \\ & i = 1,2 \quad j = i+n-2 \\ & i = 1 \quad j = i+n-1 \\ 0 & selainnya \end{cases}$$

c. Perpangkatan matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus berpangkat negatif empat

$$(A_n)^{-4} = \begin{bmatrix} x^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r^{-1}x^{-4} & r^{-1}x^{-4} & r^{-1}x^{-4} & r^{-1}x^{-4} \\ x^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & r^{-1}x^{-4} & r^{-1}x^{-4} & r^{-1}x^{-4} \\ x^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r^{-1}x^{-4} & r^{-1}x^{-4} \\ x^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & r^{-1}x^{-4} \\ x^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & x^{-4} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-4} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-4} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$(A_n)^{-4} = [c_{ij}] = \begin{cases} x^{-4}, & i = j = 1 \\ & i = j+1 \qquad j = 1 \\ & i = j+2 \qquad j = 1 \\ & i = j+3 \qquad j = 1 \\ & i = j+3 \qquad j = 1,2,,\ldots,n-3 \\ r^{-1}x^{-4} & i = 1,2,3,4 \qquad j = i+n-4 \\ & i = 1,2,3 \qquad j = i+n-3 \\ & i = 1,2 \qquad j = i+n-2 \\ & i = 1 \qquad j = i+n-1 \\ 0 & \textit{selainnya} \end{cases}$$

2. *Trace* Matriks $FLDcirc_r(0, x, 0, 0, \ldots, 0)$ Berpangkat Negatif Dua, Tiga dan Empat

a. $tr(A_n)^{-2} = x^{-2}$

b. $tr(A_n)^{-3} = x^{-3}$

c. $tr(A_n)^{-4} = x^{-4}$

5.2 Saran

Dalam pembahasan yang telah dikemukakan, penulis membahas langkah-langkah tentang *trace* matriks $FLDcirc_r(0, x, 0, 0, \ldots, 0)$ berbentuk khusus berpangkat negatif dua, tiga dan empat. Penulis berharap bagi pembaca dapat mengembangkan penelitian ini dengan ukuran matriks yang lebih besar.

DAFTAR PUSTAKA

[1] A. C. F. Bueno, "Right Circulant Matrices with Geometric Progression," *Int. J. Appl. Math. Res.*, vol. 1, no. 4, hal. 593–603, 2012.

[2] X. Pan dan M. Qin, "The Discriminance for FLDcircr Matrices and the Fast Algorithm of Their Inverse and Generalized Inverse," *Shanghai*, 2015.

[3] Rysfan, "Menentukan invers Matriks FLDcircr Dengan Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin," *Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim Riau*, 2018.

[4] Fika, Paraskevi, Marilena, Mitrouli, dan Paraskevi Roupa, "Estimates for the bilinear form xta−1y with applications to linear algebra problems," vol. 43, hal. 70–89, 2014.

[5] F. Aryani dan M. Solihin, "Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 3, no. 2, hal. 16–23, 2017.

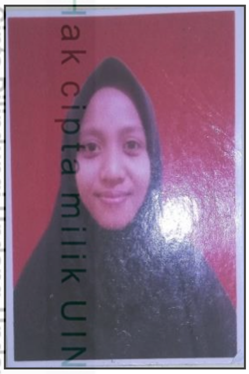
[6] F. Aryani dan Yulianis "Trace Matriks Berbentuk Khusus 2x2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 4, no. 2, 2018.

[7] S. Lilik Purwati, "Trace Matriks Ketetanggaan nxn Berpangkat Empat dan Negatif Satu dari Graf Roda," *Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim Riau*, 2020.

[8] Anton dan Rorres, "Elementary Linear Algebra," in *American College of Radiology Network*, 2004.

[9] Gentle, "Matrix Algebra," *Springer, New York.*, 2007.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis lahir pada tanggal 11 Desember 1997 di Menggala Sakti. Sebagai anak pertama dari 4empat bersaudara pasangan Bapak Nasri dan Ibu Erlinawati. Penulis menyelesaikan pendidikan formal pada Madrasah Ibtida'iyah, Kabupaten Rokan Hilir, Provinsi Riau tahun 2010. Pada tahun 2013 penulis menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di SMP Negeri 2 Pujud, Kabupaten Rokan Hilir Propinsi Riau dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas dengan Jursan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) di SMA Negeri 5 Tanah Putih, Kabupaten Rokan Hilir, Provinsi Riau pada tahun 2016. Pada tahun 2016 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Program Studi Matematika.

Pada bulan januari tahun 2020 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Balai Pemasyarakatan Klas II Pekanbaru dengan judul **"Prediksi Keadaan Bimbingan Klien Anak pada Tahun 2020-2023 Menggunakan Metode *Fuzzy Time Series Cheng*"** yang dibimbing oleh ibu Ade Novia Rahma, M.Mat dan diseminarkan pada 13 Mei 2020. Pada bulan Juli – Agustus 2019 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sungai Berbari, Kecamatan Pusako, Kabupaten Siak. Bulan Juli Tahun 2021 penulis telah menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"Trace Matriks *FLDcirc*$_r$ Berbentuk Khusus Berpangkat Negatif Dua, Tiga dan Empat"** dibawah bimbingan ibu Fitri Aryani, M.Sc. di Fakultas Sains dan Teknologi Program Studi Matematika.