PENYELESAIAN PERSAMAAN RICCATI DENGAN MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

oleh :

L U K M A N
10454025653

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2011

PENYELESAIAN PERSAMAAN RICCATI DENGAN MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

LUKMAN
NIM : 10454025653

Tanggal Sidang : Juni 2011
Periode Wisuda : Juli 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Persamaan Riccati merupakan persamaan diferensial biasa nonlinier orde satu yang sulit ditentukan penyelesaiannya secara analitik. Sehingga diperlukan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Tugas akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinier orde satu Riccati dengan bentuk umum $\frac{dy}{dx} = Q(x)y + R(x)y^2 + P(x)$ dengan masalah nilai awal $y(0) = \alpha$ serta komponen nonliniernya $Ny = f(y)$ yang merupakan polinomial Adomian A_n menggunakan metode dekomposisi Adomian. Berdasarkan perhitungan terlihat bahwa penyelesaian menggunakan metode dekomoposisi Adomian untuk menyelesaikan persamaaan Riccati lebih efektif dan akurat dalam menghampiri nilai eksak untuk titik-titik tertentu.

Kata Kunci: metode dekomposisi adomian, persamaan diferensial biasa nonlinier, persamaan Riccati, polinomial adomian.

DAFTAR ISI

	Halaman
LEMBAR PERSETUJUAN	ii
LEMBAR PENGESAHAAN	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL	iv
LEMBAR PERNYATAAN	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR LAMBANG	xv
DAFTAR SINGKATAN	xvi
DAFTAR LAMPIRAN	xvii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	I-1
1.2 Rumusan Masalah	I-2
1.3 Batasan Masalah	I-2
1.4 Tujuan Penilitian	I-2
1.5 Sistematika Penulisan	I-2
BAB II LANDASAN TEORI	
2.1 Persamaan Diferensial	II-1
2.2 Persamaan Diferensial Biasa	II-1
2.3 Klasifikasi Persamaan Diferensial Biasa	II-2
2.4 Persamaan Diferensial Orde Satu	II-3
2.5 Metode Dekomposisi Adomian	II-6

BAB III METODOLOGI III-1
BAB IV PEMBAHASAN
4.1 Persamaan Riccati IV-1
BAB V PENUTUP
5.1 Kesimpulan V-1
5.2 Saran V-2
DAFTAR PUSTAKA
LAMPIRAN
DAFTAR RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

4.1 Penyelesaian Persamaan Riccati $y' = -y^2 + 1$ dengan Nilai Awal $y(0) = 0$ di $0 \leq x \leq 1$ untuk suku empat $\left(y_4(x)\right)$.......... IV-6

4.2 Penyelesaian Persamaan Riccati $\frac{dy}{dx} = x^3 y^2(x) - 2x^4 y(x) + x^5 + 1$ Dengan Nilai Awal $y(0) = 0$ di $0 \leq x \leq 1$ untuk Jumlah Suku Dua $\left(y_2(x)\right)$.. IV-10

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang diketahui. Persamaan diferensial disebut juga dengan *aequatio differntialitis* yang diperkenalkan oleh Leibniz pada Tahun 1676.

Persamaan diferensial seringkali muncul dalam model matematika yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Banyak hukum-hukum alam dan hipotesa-hipotesa yang dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung turunan yang melalui bahasa matematika. Sebagai contoh turunan–turunan dalam fisika muncul sebagai percepatan dan kecepatan, dalam geometri sebagai kemiringan (gradien), dalam biologi sebagai kecepatan perubahan gaya hidup, dan dalam keuangan sebagai kecepatan pertambahan investasi.

Persamaan diferensial dibagi menjadi dua kelompok besar berdasarkan turunan fungsi terhadap variabel bebas, yaitu persamaan diferensial parsial dan persamaan diferensial biasa. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang mengandung turunan biasa yaitu turunan dengan satu peubah bebas sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Penyelesaian persamaan diferensial terkadang dapat diselesaikan secara eksak dan penyelesaiannya dapat dinyatakan dalam bentuk ekspresi fungsi secara eksplisit. Namun, permasalahan yang sering terjadi adalah terkadang teknik-teknik analitik tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, khususnya persamaan diferensial nonlinier.

Persamaan diferensial biasa nonlinier sangat sulit untuk ditentukan penyelesaian eksaknya. Oleh karena itu, penyelesaian semi analitik diusulkan para ahli untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa nonlinier tersebut. Adapun beberapa metode yang dapat digunakan, seperti metode dekomposisi adomian, metode homotopi pertubasi dan metode iterasi variasi. Salah satu contoh persamaan diferensial biasa nonlinier adalah persamaan Riccati. Batiha, *et. al.* (2007) telah menyelesaikan persamaan Riccati dengan menggunakan metode iterasi variasi.

Selanjutnya, Rao (2010) menyelesaikan persamaan Riccati menggunakan metode dekomposisi Adomian. Hal inilah yang membuat penulis tertarik mengkaji kembali mencari peyelesaian persamaan Riccati. Sehingga tugas akhir ini penulis beri judul **"Penyelesaian Persamaan Riccati dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian".**

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah, "bagaimana menentukan penyelesaian persamaan Riccati yang berbentuk $\frac{dy}{dx} = Q(x)y + R(x)y^2 + P(x)$ dengan masalah nilai awal $y(0) = \alpha$ dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian".

1.3 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini penulis hanya membatasi pembahasan pada persamaan Riccati dengan bentuk umum $\frac{dy}{dx} = Q(x)y + R(x)y^2 + P(x)$ dan variabel bebas *x*.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan penyelesaian persamaan Riccati yang berbentuk $\frac{dy}{dx} = Q(x)y + R(x)y^2 + P(x)$ dengan masalah nilai awal $y(0) = \alpha$ dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab, yaitu sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang digunakan, seperti: persamaan diferensial, persamaan diferensial biasa, klasifikasi persamaan diferensial biasa, dan metode dekomposisi Adomian

Bab III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan tentang studi literatur yang digunakan penulis serta langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan dari penelitian ini.

Bab IV Pembahasan

Bab ini berisikan tentang metode dekomposisi Adomian yang digunakan untuk membahas penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinier orde satu, yaitu persamaan Riccati dengan bentuk umum $\frac{dy}{dx} = Q(x)y + R(x)y^2 + P(x)$ dan masalah nilai awal $y(0) = \alpha$.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran-saran untuk pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

Adapun landasan teori yang digunakan penulis dalam pembuatan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat (*dependent variable*) terhadap satu atau lebih variabel bebas (*independent variable*). Secara garis besar persamaan diferensial dibagi dalam dua kelompok yaitu:

(a) Persamaan Diferensial Biasa (*Ordinary Differential Equation*)

Persamaan diferensial biasa merupakan turunan dari suatu fungsi yang melibatkan turunan satu variable terikat dan satu variabel bebas.

(b) Persamaan Diferensial Parsial (*Partial diferential Equation*)

Persamaan diferensial parsial adalah turunan suatu fungsi yang melibatkan satu atau lebih variabel terikat dan satu atau lebih variabel bebas.

2.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*) adalah suatu persamaan yang turunan fungsinya hanya bergantung pada satu variabel terikat (*dependent variable*). Contohnya adalah persamaan pertumbuhan dengan bentuk persamaannya yaitu:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = kQ(t) \tag{2.1}$$

dengan $Q(t)$ menunjukkan jumlah partikel dalam waktu t, dan k adalah konstanta pertumbuhan.

Definisi 2.1 (Wartono, 2009) persamaan diferensial biasa orde-n adalah suatu persamaan yang mempunyai bentuk umum,

$$F(y, y', y'', y^{(3)}, ..., y^n = f(x) \qquad (2.2)$$

dengan tanda aksen menunjukkan turunan terhadap *x*, yaitu $y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, dan seterusnya.

2.3 Klasifikasi Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa dapat diklasifikasikan berdasarkan hal-hal sebagai berikut:

(a) Orde

Definisi 2.2 (Xie, 2010) Orde persamaan diferensial adalah tingkat dari turunan tertinggi yang termuat dalam persamaan diferensial tersebut.

Contoh 2.1

$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = \sin x$, disebut berorde dua

(b) Derajat

Definisi 2.3 (Xie, 2010) Derajat persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi yang dimiliki oleh suatu fungsi pada persamaan diferensial tersebut.

Contoh 2.2

$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$, memiliki derajat dua.

(c) Linier dan nonlinier

Pada persamaan diferensial juga sering muncul bentuk-bentuk linier dan nonlinier.

Definis 2.4 (Xie, 2010) Secara umum persamaan diferensial biasa orde-*n* dapat ditulis dalam bentuk:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx_n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \qquad (2.3)$$

Jika $a_0(x), a_1(x), ...a_n(x)$ pada persamaan (2.3) adalah konstanta maka persamaan diferensial tersebut dikatakan mempunyai koefisien konstanta, sebaliknya, jika berbentuk variabel maka persamaan diferensial tersebut dikatakan persamaan diferensial dengan koefisien variabel.

Akan tetapi, jika persamaan diferensial tidak dapat dituliskan dalam bentuk persamaan (2.3), maka persamaan diferensial itu disebut persamaan diferensial biasa nonlinier.

Contoh 2.3

$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+4y=10\cos 2x$, disebut persamaan linier dengan koefisien konstanta.

$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-y^2)y=0,\quad x>0,\quad y\geq 0$ konstan, disebut persamaan linier dengan koefisien variabel.

(d) Kehomogenan

Definisi 2.5 (Xie, 2010) Persamaan diferensial dikatakan homogen jika $f(x)=0$ sebaliknya jika $f(x)\neq 0$ maka disebut persamaan diferensial nonhomogen.

Contoh 2.4

$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+4y=0$, disebut persamaan homogen

$\frac{dy}{dx}+2xy=x+2$, disebut persamaan nonhomogen

2.4 Persamaan Diferensial Orde Satu

Persamaan diferensial biasa orde satu adalah persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya berorde satu. Secara umum dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{2.4}$$

Dengan *f* adalah fungsi dalam dua variabel yang diberikan. Apabila fungsi *f* dalam persamaan (2.4) bergantung linier pada variabel bebas *y*, maka persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=g(x) \tag{2.5}$$

Dan disebut persamaan diferensial biasa linier orde satu. Selanjutnya pada persamaan (2.5) jika $g(x)=0$, maka persamaan disebut persamaan diferensial biasa orde satu homogen. Sebaliknya, jika $g(x) \neq 0$, maka persamaan disebut persamaan diferensial biasa orde satu nonhomogen.

Selanjutnya, untuk menentukan penyelesaian eksplisit persamaan diferensial biasa orde satu dapat digunakan beberapa metode. Diantara metode-metode yang dapat digunakan adalah sebagai berikut:

1. Persamaan Variabel Terpisah

   Pandang kembali persamaan diferensial linier orde satu berikut:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{2.6}$$

Selanjutnya ubah persamaan (2.6) kedalam bentuk variabel terpisah yaitu:

$$g(y)dy = f(x)dx \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) disebut persamaan terpisah, selanjutnya dengan mengintegralkan kedua ruas untuk persamaan (2.7) akan diperoleh,

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$$

$$G(y) = F(x) + C \tag{2.8}$$

dengan $G(y)$ dan $F(x)$ masing-masing merupakan anti turunan dari $g(y)$ dan $f(x)$.

2. Faktor Integrasi

   Pandang kembali persamaan diferensial biasa orde satu berikut:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \tag{2.9}$$

Agar persamaan (2.9) lebih sederhana dan memudahkan dalam penyelesaian, maka lakukan penggantian $p(x)$ dengan a, sehingga persamaan (2.9) menjadi:

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x) \tag{2.10}$$

Perkalian dengan e^{ax} (faktor integrasi) kedua ruas persamaan (2.10), maka akan diperoleh:

$$e^{ax}(\frac{dy}{dx} + ay) = f(x) \tag{2.11}$$

Oleh karena,

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}y) = ae^{ax}y + e^{ax}\frac{dy}{dx}$$

maka persamaan (2.11) dapat ditulis kembali dalam bentuk:

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}y)=f(x)e^{ax} \qquad (2.12)$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan (2.12) diperoleh:

$$e^{ax}y=\int f(x)e^{ax}dx+C \qquad (2.13)$$

Selanjutnya, penyelesaian $y(x)$ dari persamaan (2.13) diberikan oleh:

$$y(x)=e^{-ax}\int f(x)e^{ax}dx+Ce^{ax} \qquad (2.14)$$

Dengan menggantikan kembali a dengan $p(x)$ untuk persamaan (2.14) dan misalkan $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$, maka persamaan (2.14) dapat ditulis kembali dalam bentuk:

$$y(x)=\frac{\int \mu(x)f(x)dx+c}{\mu(x)} \qquad (2.15)$$

Persamaan (2.15) merupakan persamaan yang dapat digunakan untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial dengan bentuk umum pada persamaan (2.9).

Contoh 2.5

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial dengan masa nilai awal berikut:

$$\frac{dy}{dx}=2y, \quad y(0)=1 \qquad (2.16)$$

Penyelesaian :

Penyelesaian dari persamaan (2.16) dapat dilakukan dengan menggunakan metode variabel terpisah dan faktor integrasi.

a) Menggunakan Variabel Terpisah

Pertama yang dilakukan adalah mengubah persamaan (2.16) dalam bentuk variabel terpisah sehinggga menjadi:

$$\frac{1}{y}dy=2dx, \quad y(0)=1 \qquad (2.17)$$

Selanjutnya dengan mengintegralkan kedua ruas pada persamaan (2.17), maka diperoleh:

$$\ln(y)=2x+c$$

$$y(x)=ce^{2x} \qquad (2.18)$$

Untuk menentukan solusi dengan masalah nilai awal $y(0) = 1$, maka substitusikan $x = 0$ dan $y = 1$ ke dalam persamaan (2.18), maka diperoleh nilai $c = 1$, sehingga solusi dari masalah nilai awal yang dimaksud adalah adalah:

$$y(x)=e^{2x} \tag{2.19}$$

b) Menggunakan Faktor Integrasi

Persamaan (2.16) dapat ditulikan kembali dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx}-2y=0, \quad y(0)=1 \tag{2.20}$$

Berdasarkan persamaan (2.9), maka untuk persamaan (2.20) diperoleh $p(x) = -2$, $f(x) = 0$, dan $\mu(x)=e^{-2x}$. Sehingga diperoleh penyelesaian:

$$y(x)=c\,e^{2x} \tag{2.21}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan $x = 0$ dan $y = 1$ kedalam persamaan (2.21) maka diperoleh nilai $c = 1$, sehingga solusi yang diperoleh:

$$y(x)=e^{2x} \tag{2.22}$$

Dengan demikian, kedua metode mempunyai penyelesaian yang sama yang ditunjukkan oleh persamaan (2.19) dan persamaan (2.22).

2.5 Metode Dekomposisi Adomian

Metode dekomposisi Adomian adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier berdasarkan nilai awalnya dan hasil perhitungannya cukup efektif untuk menghampiri penyelesaian eksak. Secara umum dapat dituliskan:

$$Ly + Ry + Ny = \phi(x)$$

$$Ly = \phi(x) - Ry - Ny$$

$$L^{-1} = L^{-1}\phi(x) - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \tag{2.23}$$

dengan $L = \dfrac{\partial^n}{\partial x^n}$ adalah operator diferensial. Diasumsikan bahwa *invers* operator L^{-1} ada, L^{-1} merupakan integral sebanyak orde pada L terhadap x dari 0 sampai x. misalkan diambil $n = 2$, maka $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ sehingga:

$$L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)dtdt$$

Berdasarkan persamaan (2.23), untuk persamaan diferensial orde dua diperoleh:

$$y = y(0) + y_x(0) + L^{-1}\phi(x) - L^{-1}Ry - L^{-1}Nu \tag{2.24}$$

Diasumsikan bahwa *Ny* adalah deret polynomial Adomian A_n, sehingga dapat ditulis:

$$Ny = \sum_0^{\infty} A_n \tag{2.25}$$

Misalkan $Ny = f(y)$, maka diperoleh bentuk

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, ..., y_n) \tag{2.26}$$

Oleh karena deret polinomial Adomian $A_i (i = 0,1,\ldots,n)$ bergantung pada y_0, y_1, ..., y_n dan merupakan deret konvergen, sehingga:

$$A_0 = (f(y_0)) \tag{2.27}$$

Maka,

$$A_1 = y_1\left(\frac{\partial}{\partial y_0} f(y_0)\right) \tag{2.28}$$

$$A_2 = y_2\left(\frac{\partial}{\partial y_0} f(y_0)\right) + \left(\frac{y_1^{\,2}}{2!}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^{\,2}} f(y_0)\right) \tag{2.29}$$

$$A_3 = y_3\left(\frac{\partial}{\partial y_0} f(y_0)\right) + y_1 y_2\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^{\,2}} f(y_0)\right) + \left(\frac{y_1^{\,3}}{3!}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial y_0^{\,3}} f(y_0)\right) \tag{2.30}$$

$$A_4 = y_4\left(\frac{\partial}{\partial y_0} f(y_0)\right) + \left(\frac{y_2^{\,2}}{2!} + y_1 y_3\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^{\,2}} f(y_0)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^{\,2}} f(y_0)\right) +$$

$$\left(\frac{y_1^{\,2} y_2}{2!}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial y_0^{\,3}} f(y_0)\right) + \left(\frac{y_1^{\,4}}{4!}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial y_0^{\,3}} f(y_0)\right) \tag{2.31}$$

Sehingga *f(y)* dapat disusun kembali dalam bentuk deret sebagai berikut:

$$f(y) = \sum A_n(y_0, y_1, ..., y_n)$$

$$= f(y_0) + y_1\left(\frac{\partial}{\partial y_0} f(y_0)\right) + y_2\left(\frac{\partial^2}{\partial {y_0}^2} f(y_0)\right)\left(\frac{{y_1}^3}{3!}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial {y_0}^3} f(y_0)\right) +$$

$$y_3\left(\frac{\partial}{\partial y_0} f(y_0)\right) + y_1 y_2\left(\frac{\partial^2}{\partial {y_0}^2} f(y_0)\right)\left(\frac{{y_1}^3}{3!}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial {y_0}^3} f(y_0)\right) +$$

$$y_4\left(\frac{\partial}{\partial y_0} f(y_0)\right) + \left(\frac{{y_2}^2}{2!} + y_1 y_3\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {y_0}^2} f(y_0)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial {y_0}^2} f(y_0)\right) +$$

$$\left(\frac{{y_1}^2 y_2}{2!}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial {y_0}^3} f(y_0)\right) + \left(\frac{{y_1}^4}{4!}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial {y_0}^3} f(y_0)\right) + \ldots\ldots$$

$$= f(y_0) + (y_0 + y_1 + \ldots..)\left(\frac{\partial}{\partial y_0} f(y_0)\right) + \left[\left(\frac{{y_1}^2}{2!}\right) + y_1 y_2 + \ldots.\right]$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial {y_0}^2} f(y_0)\right) + \ldots..$$

$$= f(y_0) + \left[\left(\frac{y - y_0}{1!}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_0} f(y_0)\right)\right] + \left[\left(\frac{(y - y_0)^2}{2!}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial {y_0}^2} f(y_0)\right)\right] + \ldots.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(y - y_0)^n}{n!}\right)\left(\frac{\partial^n}{\partial {y_0}^n} f(y_0)\right) \tag{2.32}$$

Definisi 2.6 (Adomian, 1993) Fungsi *y(x)* adalah jumlah komponen-komponen yang dapat didefinisikan sebagai deret dekomposisi yaitu deret $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$ yang ditulis:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) +, \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \tag{2.33}$$

Contoh 2.6

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial orde satu nonlinier berikut:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \tag{2.34}$$

Dengan masalah nilai awal $y(0)=1$ dan penyelesaian eksaknya adalah $y(x)=\frac{1}{1-x}$.

Penyelesaian

Langkah pertama yang harus dilakukan untuk menyelesaikan persamaan (2.34) yaitu menentukan nilai $y_0(x)$ yang ditulis:

$$y_0(x)=y(0)+L_x^{-1}\phi(x)$$

Berdasarkan nilai awal $y(0)=1$, maka diperoleh:

$$y_0(x)=1$$

Selanjutnya untuk memperoleh nilai $y_1(x)$, maka harus dicari terlebih dahulu nilai A_0 menggunakan persamaan (2.27) yaitu:

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Oleh karena,

$$y_1(x)=L_x^{-1}(A_0)$$

maka,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_0^x 1dx \\ &= x \end{aligned}$$

Selanjutnya nilai A_1 diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.28), yaitu:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2y_0y_1 \\ &= 2x \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \int_0^x 2xdx \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Nilai A_2 diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.29), yaitu:

$$\begin{aligned} A_2 &= 2y_0y_2 + y_1^2 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

sehingga,

$$y_3(x) = \int_0^x 3x^2\,dx$$

$$= x^3$$

Nilai A_3 diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.30), yaitu:

$$A_2 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2$$

$$= 4x^3$$

sehingga,

$$y_4(x) = \int_0^x 4x^3\,dx$$

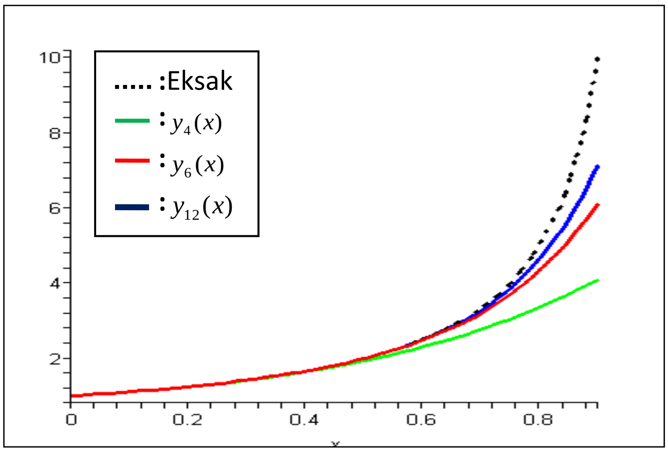
$$= x^4$$

Penyelesaian persamaan diperoleh dengan menjumlahkan suku-suku $y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ y_4(x),\ \ldots$ atau dapat ditulis:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \ldots$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

Gambar 2.1 menunjukkan akurasi penyelesaian persamaan 2.34 untuk beberapa jumlah suku, yaitu:



Gambar 2.1 Hampiran penyelesaian persamaan $y' = y^2$ dengan nilai awal $y(0)=1$ untuk beberapa jumlah suku.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang penulis gunakan dalam tugas akhir ini adalah studi pustaka dengan mempelajari literatur-literatur yang berhubungan dengan pokok permasalahan seperti:

1. Menentukan persamaan diferensial biasa nonlinier orde satu yaitu persamaan Riccati dengan bentuk umum $\frac{dy}{dx} = Q(x)y + R(x)y^2 + P(x)$ dengan masalah nilai awal $y(0) = \alpha$.

2. Mengubah persamaan $\frac{dy}{dx} = Q(x)y + R(x)y^2 + P(x)$ kedalam bentuk dekomposisi Adomian.
3. Mendapatkan nilai $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ yang merupakan deret polinomial Adomian.
4. Mencari nilai-nilai $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ $(n = 0,1, 2, \ldots)$ untuk persamaan Riccati dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian.
5. Menentukan penyelesaian persamaan Riccati menggunakan metode dekomposisi Adomian.
6. Terakhir, menjumlahkan nilai-nilai $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ yang merupakan penyelesain persamaan Riccati.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan pada bab ini adalah tentang penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinier orde satu yaitu persamaan Riccati menggunakan metode dekomposisi Adomian.

4.1. Persamaan Riccati

Persamaan Riccati merupakan persamaan diferensial nonlinier orde satu. Nama ini untuk mengenang ahli matematika dan filsafat dari Itali yaitu Count Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) yang mempunyai bentuk umum:

$$\frac{dy}{dx} = Q(x)y + R(x)y^2 + P(x),\ y(0) = \alpha \tag{4.1}$$

dengan $Q(x)$, $R(x)$, dan $P(x)$ adalah fungsi skalar.

Untuk mencari penyelesaian persamaan (4.1) dapat menggunakan metode dekomposisi Adomian dengan mengindentifikasi bahwa komponen nonliniernya adalah y^2. Sehingga persamaan (4.1) dapat ditulis dalam bentuk dekomposisi Adomian berikut :

$$Ly = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

$$L^{-1}Ly = L^{-1}P(x) + L^{-1}Q(x)y + L^{-1}R(x)y^2$$

$$y(x) = L^{-1}P(x) + L^{-1}\left(Q(x)y\right) + L^{-1}\left(R(x)y^2\right) \tag{4.2}$$

Berdasrkan nilai awal $y(0) = \alpha$ maka persamaan (4.2) dapat ditulis dalam bentuk berikut :

$$y(x) = \alpha + L^{-1}P(x) + L^{-1}\left(Q(x)y\right) + L^{-1}\left(R(x)y^2\right) \tag{4.3}$$

Oleh karena, penyelesaian untuk persamaan (4.3) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $y(x)$ yang merupakan deret $y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots$, ditulis:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \tag{4.4}$$

Maka persamaan (4.3) dapat ditulis kembali dalam bentuk:

$$y(x) = y_0(x) + L^{-1}\big(Q(x)y\big) + L^{-1}\big(R(x)y^2\big) \tag{4.5}$$

dengan

$$y_0(x) = \alpha + L^{-1}P(x)$$

Selanjutnya, pada persamaan (4.5) komponen y pada ruas kanan dapat diekspansi menggunakan deret $y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x), \ldots,$ ditulis:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \tag{4.6}$$

dan untuk komponen nonlinier diekspansi menggunakan deret polinomial Adomian A_i, ditulis:

$$f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \tag{4.7}$$

Sehingga persamaan (4.5) menjadi:

$$y(x) = y_0(x) + L^{-1}\left(Q(x)\sum_{i=0}^{\infty} y_i \right) + L^{-1}\left(R(x)\sum_{i=0}^{\infty} A_i \right) \tag{4.8}$$

dengan

$$y_0(x) = \alpha + L^{-1}P(x) \tag{4.9}$$

dan

$$y_1(x) = L^{-1}\big(Q(x)y_0\big) + L^{-1}\big(R(x)A_0\big)$$

$$y_2(x) = L^{-1}\big(Q(x)y_1\big) + L^{-1}\big(R(x)A_1\big)$$

$$\vdots$$

$$y_{i+1}(x) = L^{-1}\big(Q(x)y_i\big) + L^{-1}\big(R(x)A_i\big) \tag{4.10}$$

Contoh 4.1

Tentukan penyelesaian persamaan Riccati berikut :

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + 1 \tag{4.11}$$

dengan $y(0) = 0$ dan nilai eksak $y(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Penyelesaian :

Berdasarkan persamaan (4.11), maka dapat diketahui bahwa $\alpha = 0,\ P(x) = 1,\ Q(x) = 0,$ dan $R(x) = -1$. Sehingga untuk mencari penyelesaian persamaan (4.11) dapat dilakukan dengan menentukan nilai $y_0(x)$ terlebih dahulu dengan menggunakan persamaan (4.9), yaitu:

$$y_0(x) = \alpha + L^{-1}P(x)$$

$$= 0 + \int_0^x 1\ dx$$

$$= x$$

Untuk memperoleh nilai $y_1(x)$, maka harus dicari nilai A_0 menggunakan persamaan (2.27) dan nilai $y_1(x)$ menggunakan persamaan (4.10), yaitu:

$$A_0 = {y_0}^2$$

$$= x^2$$

maka,

$$y_1(x) = L^{-1}\left(R(x)A_0\right)$$

$$= -\int_0^\infty x^2 dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^3$$

Untuk memperoleh nilai $y_2(x)$, maka harus dicari nilai A_1 menggunakan persamaan (2.28) dan nilai $y_2(x)$ menggunakan persamaan (4.10), yaitu:

$$A_1 = 2y_0 y_1$$

$$= 2x\left(-\frac{1}{3}x^3\right)$$

$$= -\frac{2}{3}x^4$$

maka,

$$y_2(x) = L^{-1}\left(R(x)A_1\right)$$

$$= -\int_0^{\infty}\left(-\frac{2}{3}x^4\right)dx$$

$$= \frac{2}{15}x^5$$

Untuk memperoleh nilai $y_3(x)$, maka harus dicari nilai A_2 menggunakan persamaan (2.29) dan nilai $y_3(x)$ menggunakan persamaan (4.10), yaitu:

$$A_2 = 2y_0 y_2 + y_1^{\ 2}$$

$$= 2(x)\left(\frac{2}{15}x^5\right) + \left(-\frac{1}{3}x^3\right)^2$$

$$= \left(\frac{4}{15}x^6\right) + \left(\frac{1}{9}x^6\right)$$

$$= \frac{17}{45}x^6$$

maka,

$$y_3(x) = L^{-1}\left(R(x)A_2\right)$$

$$= -\int_0^{x}\frac{17}{45}x^6$$

$$= -\frac{17}{315}x^7$$

Untuk memperoleh nilai $y_4(x)$, maka harus dicari nilai A_3 menggunakan persamaan (2.30) dan nilai $y_4(x)$ menggunakan persamaan (4.10), yaitu:

$$A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2$$

$$= 2(x)\left(-\frac{17}{315}x^7\right) + 2\left(-\frac{1}{3}x^3\right)\left(\frac{2}{15}x^5\right)$$

$$= \left(-\frac{34}{315}x^8\right) + \left(-\frac{4}{45}x^8\right)$$

$$= -\frac{62}{315}x^8$$

maka,

$$y_4(x) = L^{-1}\left(R(x)A_2\right)$$

$$= -\int_0^x \left(-\frac{62}{315}\right)x^8$$

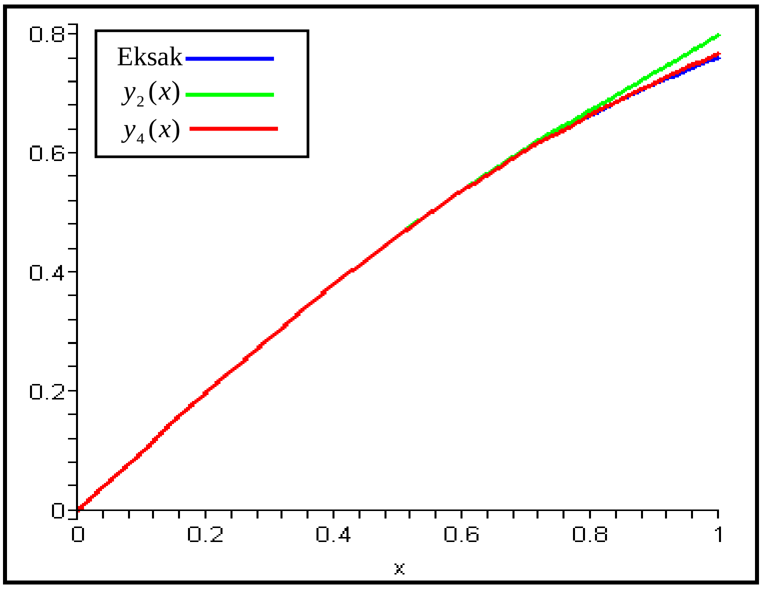
$$= -\frac{62}{2835}x^9$$

Penyelesaian persamaan dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku-suku $y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x), y_3(x),\ y_4(x), \ldots$ atau ditulis:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) + \ldots$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots \qquad (4.12)$$

Persamaan (4.12) merupakan penyelesaian persamaan (4.11) untuk jumlah suku empat. Akurasi penyelesaian dari persamaan (4.11) bergantung kepada banyaknya suku yang dijumlahkan. Gambar 4.1 memperlihatkan akurasi penyelesaian persamaaan (4.11) menggunakan metode dekomposisi Adomian untuk jumlah suku dua $(y_2(x))$ dan jumlah suku empat $(y_4(x))$ di $0 \le x \le 1$.



Gambar 4.1 Hampiran penyelesaian persamaan Riccati $y' = -y^2 + 1$ dengan nilai awal $y(0) = 0$ di $0 \le x \le 1$ untuk beberapa jumlah suku.

Berdasarkan Gambar 4.1 dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh jumlah suku empat $y_4(x)$ lebih mendekati nilai eksak dibandingkan kurva jumlah suku dua $y_2(x)$. Hal ini menjelaskan bahwa suku lebih banyak akan mendekati penyelesaian eksak.

Tabel 4.1 yang memperlihatkan perbandingan penyelesaian persamaan (4.11) menggunakan metode dekomposisi Adomian dengan nilai awal serta jumlah suku empat $y_4(x)$ di $0 \le x \le 1$ dengan nilai eksaknya.

Tabel 4.1 Penyelesaian persamaan Riccati $y' = -y^2 + 1$ dengan nilai awal $y(0) = 0$ di $0 \le x \le 1$ untuk jumlah suku empat $(y_4(x))$.

x	Eksak	ADM	*Error*
0,0	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000
0,1	0,09966799462496	0,09966799462504	8,826273e-014
0,2	0,19737532022490	0,19737532040353	1,786233e-010

0,3	0,29131261245159	0,29131262760000	1,514841e-008
0,4	0,37994896225522	0,37994931136790	3,491127e-007
0,5	0,46211715726001	0,46212108686067	3,929601e-006
0,6	0,53704956699804	0,53707762834286	2,806134e-005
0,7	0,60436777711716	0,60451399496790	1,462179e-004
0,8	0,66403677026785	0,66464130988924	6,045396e-004
0,9	0,71629787019902	0,71839183937142	2,093969e-003
1,0	0,76159415595576	0,76790123456790	6,307079e-003

Contoh 4.2

Tentukan penyelesaian dari persamaan Riccati berikut :

$$\frac{dy}{dx} = x^3 y^2(x) - 2x^4 y(x) + x^5 + 1 \tag{4.13}$$

dengan nilai awal $y(0) = 0$ dan nilai eksak $y(x) = x.y$

Penyelesaian :

Berdasarkan persamaan (4.13), maka dapat diketahui bahwa $\alpha = 0,\ P(x) = x^5 + 1,\ Q(x) = -2x^4,$ dan $R(x) = x^3$. Sehingga untuk mencari penyelesaian persamaan (4.13) dapat dilakukan dengan menentukan nilai $y_0(x)$ terlebih dahulu dengan menggunakan persamaan (4.9), yaitu:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \alpha + L^{-1}P(x) \\ &= 0 + \int_0^x (x^5 + 1)dx \\ &= \frac{1}{6}x^6 + x \end{aligned}$$

Untuk memperoleh nilai $y_1(x)$, maka harus dicari nilai A_0 menggunakan persamaan (2.26) dan nilai $y_1(x)$ menggunakan persamaan (4.10), yaitu:

$$\begin{aligned} A_0 &= {y_0}^2 \\ &= \left(\frac{1}{6}x^6 + x\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{36}x^{12} + \frac{1}{3}x^{7} + x^{2}$$

maka,

$$y_1(x) = L^{-1}\left(Q(x)y_0\right) + L^{-1}\left(R(x)A_0\right)$$

$$= \int_0^\infty \left(-2x^4\right)\left(\frac{1}{6}x^6 + x\right)dx + \int_0^\infty (x^3)\left(\frac{1}{36}x^{12} + \frac{1}{3}x^7 + x^2\right)$$

$$= \frac{1}{576}x^{16} - \frac{1}{6}x^{6}$$

Untuk memperoleh nilai $y_2(x)$, maka harus dicari nilai A_1 menggunakan persamaan (2.27) dan nilai $y_2(x)$ menggunakan persamaan (4.10), yaitu:

$$A_1 = 2\left(\frac{1}{6}x^6 + x\right)\left(\frac{1}{576}x^{16} - \frac{1}{6}x^6\right)$$

$$= \left(\frac{2}{6}x^6 + 2x\right)\left(\frac{1}{576}x^{16} - \frac{1}{6}x^6\right)$$

$$= \frac{1}{1728}x^{22} + \frac{1}{288}x^{17} - \frac{1}{18}x^{12} - \frac{1}{3}x^{7}$$

maka,

$$y_2(x) = L^{-1}\left(Q(x)y_1\right) + L^{-1}\left(R(x)A_1\right)$$

$$= \int_0^\infty \left(-2x^4\right)\left(\frac{1}{576}x^{16} - \frac{1}{6}x^6\right)dx + \int \left(x^3\right)\left(\frac{1}{1728}x^{22} + \frac{1}{288}x^{17} - \frac{1}{18}x^{12} - \frac{1}{3}x^7\right)$$

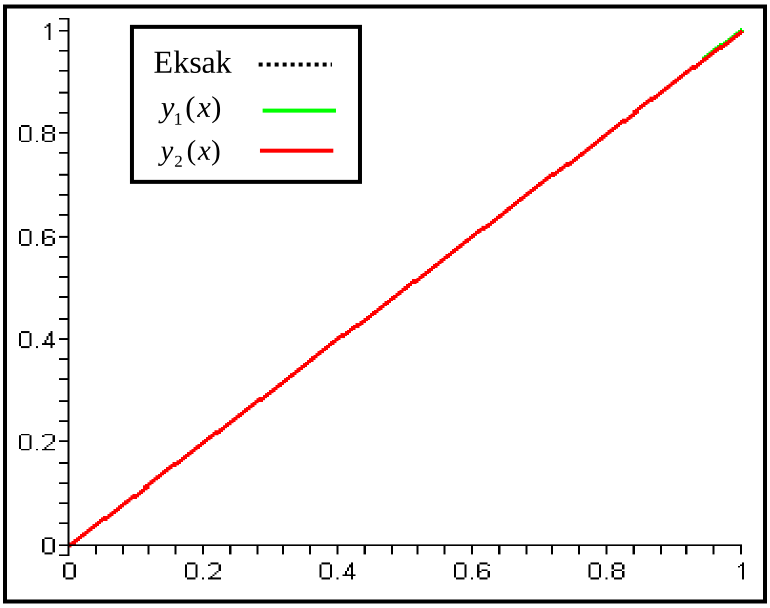
$$= \frac{1}{44928}x^{26} - \frac{1}{288}x^{16}$$

Penyelesaian persamaan dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku-suku $y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x),\ldots$ atau ditulis:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \ldots$$

$$= x - \frac{1}{576}x^{16} + \frac{1}{44928}x^{26} + \ldots \tag{4.14}$$

Persamaan (4.14) merupakan penyelesaian persamaan (4.13) untuk jumlah suku duat. Akurasi penyelesaian dari persamaan (4.13) bergantung kepada banyaknya suku yang dijumlahkan. Gambar 4.2 memperlihatkan akurasi penyelesaian persamaaan (4.11) menggunakan metode dekomposisi Adomian untuk jumlah suku dua $(y_2(x))$ dan jumlah suku empat $(y_4(x))$ di $0 \le x \le 1$.



Gambar 4.2 Hampiran penyelesaian persamaan (4.13) dengan nilai awal $y(0) = 0$ di $0 \le x \le 1$ untuk beberapa jumlah suku.

Berdasarkan Gambar 4.2 dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh jumlah suku satu $(y_1(x))$dan suku dua $(y_2(x))$ telah mendekati nilai eksak untuk titik $0 \le x \le 1$.

Tabel 4.2 menunjukkan perbandingan akurasi penyelesaian dari persamaan (4.13) menggunakan metode dekomposisi Adomian dengan jumlah suku dua $(y_2(x))$.

Tabel4.2 Penyelesaian persamaan Riccati $\frac{dy}{dx} = x^3 y^2(x) - 2x^4 y(x) + x^5 + 1$ dengan nilai awal $y(0) = 0$ di $0 \le x \le 1$ untuk jumlah suku dua $\left(y_2(x)\right)$

x	Eksak	ADM	*Error*
0,0	0,00	0,00000000000000	0,0000000000
0,1	0,10	0,10000000000000	0,0000000000
0,2	0,20	0,19999999999999	1,137979e-014
0,3	0,30	0,29999999999253	7,473411e-012
0,4	0,40	0,39999999925435	7,456530e-010
0,5	0,50	0,59999951026194	2,649062e-008
0,6	0,60	0,59999951026194	4,897381e-007
0,7	0,70	0,69999423248345	5,767517e-006
0,8	0,80	0,79995120008672	4,879991e-005
0,9	0,90	0,89967973320303	3,202668e-004
1,0	1,00	0,99828614672365	1,713853e-003

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari tugas akhir ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

a) Metode dekomposisi Adomian dapat menyelesaikan persamaan diferensial biasa nonlinier Riccat dengan bentuk umum $\frac{dy}{dx} = Q(x)y + R(x)y^2 + P(x)$, dan masalah nilai awal $y(0) = \alpha$ serta komponen nonliniernya $Ny = f(y)$ dengan menggunakan persamaan:

$$y(x) = y_0(x) + L^{-1}\left(Q(x)\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right) + L^{-1}\left(R(x)\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

dengan,

$$y_0(x) = \alpha + L^{-1}P(x)$$

dan,

$$y_{i+1}(x) = L^{-1}(Q(x)y_i) + L^{-1}(R(x)A_i)$$

b) Hasil penyelesaian yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan persamaan Riccati cukup efektif dalam menghampiri nilai eksaknya untuk beberapa titik tertentu, hal ini dapat dilihat pada Gambar 4.1 dan Gambar 4.2.

c) Hasil penyelesaian yang diperoleh untuk menyelesaikan persamaan Riccati dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian untuk beberapa suku yang digunakan semakin mendekati nilai eksak. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2.

d) Semakin banyak jumlah suku-suku $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$ yang digunakan untuk metode dekomposisi Adomian maka hasil yang diperoleh akan cukup akurat dan efektif. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 4.1 dan Gambar 4.2.

5.2. Saran

Tugas Akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinear orde satu Riccati dengan bentuk $\frac{dy}{dx} = Q(x)y + R(x)y^2 + P(x)$ dan masalah nilai awal $y(0) = \alpha$ serta komponen nonliniernya $Ny = f(y)$ dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan tugas akhir ini, penulis sarankan membahas tentang metode lain yang bisa digunakan untuk menyelesaikan persamaan Riccati.

DAFTAR PUSTAKA

Adomian, G. *Solving Frontier Problems of Physics: The Adomian Decomposition Method*. Kluwer Academic. Dordrecht, 1994.

Batiha, B., *et. Al.*" *Application of variational iteration method to a general Riccati equation*". *International Mathematical Forum*, 56(2) : 2759 – 2770, 2007.

Campbell, S. L. *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*. *2th Edition*. Wadswort. Inc., USA. 1990.

Ibijiola, E.A., *et. Al." On Adomian Decomposition Method (ADM) for Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*". *Advance in Natural and Applied Science.* 2(3) : 165 – 169, 2008.

Rao, T.R. Ramesh. "*The use of Adomian Decomposition Method for Solving Generalised Riccati Differential Equations*". *Prceeding of the 6th IMT-GT Confference on Mathematics Statistic and Its Aplications.* 2010.

Wartono, dkk. *Persamaan Diferensial Biasa dan Masalah Nilai Awal*. UIN-SUSKA Press. Pekanbaru. 2009.

Xie, W. C. *Differential Equations for Enginers*. Cambridge University Press. New York. 2010.