KENDALI OPTIMAL PERMAINAN NON-KOOPERATIF KONTINU SKALAR DUA PEMAIN DENGAN STRATEGI NASH

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

Oleh :

M.LUTHFI RUSYDI
10454025655

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2011

KENDALI OPTIMAL PERMAINAN NON-KOOPERATIF KONTINU SKALAR DUA PEMAIN DENGAN STRATEGI NASH

M LUTHFI RUSYDI
NIM : 10454025655

Tanggal Sidang : 30 juni 2011
Tanggal Wisuda : November 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
JL. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang masalah pengambilan keputusan dari beberapa strategi yang tersedia dalam permainan berjumlah dua orang berstrategi murni dengan konsep *Nash Equilibrium*. Dilemma ditunjukkan sebagai contoh untuk memperkenalkan teori *Nash Equilibrium* adalah sangat berguna dalam kehidupan nyata. Hasil penelitian menunjukkan bahwa mengenai aturan main antara kedua pemain sangat mempengaruhi optimalitas nilai permainan.

Kata Kunci: Teori Permainan, Kestabilan, *Nash equilibrium*.

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

δ	: Delta
ε	: Epsilon
σ	: Sigma
$\int$	: Integral
T_f	: Time final

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori permainan dikembangkan untuk menganalisis situasi persaingan yang meliputi kepentingan yang bertentangan. Dalam teori permainan diasumsikan ada dua atau lebih pemain dengan tujuan yang berbeda, selanjutnya setiap orang dianggap mengetahui tujuan dari lawannya. Teori permainan mencari pemecahan untuk permainan dengan mengasumsikan bahwa setiap pemain bermaksud memaksimalkan keuntungan yang diharapkan atau setara dengan itu minimalkan kerugian. Kriteria ini didasarkan pada pandangan konservatif terhadap persoalan, dinyatakan sebagai kriteria minimaks atau maksimin ini merupakan dasar dari strategi permainan yang semula dikembangkan oleh Jhon Van Neumann dan Oskar Morgenstern dan diterapkan dalam berbagai bidang.

Penerapan teori permainan diterapkan dalam berbagai bidang salah satunya mencakup pula situasi persaingan dalam ekonomi. Setelah ada beberapa terlihat dari hasil karya kedua penemu di atas yang belum sempurna di dalam keseimbangan Nash, maka sekarang muncullah penemu yang bernama John Nash pada tahun 1950-1953, ia menunjukkan keseimbangan di dalam permainan N-orang,”permainan tak kooperatif”, dan dua orang di dalam permainan kooperatif menurut John Nash, keseimbangan adalah jika ada serangkaian strategi untuk permainan dimana tidak ada pemain yang bisa memperoleh keuntungan dengan mengubah strateginya, sementara pemain lagi menjaga strategi mereka tetap tidak berubah, kemudian rangkaian strategi hasil yang bersesuaian membentuk keseimbangan Nash.

Berdasarkan penjelasan di atas, maka penulis merasa tertarik untuk meneliti tentang teori permainan dengan menggunakan strategi Nash, oleh karena itu penulis mengajukan judul tugas akhir ini dengan “ **Kendali Optimal Permainan Non-Kooperatif Kontinu Skalar Dua Pemain dengan Strategi Nash** “.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, maka dapat dirumuskan permasalahan dalam penelitian ini adalah untuk menunjukkan dalam kondisi seperti apa strategi Nash itu ada.

1.3 Batasan Masalah

Dalam penulisan skripsi ini permasalahan dibatasi untuk teori permainan non-kooperatif kontinu skalar dua pemain dengan strategi Nash untuk waktu tak hingga.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk menunjukkan dalam kondisi seperti apa strategi Nash itu ada, dalam permainan ini untuk mencapai tujuan yang diinginkan.

1.5 Sistematika Penulisan

BAB I Pendahuluan

Berisikan tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Berisikan teori-teori yang mendukung tentang teori permainan non-kooperatif kontinu skalar dua pemain dengan strategi Nash.

BAB III Metodelogi Penelitian

Berisikan mengenai literatur, yaitu dengan membaca buku-buku dan sumber-sumber lain yang berhubungan dengan teori permainan non-kooperatif kontinu skalar dua pemain dengan strategi Nash.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan secara teoritis dalam mendapatkan hasil penelitian tersebut.

BAB V Penutup

Dalam bab ini akan dijelaskan mengenai kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Adapun landasan teori yang digunakan pada skripsi ini adalah.

2.1 Fungsi Kontinu

Dibawah akan diberikan definisi dari fungsi kontinu.

Definisi 2.1 (Purcell, 2003): Fungsi f dikatakan kontinu di $a \in D_f$ jika $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Definisi 2.1 di atas secara implisit mensyaratkan tiga hal agar fungsi f kontinu di a, yaitu :

(i). $f(a)$ ada atau terdefinisikan

(ii). $\lim_{x \to a} f(x)$ ada, dan

(iii). $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

2.2 Fungsi Monoton

Bagian ini penggunaan turunan akan digunakan untuk mengetahui sifat-sifat yang dimiliki suatu fungsi kontinu antara lain kemonotonan serta nilai ekstrim. Namun sebelumnya perlu diberikan pengertian secara formal mengenai kemonotonan suatu fungsi pada definisi berikut :

Definisi 2.2 (Purcell, 2003): Diberikan fungsi kontinu $f: I \to R$ dengan interval $I \subseteq R$, maka

1. Fungsi f dikatakan monoton naik pada interval $x_1 \leq x_2 \in I$ maka $f(x_1) \leq f(x_2)$.

2. Fungsi f dikatakan fungsi monoton naik tegas pada interval $I \subseteq R$ jika $x_1 < x_2 \in I$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
3. Fungsi f dikatakan fungsi monoton turun pada interval $I \subseteq R$ jika $x_1 \leq x_2 \in I$ maka $f(x_1) \geq f(x_2)$.
4. Fungsi f dikatakan fungsi monoton turun tegas pada interval $I \subseteq R$ jika $x_1 < x_2 \in I$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

Fungsi f kontinu pada interval $I \subseteq R$, maka kemonotonan fungsi dapat diperiksa menganalisis turunan fungsi f, secara lengkap diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.1 (Bartle, 1998): Diberikan fungsi kontinu $f\colon \to R$ dengan interval $I \subseteq R$ maka

1. Fungsi f dikatakan monoton naik pada interval I jika dan hanya jika $f'(x) \geq 0$, untuk setiap $x \in I$.
2. Fungsi f dikatakan monoton turun pada interval I jika dan hanya jika $f'(x) \leq 0$, untuk setiap $x \in I$.

Selanjutnya, dibahas mengenai nilai ekstrim global dan lokal dari suatu fungsi, pembahasan awal perlu diberikan definisi mengenai nilai ekstrim minimum global dan minimum lokal.

Definisi 2.3 (Bartle, 1998): Diberikan fungsi kontinu $f\colon I \to R$ dengan interval $I \subseteq R$, maka

1. Fungsi f dikatakan memiliki minimum global di $x_0 \in I$ jika $\forall x \in I$ berlaku $f(x) \geq f(x_0)$.
2. Fungsi f dikatakan memiliki minimum lokal di $x_0 \in I$ jika untuk suatu persekitaran δ dari x_0 sedemikan sehingga $f(x) \geq f(x_0)$ untuk setiap x didalam persekitaran tersebut.

Maksimum global dan maksimum lokal didefinisikan dengan membalik tanda pertidaksamaan pada defenisi 2.3.

2.3 Kestabilan

Sebelum pembahasan kestabilan perlu didefinisikan titik ekuilibrium, sebagai berikut :

Definisi 2.4 (Engwerda, 2005): Diberikan persamaan diferensial order satu yaitu $\dot{x} = f(x)$ dengan nilai awal $x(0) = x_0$, sebuah vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Definisi titik ekuilibrium, digunakan untuk memberikan definisi kestabilan sebagai berikut :

Definisi 2.5 (Engwerda, 2005): Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{x}$ merupakan titik stabil dan $\exists\, \delta > 0$ sehingga $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$ memenuhi $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$.

Untuk kasus lain titik $\bar{x}$ dikatakan tidak titik stabil jika tidak memenuhi definisi kestabilan.

2.4 Permainan Dinamis Non-Kooperatif untuk Waktu Tak hingga

Permainan dua pemain dengan para pemain memberikan kendali pada persamaan diferensial sistem dinamik

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u_1(t) + B_2u_2(t), \;\; x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

Para pemain meminimalkan dalam arti Nash

$$J_i\big(x_0, u_1, u_2, T_f\big) = \int_0^{T_f} \big\{x^T(t)Q_ix(t) + u_i^T(t)R_{ii}u_i(t) + u_j^T(t)R_{jj}u_j(t)\big\}\, dt, j \neq i \tag{2.2}$$

Pada bagian ini dibahas untuk kasus waktu tak hingga, yaitu fungsi tujuan memenuhi kriteria

$J_i(x_0, u_1, u_2) = \lim_{T_f - \infty} J_i\,(x_0, u_1, u_2, T_f)$ dengan $i = 1{,}2$.

Fungsi tujuan permainan ini memenuhi asumsi Q_i dan R_{ii} adalah matriks simetris dan R_{ii} adalah definit positif, untuk $i = 1{,}2$. Selanjutnya akan dicari fungsi kendali $u_i = F_i x$, dengan $F_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m}, i = 1{,}2$ dan (F_1, F_2) adalah anggota $\mathcal{F} = \{F = (F_1, F_2) | A + B_1 F_1 + B_2 F_2 \; stabil\}$, yang memenuhi definisi berikut

Definisi 2.6 (Engwerda, 2005): Ekulibrium linier $(F_1^*, F_2^*) \in \mathcal{F}$ disebut ekuilibrium linier umpan balik Nash jika memenuhi perrtidaksamaan $J_1(x_0, F_1^*, F_2^*) \leq J_1(x_0, F_1, F_2^*)$ dan $J_2(x_0, F_1^*, F_2^*) \leq J_2(x_0, F_1^*, F_2)$ untuk setiap x_0 dan untuk setiap matriks state umpan balik $F_i, i = 1{,}2$ sedemikian sehingga (F_1, F_2^*) dan $(F_1^*, F_2) \in \mathcal{F}$.

Masalah dua pemain ekuivalen dengan masalah linier kuadratik biasa, sehingga untuk masalah waktu tak hingga dapat diberikan persamaan aljabar Riccati sebagai berikut

$$0 = -(A - S_2 K_2)^T K_1 - K_1 (A - S_2 K_2) + K_1 S_1 K_1 - Q_1 - K_2 S_{21} K_2 \qquad (2.3)$$

$$0 = -(A - S_1 K_1)^T K_2 - K_2 (A - S_1 K_1) + K_2 S_2 K_2 - Q_2 - K_1 S_{12} K_1, \qquad (2.4)$$

Vektor kendali permainan dapat diperoleh jika dan hanya jika persamaan aljabar Riccati (2.3)-(2.4) memiliki solusi (K_1, K_2), yang menyebabkan $A - S_1 K_1 - S_2 K_2$ menjadi stabil. Hal ini dibahas pada teorema berikut :

Teorema 2.2 (Engwerda, 2005): Misalkan (K_1, K_2) adalah solusi simetris persamaan (2.3) dan (2.4) dan didefinisikan $F_i^* = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i$ untuk $i = 1{,}2$ maka (F_1^*, F_2^*) adalah ekuilibrium umpan balik Nash. Selanjutnya fungsi tujuan akhir untuk pemain ke-i adalah $x_0^T K_i x_0, i = 1{,}2$. Sebaliknya, jika (F_1^*, F_2^*) adalah ekuilibrium umpan balik Nash, maka terdapat (K_1, K_2) adalah solusi simetris persamaan (2.3) dan (2.4) sehingga $F_i^* = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i$ untuk $i = 1{,}2$.

Bukti :

Pertama akan dibuktikan untuk pemain pertama, diketahui $F_2^* = -R_{22}^{-1} B_2^T K_2$ dengan K_2 adalah solusi persamaan diatas. Jika $u_2 = F_2^* x$ maka $u_2^T = x^T F_2^*$.

Selanjutnya diketahui sistem dinamik $\dot{x} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2$, maka sistem dinamik setelah diberi kendali umpan balik adalah

$$\dot{x} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2 = Ax + B_1 u_1 + B_2 F_2^* x = Ax + B_2(-R_{22}^{-1} B_2^T K_2)x + B_1 u_1 = (A - S_2 K_2)x + B_1 u_1, \text{ dengan } x(0) = x_0,$$

Fungsi tujuan yang akan diminimalkan pemain pertama yaitu

$$J_1(x_0, u_1, F_2^*) = \int_0^\infty \{x^T Q_1 x + u_1^T R_{11} u_1 + u_2^T R_{12} u_2\} dt$$

$$= \int_0^\infty \{x^T Q_1 x + u_1^T R_{11} u_1 + x^T F_2^{*T} R_{12} F_2^* x\} dt$$

$$= \int_0^\infty \{x^T (Q_1 + F_2^{*T} R_{12} F_2^*) x + u_1^T R_{11} u_1\} dt$$

Sistem dinamik permainan fungsi objektif di atas dapat dipandang sebagai masalah kendali optimal linier kuadratik biasa. Sehingga dapat diberikan persamaan aljabar Riccati sebagai berikut :

$$0 = -(A - S_2 K_2)^T K_1 - K_1 (A - S_2 K_2) + K_1 S_1 K_1 - (Q_1 + F_2^{*T} R_{12} F_2^*)$$

$$0 = -(A - S_2 K_2)^T K_1 - K_1 (A - S_2 K_2) + K_1 S_1 K_1 - (Q_1 - K_2 B_2 R_{22}^{-1} R_{12} B_2^T K_2)$$

$$0 = -(A - S_2 K_2)^T K_1 - K_1 (A - S_2 K_2) + K_1 S_1 K_1 - Q_1 - K_2 S_{21} K_2, \qquad (2.5)$$

Dengan persamaan (2.5) memiliki solusi K_1, maka diperoleh vektor kendali permainan pertama yaitu $u_1^* = -R_{11}^{-1}B_1^T K_1 x$ dengan $F_1^*(t) = -R_{11}^{-1}B_1^T K_1$ sebagai ekuilibrium umpan balik Nash.

Selanjutnya, berdasarkan masalah kendali optimal linier kuadratik biasa, maka fungsi tujuan akhir optimal untuk pemain pertama dengan kendali yang diperoleh adalah $J_1 = x_0^T K_1(0) x_0$.

Secara sama untuk pemain kedua berdasarkan sistem dinamik dan fungsi objektif yang bersesuaian dapat dibentuk persamaan aljabar Riccati yaitu :

$$0 = -(A - S_1K_1)^T K_2 - K_2(A - S_1K_1) + K_2S_2K_2 - Q_2 - K_1S_{12}K_1. \qquad (2.6)$$

Berdasarkan persamaan di atas memiliki solusi $K_2(t)$, maka diperoleh vektor kendali pemain kedua $u_2^* = -R_{22}^{-1}B_2^T K_2 x$, dengan $F_2^*(t) = -R_{22}^{-1}B_2^T K_2(t)$ sebagai ekuilibrium umpan balik Nash. Sehingga nilai optimal untuk fungsi objektif adalah $J_2 = x_0^T K_2(0) x_0$.

Diasumsikan $(F_1^*, F_2^*) \in \mathcal{F}$ adalah ekuilibrium umpan balik Nash. Selanjutnya berdasarkan definisi dipenuhi :

$$J_1(x_0, F_1^*, F_2^*) \le J_1(x_0, F_1, F_2^*) \text{ dan } J_2(x_0, F_1^*, F_2^*) \le J_2(x_0, F_1^*, F_2).$$

Akan ditunjukkan ada $(K_1(t), K_2(t))$ solusi (2.3)-(2.4) dengan $F_i^*(t) = -R_{ii}^{-1}B_i^T K_i$.

Untuk pemain pertama diketahui F_2^* yang memenuhi $u_2^*(t) = F_2^* x(t)$. Maka sistem dinamik pemain pertama menjadi $\dot{x} = Ax + B_1u_1 + B_2F_2^*x$ dengan fungsi objektif berikut :

$$J_1 = \int_0^\infty \{x^T(Q_1 + F_2^{*T}R_{12}F_2^*)x + u_1^T R_{11} u_1\} dt.$$

Dapat dibentuk persamaan Riccati

$$0 = -(A - B_2F_2^*)^T K_1 - K_1(A + B_2F_2^*) + K_1S_1K_1 - (Q_1 + F_2^{*T}R_{12}F_2^*). \qquad (2.7)$$

Disubstitusikan $F_2^*(t) = -R_{22}^{-1}B_2^TK_2$ dengan $F_2^{*T}(t) = -K_2B_2R_{22}^{-1}$ ke persamaan (2.7) diperoleh

$$-(A + B_2(-R_{22}^{-1}B_2^TK_2))^TK_1 - K_1\big(A + B_2(-R_{22}^{-1}K_2)\big) + K_1S_1K_1 - \big(Q_1 + (-K_2B_2R_{22}^{-1})R_{12}(-R_{22}^{-1}B_2^TK_2)\big) = 0$$

$$-(A - S_2K_2)^TK_1 - K_1(A - S_2K_2) + K_1S_1K_1 - Q_1 - K_2S_{21}K_2 = 0, \qquad (2.8)$$

Maka dapat diperoleh K_1 sebagai solusi dari persamaan (2.8) sehingga

$$F_1^*(t) = -R_{11}^{-1}B_1^TK_1.$$

Selanjutnya untuk pemain kedua, diketahui F_1^* dengan $u_1^*(t) = F_1^*x(t)$. Maka sistem dinamik pemain pertama menjadi $\dot{x} = Ax + B_1F_1^*x + B_2u_2$, dengan fungsi objektif yang bersesuaian dapat dibentuk persamaan aljabar Riccati berikut :

$$0 = -(A - B_1F_1^*)^TK_2 - K_2(A + B_1F_1^*) + K_2S_2K_2 - (Q_2 + F_1^{*T}R_{21}F_1^* \qquad (2.9)$$

Substitusikan $F_1^*(t) = -R_{11}^{-1}B_1^TK_1$ dan $F_1^{*T}(t) = -K_1B_1R_{11}^{-1}$ ke persamaan (2.9) diperoleh

$$-(A + B_1(-R_{11}^{-1}B_1^TK_1))^TK_2 - K_2\big(A + B_1(-R_{11}^{-1}K_1)\big) + K_2S_2K_2 - \big(Q_2 + (-K_1B_1R_{11}^{-1})R_{21}(-R_{11}^{-1}B_1^TK_1)\big) = 0$$

$$-(A - S_1K_1)^TK_2 - K_2(A - S_1K_1) + K_2S_2K_2 - Q_2 - K_1S_{12}K_1 = 0, \qquad (2.10)$$

Maka dapat diperoleh K_2 sebagai solusi dari persamaan (2.10) sehingga

$$F_2^*(t) = -R_{22}^{-1}B_2^TK_2 \qquad \blacksquare$$

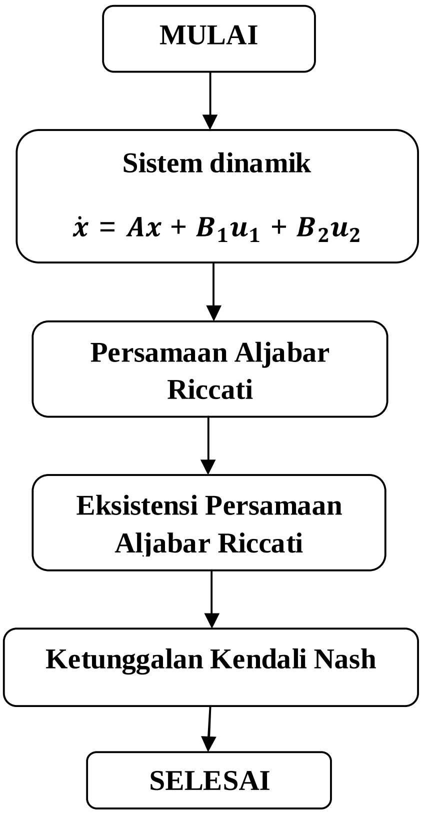
BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang penulis gunakan adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1) Menentukan persamaan aljabar Riccati.
2) Menyelidiki Eksistensi solusi persamaan aljabar Riccati.
3) Menyelidiki Eksistensi dan ketunggalan kendali Nash.

Langkah-langkah metodologi penelitian di atas dapat digambarkan dalam *flow chart* sebagai berikut :



Gambar 3.1 *Flow chart* metode penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN

Bab ini akan membahas kendali optimal permainan Non-kooperatif kontinu skalar dua pemain dengan strategi Nash berdasarkan teori- teori yang berhubungan dengan permasalahan sebagaimana telah dibahas pada bab sebelumnya.

4.1. Kendali Optimal Umpan Balik Permainan Dinamis Linier Kuadratik Dua Pemain Non-Kooperatif Kontinu Skalar

Pada bab 2 telah diberikan bentuk umum permainan dinamis dua pemain untuk waktu tak hingga, vektor kendali optimal dapat diperoleh melalui penyelesaian sistem persamaan aljabar Riccati. Selanjutnya pada bagian ini akan dibahas untuk kasus skalar, yang didasarkan dari bentuk umum pada bagian bab 2.

Didefinisikan persamaan diferensial sistem dinamik permainan dua pemain (2.1)-(2.2) dengan persamaan aljabar Riccati (2.3)-(2.4).

Selanjutnya dibentuk sistem permainan non-kooperatif dua pemain untuk kasus skalar, dengan mensubstitusikan $R_{12} = R_{21} = 0, A = a_i, B_i = b_i, Q_i = q_i, R_{ii} = r_i$ dan $s_i = \frac{b_i^2}{r_i}$, dengan $i = 1{,}2$ ke sistem permainan (2.1)-(2.2) diperoleh

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b_1u_1(t) + b_2u_2(t), \quad x(0) = x_0 \tag{4.1}$$

Para pemain meminimalkan dalam arti Nash fungsi objektif

$$J_i(x_0, u_1u_2) = \int_0^\infty \{x(t)q_ix(t) + u_i(t)r_iu_i(t) + u_i(t)(0)u_i(t)\}dt$$

$$J_i(x_0, u_1u_2) = \int_0^\infty \{q_ix^2(t) + r_iu_i^2(t)\}dt, \quad i = 1{,}2, \tag{4.2}$$

Dengan mengambil $x_i = K_i$, berdasarkan persamaan (2.3)-(2.4) maka persamaan aljabar Riccati yang bersesuaian adalah sebagai berikut :

$$s_1 x_1^2 + 2s_2 x_2 x_1 - 2ax_1 - q_1 = 0 \quad (4.3)$$

$$s_2 x_2^2 + 2s_2 x_2 x_2 - 2ax_2 - q_2 = 0 \quad (4.4)$$

Persamaan aljabar Riccati (4.3)-(4.4) akan memiliki solusi (x_1, x_2) yang akan menghasilkan vektor kendali Nash, yang dapat menstabilkan sistem permainan loop tertutup, $a - s_1 x_1 - s_2 x_2$ menjadi stabil atau

$$a - s_1 x_1 - s_2 x_2 < 0 \quad (4.5)$$

Persamaan (4.3)-(4.4) merupakan bentuk khusus dari persamaan berderajat dua

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Persamaan (4.3) merupakan persamaan hiperbola pada daerah (x_1, x_2), karena untuk $A = s_1, B = 2s_2, C = 0, D = -2a, E = 0$, dan $F = -q_1$ diperoleh $B^2 - 4AC = (2s_1)^2 - 4(s_1)(0) = 4s_2^2 > 0$. Kondisi ini menunjukkan bahwa persamaan (4.3) merupakan sebuah persamaan hiperbola. Selanjutnya berdasarkan persamaan (4.3) diperoleh

$$x_2 = -\frac{s_1}{2s_2} x_1 + \frac{a}{s_2} + \frac{\frac{q_1}{2s_2}}{x_1},$$

Maka asimtot tegak adalah $x_1 = 0$ dan asimtot miring adalah $x_2 = \frac{s_1}{2s_2} + \frac{a}{s_2}$, sementara pusat hiperbola persamaan pada $\left(0, \frac{a}{s_2}\right)$.

Secara sama persamaan (4.4) merupakan persamaan hiperbola pada daerah (x_1, x_2), karena untuk $A = s_2, B = 2s_1, C = 0, D = -2a, E = 0$, dan $F = -q_2$ diperoleh $B^2 - 4AC = (2s_1)^2 - 4(s_2)(0) = 4s_1^2 > 0$. berdasarkan persamaan (4.4) diperoleh

$$x_1 = -\frac{s_2}{2s_1} x_1 + \frac{a}{s_1} + \frac{\frac{q_2}{2s_1}}{x_2},$$

Sehingga asimtot datar adalah $x_2 = 0$ dan asimtot miring adalah $x_1 = \frac{s_2}{2s_1} + \frac{a}{s_1}$, sementara pusat hiperbola pada $\left(\frac{a}{s_1}, 0\right)$.

Persamaan (4.5) merupakan syarat kestabilan, yang menggambarkan daerah stabil dan daerah tak stabil. Umpan balik equilibrium Nash dapat diperoleh dari titik perpotongan kedua hiperbola pada daerah kestabilan. Seperti dapat dilihat pada contoh berikut :

Contoh 4.1 : Diberikan persamaan (4.3)-(4.5), dengan $a = b_1 = r_1 = 1, q_1 = \frac{1}{4}$ dan $q_2 = \frac{1}{5}$, dengan $a = 1, s_1 = s_2 = 1$ maka diperoleh persamaan hiperbola pertama adalah

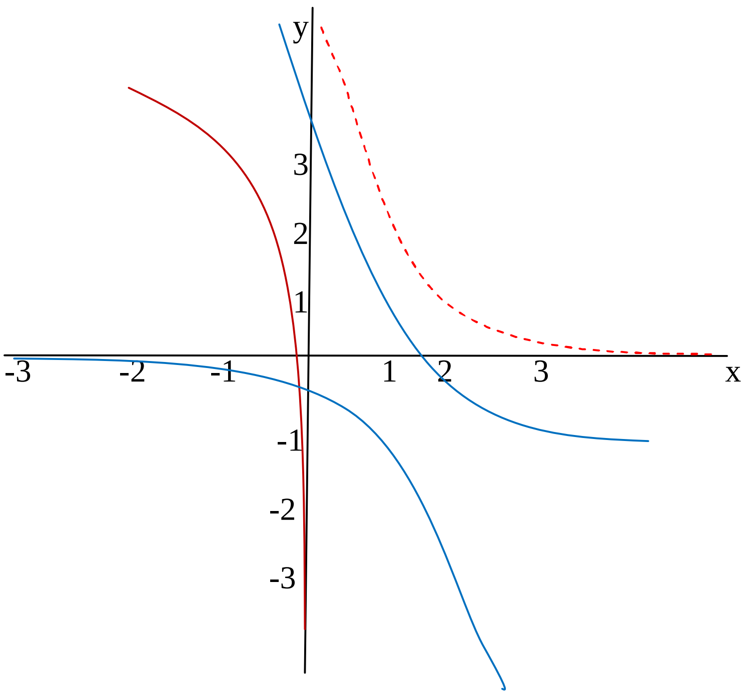
$$x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - \frac{1}{4} = 0$$

Dengan asimtot tegak $x_1 = 0$, asimtot miring $x_2 = -\frac{s_1}{2s_2}x_1 + \frac{a}{s_2} = -\frac{1}{2}x_1 + 1$ dan pusat hiperbola adalah (0,1).

Sedangkan persamaan hiperbola kedua adalah

$$x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2 - \frac{1}{5} = 0$$

Dengan asimtot datar $x_2 = 0$, asimtot miring $x_1 = -\frac{s_2}{2s_1}x_2 + \frac{a}{s_1} = -\frac{1}{2}x_2 + 1$ dan pusat hiperbola adalah (1,0), dengan syarat $1 - x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 1 - x_1$, kedua hiperbola dapat dilihat pada gambar 4.1 berikut :



Gambar 4.1: Permainan dengan tiga titik ekuilibrium Nash

Berdasarkan Gambar 4.1 diperoleh bahwa, kedua hiperbola memiliki empat titik potong, satu titik potong berada di daerah tidak stabil dan tiga titik potong berada di daerah stabil (daerah arsiran). Maka diperoleh tiga umpan balik ekuilibrium Nash yaitu tiga titik potong pada daerah stabil.

Contoh 4.2: Diberikan persamaan (4.3)-(4.5), dengan $a = 0, b_1 = r_1 = 1, q_1 = \frac{1}{4}$ dan $q_2 = \frac{1}{5}$, dengan $a = 0, s_1 = s_2 = 1$ maka diperoleh persamaan hiperbola pertama adalah

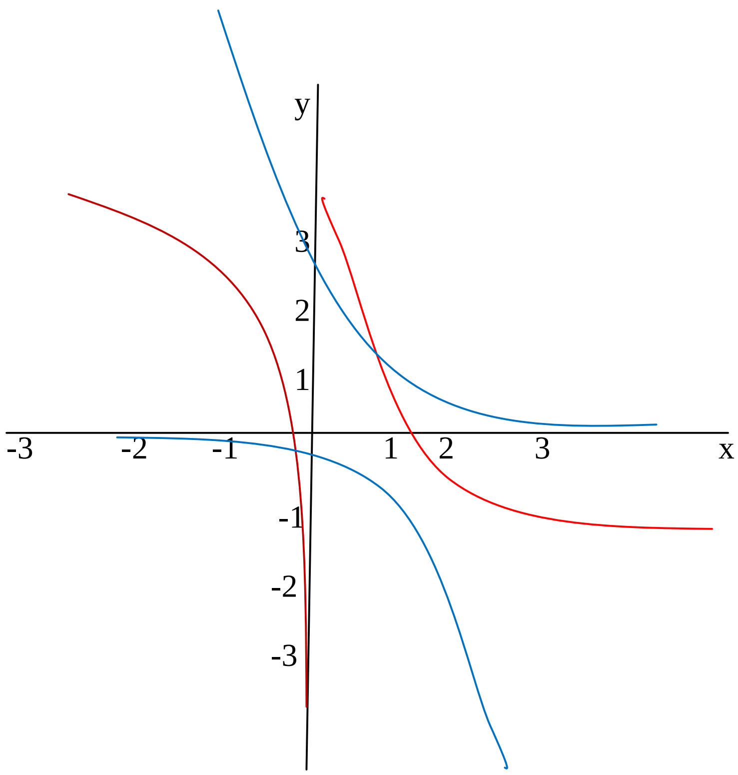
$$x_1^2 + 2x_1x_2 - \frac{1}{4} = 0$$

Dengan asimtot tegak $x_1 = 0$, asimtot miring $x_2 = -\frac{s_1}{2s_2}x_1 + \frac{a}{s_2} = -\frac{1}{2}x_1$ dan pusat hiperbola adalah (0,0).

Sedangkan persamaan hiperbola kedua adalah

$$x_2^2 + 2x_1x_2 - \frac{1}{5} = 0$$

Dengan asimtot datar $x_2 = 0$, asimtot miring $x_1 = -\frac{S_2}{2s_1}x_2 + \frac{a}{s_1} = -\frac{1}{2}x_2$ dan pusat hiperbola adalah (1,0), dengan syarat $-x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1$, kedua hiperbola dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 4.2: Permainan dengan satu titik ekuilibrium Nash

Berdasarkan Gambar 4.2 diperoleh bahwa, kedua hiperbola memiliki dua titik potong, satu titik potong berada di daerah tidak stabil dan satu titik potong berada di daerah stabil (daerah arsiran). Maka diperoleh satu umpan balik ekuilibrium Nash yaitu titik potong pada daerah stabil.

Sebelum dibahas berbagai situasi yang berhubungan dengan titik ekuilibrium Nash pada permainan ini, maka terlebih dahulu dibahas kondisi-

kondisi yang berhubungan dengan solusi persamaan aljabar Riccati, teorema berikut akan membahas solusi-solusi persamaan aljabar Riccati untuk kasus $s = 0$, dan untuk kasus $s \neq 0$ akan dibahas pada bagian selanjutnya.

Teorema 4.1(Engwerda, 2005): Diberikan persamaan (4.3)-(4.5), diasumsikan $s_1 = 0$, berlaku :

1. Jika $s_2 \neq 0$ maka terdapat solusi $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ untuk persamaan (4.3)-(4.5) jika dan hanya jika $a^2 + s_2 q_2 > 0$. jika kondisi tersebut dipenuhi maka terdapat solusi tunggal yaitu $\left(\frac{q1}{2\sqrt{a^2+s_2q_2}}, \frac{a+\sqrt{a^2 s_2 q_2}}{s_2}\right)$
2. Jika $s_2 = 0$ maka terdapat solusi $(s_1, s_2) \in R^2$ untuk persamaan (4.3)-(4.5) jika dan hanya jika $a < 0$. Jika kondisi tersebut dipenuhi maka terdapat solusi tunggal yaitu $\left(-\frac{q_1}{2a}, -\frac{q_2}{2a}\right)$

Bukti :

1. Diasumsikan $s_1 = 0$ dan $s_2 \neq 0$ berdasarkan persamaan (4.3)-(4.5) diperoleh

$$2s_2x_1x_2 - 2ax_1 - q_1 = 0$$
$$s_2x_2^2 - 2as_2 - q_2 = 0$$
$$a - s_2x_2 < 0$$

Selanjutnya dari persamaan $s_2x_2^2 - 2ax_2 - q_2 = 0$ diperoleh solusi yaitu

$$x_{2_{12}} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + s_2q_2}}{s_2},$$

Maka $x_{2_{12}} = \frac{a\pm\sqrt{a^2+s_2q_2}}{s_2}$ akan memiliki solusi real jika dan hanya jika

$a^2 + s_2q_2 > 0$,

Oleh karena itu, kondisi di atas dipenuhi, maka $x_{2_{12}} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + s_2 q_2}}{s_2}$ disubstitusikan ke persamaan (4.3)

Untuk $x_{2_{12}} = \frac{a + \sqrt{a^2 + s_2 q_2}}{s_2}$ disubstitusikan ke $2s_2 x_1 x_2 - 2ax_1 - q_1 = 0$ diperoleh $\frac{q_1}{2\sqrt{a^2 + s_2 q_2}}$.

Untuk $x_{2_{12}} = \frac{a - \sqrt{a^2 + s_2 q_2}}{s_2}$ disubstitusikan ke $2s_2 x_1 x_2 - 2ax_1 - q_1 = 0$ diperoleh $\frac{q_1}{-2\sqrt{a^2 + s_2 q_2}}$.

Didapat $\left(\frac{q_1}{2\sqrt{a^2 + s_2 q_2}}, \frac{a + \sqrt{a^2 + s_2 q_2}}{s_2}\right)$ dan $\left(\frac{q_1}{-2\sqrt{a^2 + s_2 q_2}}, \frac{a - \sqrt{a^2 + s_2 q_2}}{s_2}\right)$ adalah solusi persamaan (4.3)-(4.4)

Selanjutnya hasil disubstitusikan ke persamaan (4.5). Untuk himpunan penyelesaian pertama diperoleh :

$$a - s_2\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + s_2 q_2}}{s_2}\right) = -\sqrt{a^2 + s_2 q_2} < 0$$

Untuk himpunan penyelesaian kedua didapat

$$a - s_2\left(\frac{a - \sqrt{a^2 + s_2 q_2}}{s_2}\right) = -\sqrt{a^2 + s_2 q_2} > 0$$

Dari hasil tersebut dapat diambil kesimpulan kembali bahwa penyelesaian yang memenuhi persamaan (4.3)-(4.4) adalah

$$\left(\frac{q_1}{2\sqrt{a^2 + s_2 q_2}}, \frac{a + \sqrt{a^2 + s_2 q_2}}{s_2}\right)$$

2. Diasumsikan $s_1 = 0$ dan $s_2 = 0$ berdasarkan persamaan (4.3)-(4.5) diperoleh :

$$-2ax_1 - q_1 = 0,$$
$$-2ax_2 - q_2 = 0,$$
$$a < 0.$$

Karena $a < 0$, maka

$$-2ax_1 - q_1 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{q_1}{2a}$$
$$-2ax_2 - q_2 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{q_2}{2a}$$

Sehingga diperoleh solusi yaitu

$$\left(-\frac{q_1}{2a}, -\frac{q_2}{2a}\right) \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya akan di bahas solusi persamaan aljabar Riccati dengan asumsi $s_1 \neq 0, i = 1{,}2$, didefinisikan $y_1 = s_1x_1$ dan $\sigma_1 = s_1q_1, i = 1{,}2$, dan diasumsikan $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Persamaan (2.3) dan (2.4) dikalikan dengan $s_i, i = 1{,}2$ diperoleh

$$s_1x_1^2 + 2s_2x_1x_2 - 2ax_1 - q_1 = 0 \rightarrow s_1^2x_1^2 + 2s_1s_2x_1x_2 - 2as_1x_1 - s_1x_1 = 0,$$
$$s_2x_2^2 + 2s_1x_1x_2 - 2ax_2 - q_2 = 0 \rightarrow s_2^2x_2^2 + 2s_1s_2x_1x_2 - 2as_2x_2 - s_2x_2 = 0,$$

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa persamaan (4.3)-(4.5) memiliki solusi $(x_1, x_2) \epsilon R^2$ jika dan hanya jika persamaan :

$$y_1^2 - 2y_3y_1 - \delta_1 = 0, i = 1{,}2 \qquad (4.6)$$
$$y_3 = -a + y_1 + y_2 > 0, \qquad (4.7)$$

Memiliki solusi $(y_1, y_2) \epsilon R^2$

Sebelumnya disubtitusikan terlebih dahulu $y_3 = -a + y_1 + y_2$ kepersamaan (4.6), untuk $i = 1$ diperoleh

$$y_1^2 - 2(-a + y_1 + y_2)y_1 + \delta_1 = 0$$
$$y_1^2 + 2ay_1 - 2y_1^2 - 2y_1y_2 + \delta_1 = 0$$
$$y_1^2 - 2ay_1 + 2y_1y_2 - \delta_1 = 0, \qquad (4.8)$$

Maka berdasarka perkalian persamaan (4.3) dengan δ_{1} , diperoleh

$$s_1^2 x_1^2 + 2s_1 s_2 y_1 y_2 - 2as_1 x_1 - s_1 q_1 = 0 \leftrightarrow y_1^2 - 2ay_1 2y_1 y_2 - \delta_1 = 0$$

Dapat disimpulakan bahwa persamaan (4.3) akan punya solusi $(x_1, x_2) \epsilon\, R^2$ jika dan hanya jika persamaan (4.8) punya solusi $(y_1, y_2)\ \epsilon\ R^2$ untuk $i = 2$, diperoleh

$$y_2^2 - 2(-a + y_1 + y_2)y_2 + \delta_2 \quad = 0$$

$$y_2^2 + 2ay_2 - 2y_1^2 - 2y_1 y_2 + \delta_2 = 0$$

$$y_2^2 - 2ay_2 + 2y_1 y_2 - \delta_2 = 0, \qquad (4.9)$$

Selanjutnya berdasarkan persamaan (4.5), dengan $y_2 = s_2 x_2$ dan $\delta_2 = s_2 q_2$, maka diperoleh :

$$s_2^2 x_2^2 + 2s_1 s_2 x_1 x_2 - 2as_2 x_2 - s_2 q_2 = 0 \leftrightarrow y_2^2 - 2ay_2 + y_1 y_2 - \delta_2 = 0$$

Dapat disimpulkan bahwa persamaan (4.3) akan mempunyai solusi $(x_1, x_2) \epsilon\, R^2$ jika dan hanya jika persamaan (4.9) mempunyai solusi $(y_1, y_2)\ \epsilon\ R^2$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh hasil bahwa terdapat hubungan antara persamaan (4.3)-(4.5) dan persamaan (4.6)-(4.7), sehingga dengan mencari solusi persamaan (4.6)-(4.7) maka dapat diperoleh solusi untuk (4.3)-(4.5). untuk solusi persamaan (4.6)-(4.7) dibahas dengan Lemma berikut :

Lemma 4.1: Sistem persamaan (4.6)-(4.7) memiliki solusi jika dan hanya jika terdapat $t_1, t_2\ \epsilon\ \{-1,1\}$ sehingga persamaan

$$y_3 + t_1\sqrt{y_3^2 - \delta_1} + t_2\sqrt{y_3^2 - \delta_2} = a \qquad (4.10)$$

Memiliki solusi $y_3 > 0$ dengan syarat $y_3^2 \geq \delta_{1,}$

Bukti :

Andaikan sistem persamaan (4.6) memiliki solusi, yaitu

$$y_1^2 - 2y_3y_1 + \delta_1 = 0,\ \ i = 1{,}2,$$

Untuk $i = 1$ maka $y_1^2 - 2y_3y_1 + \delta_1 = 0$ diperoleh solusi

$$y_{1_{12}} = \frac{2y_3 \pm \sqrt{(2y_3)^2 - 4\delta_1}}{2} = y_3 \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_1}$$

Untuk $i = 2$ maka $y_2^2 - 2y_3y_2 + \delta_2 = 0$ diperoleh solusi

$$y_{2_{12}} = \frac{2y_3 \pm \sqrt{(2y_3)^2 - 4\delta_2}}{2} = y_3 \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_2}$$

Substitusikan $\left(y_{1_{12}}, y_{2_{12}}\right)$ ke persamaan (4.7) diperoleh

$$y_3 = -a + y_1 + y_2 > 0$$

$$y_3 = -a + y_3 \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_1} + y_3 \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_2} \leftrightarrow y_3 = -a + 2y_3 \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_1} \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_2}$$

$$\rightarrow y_3 - 2y_3 \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_1} \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_2} = -a \leftrightarrow -y_3 \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_1} \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_2} = -a$$

$$\rightarrow y_3 \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_1} \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_2} = a \qquad (4.11)$$

Berdasarkan persamaan (4.11) dapat dilihat terdapat $t_1, t_2 \epsilon \{-1{,}1\}$ sehingga diperoleh

$$y_3 + t_1\sqrt{y_3^2 - \delta_1} + t_2\sqrt{y_3^2 - \delta_2} = a \qquad (4.12)$$

Persamaan (4.12) akan memiliki solusi $y_3 > 0$ jika $y_3^2 \geq \delta_1$

Sekarang akan dibuktikan arah sebaliknya. Andaikan persamaan (4.10) memiliki solusi $y_3 > 0$ dengan syarat $y_3^2 \geq \delta_1$. Selanjutnya akan dibuktikan persamaan (4.6)-(4.7) memiliki solusi $(y_1, y_2) \in R^2$. Berdasarkan persamaan (4.6) diperoleh

Untuk $i = 1 \rightarrow y_1^2 - 2y_3y_1 + \delta_1 = 0$ memiliki solusi $y_{1_{12}} = y_3 \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_1}$

Untuk $i = 2 \rightarrow y_2^2 - 2y_3y_2 + \delta_2 = 0$ memiliki solusi $y_{2_{12}} = y_3 \pm \sqrt{y_3^2 - \delta_2}$

Karena terdapat $y_3 > 0$ adalah solusi persamaan (4.10) dengan syarat $y_3^2 \geq \delta_1$ maka $(y_{1_{12}}, y_{2_{12}})$ ada.

Selanjutnya akan dibahas sifat-sifat dari semua kemungkinan persamaan yang dapat dibentuk dari persamaan (4.10), yang berhubungan dengan eksistensi dan ketunggalan ekuilibrium permainan. Pembahasan selanjutnya dimulai dengan menotasikan x dan y_3 dan didefinisikan untuk semua $x > 0$ dengan syarat $x^2 \geq \sigma_1$, maka dari persamaan (4.10) dengan $t_1, t_2 \in \{-1,1\}$ dapat dibentuk persamaan-persamaan berikut :

$$f_1(x) = x - \sqrt{x^2 - \sigma_1} - \sqrt{x^2 - \sigma_2}, \tag{4.13}$$

$$f_2(x) = x + \sqrt{x^2 - \sigma_1} - \sqrt{x^2 - \sigma_2}, \tag{4.14}$$

$$f_3(x) = x - \sqrt{x^2 - \sigma_1} + \sqrt{x^2 - \sigma_2}, \tag{4.15}$$

$$f_4(x) = x + \sqrt{x^2 - \sigma_1} + \sqrt{x^2 - \sigma_2}. \tag{4.16}$$

Titik ekuilibrium merupakan perpotongan titik pada grafik $f_1(x)$ dengan a pada daerah stabil. Selanjutnya beberapa sifat untuk fungsi $f_1(x)$ dengan $\sigma_1 > 0$ dan $\sigma_1 < 0$ diberikan pada Lemma berikut :

Lemma 4.2: Diberikan persamaan-persamaan (4.13)-(4.16), dengan $\sigma_1 > \sigma_2$, berlaku :

1. $f_1(x) < f_2(x) < f_3(x) < f_4(x)$.
2. Jika $\sigma_1 > 0$ maka
   (a). $f_i(\sqrt{\sigma_1}) = f_{i+1}(\sqrt{\sigma_1}),\ i = 1,3$.
   (b). $f_3(x)$ mempunyai titik minimum yang tunggal pada $x^* > \sqrt{\sigma_1}$.
3. Jika $\sigma_1 < 0$ maka
   (a). $f_2(x)$ dan $f_3(x)$ adalah fungsi monoton naik.
   (b). $f_1(x)$ mempunyai tepat satu titik global maksimum pada $x^* > 0$.
   (c). Maksimum $f_1(x) < f_2(0)$.

Bukti :

1. Diberikan persamaan (4.13)-(4.16) dengan $x > 0, x^2 \geq \sigma_1\ dan\ \sigma_1 > \sigma_2$, maka berlaku hubungan
   $x - \sqrt{x^2 - \sigma_1} - \sqrt{x^2 - \sigma_2} < x + \sqrt{x^2 - \sigma_1} - \sqrt{x^2 - \sigma_2} < x - \sqrt{x^2 - \sigma_1} + \sqrt{x^2 - \sigma_2} < x + \sqrt{x^2 - \sigma_1} + \sqrt{x^2 - \sigma_2}$,

   Sehingga terbukti bahwa

   $$f_1(x) < f_2(x) < f_3(x) < f_4(x).$$

2. Jika $\sigma_1 > 0$ maka

   (a). untuk $i = 1$ maka $f_1(\sqrt{\sigma_1}) = f_2(\sqrt{\sigma_1})$, karena

   $$f_1(\sqrt{\sigma_1}) = \sqrt{\sigma_1} - \sqrt{(\sqrt{\sigma_1})^2 - \sigma_1} - \sqrt{(\sqrt{\sigma_1})^2 - \sigma_2} = \sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_1 - \sigma_2}$$

   $$f_2(\sqrt{\sigma_1}) = \sqrt{\sigma_1} + \sqrt{(\sqrt{\sigma_1})^2 - \sigma_1} - \sqrt{(\sqrt{\sigma_1})^2 - \sigma_2} = \sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_1 - \sigma_2}$$

   Untuk $i = 3$ maka $f_3(\sqrt{\sigma_1}) = f_4(\sqrt{\sigma_1})$, karena

$$f_3(\sqrt{\sigma_1}) = \sqrt{\sigma_1} - \sqrt{(\sqrt{\sigma_1})^2 - \sigma_1} + \sqrt{(\sqrt{\sigma_1})^2 - \sigma_2} = \sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_1 - \sigma_2}$$

$$f_4(\sqrt{\sigma_1}) = \sqrt{\sigma_1} + \sqrt{(\sqrt{\sigma_1})^2 - \sigma_1} + \sqrt{(\sqrt{\sigma_1})^2 - \sigma_2} = \sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_1 - \sigma_2}$$

(b). Diberikan persamaan (4.13) selanjutnya dengan turunan pertama diperoleh

$$f_1'(x) = 1 - \left\{\frac{1}{2}(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}} 2x\right\} - \left\{\frac{1}{2}(x^2 - \sigma_2)^{-\frac{1}{2}} 2x\right\}$$

$$= 1 - x(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}} - x(x^2 - \sigma_2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2 - \sigma_1)}} - \frac{x}{\sqrt{(x^2 - \sigma_2)}} < 0.$$

Karena $f_1'(x) < 0$ maka $f_1(x)$ merupakan fungsi monoton turun.

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (4.14), dengan turunan pertama diperoleh

$$f_2'(x) = 1 + \left\{\frac{1}{2}(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}} 2x\right\} - \left\{\frac{1}{2}(x^2 - \sigma_2)^{-\frac{1}{2}} 2x\right\}$$

$$= 1 + x(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}} - x(x^2 - \sigma_2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{(x^2 - \sigma_1)}} - \frac{x}{\sqrt{(x^2 - \sigma_2)}} > 0.$$

Karena $f_2'(x) > 0$ maka $f_2(x)$ merupakan fungsi monoton naik.

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (4.16), dengan turunan pertama diperoleh

$$f_4'(x) = 1 + \left\{\frac{1}{2}(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}} 2x\right\} + \left\{\frac{1}{2}(x^2 - \sigma_2)^{-\frac{1}{2}} 2x\right\}$$

$$= 1 + x(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}} + x(x^2 - \sigma_2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{(x^2 - \sigma_1)}} + \frac{x}{\sqrt{(x^2 - \sigma_2)}} > 0.$$

(c). Berdasarkan persamaan (4.15), dengan turunan pertama diperoleh

$$f_4'(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}}2x + \frac{1}{2}(x^2 - \sigma_2)^{-\frac{1}{2}}2x$$

$$= 1 + \frac{x}{(x^2-\sigma_1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{(x^2-\sigma_2)^{\frac{1}{2}}} > 0.$$

Maka $f_3'(x) = 0$ untuk suatu $x = x^*$ dengan syarat $x^* > \sqrt{\sigma_1}$.

Selanjutnya dengan uji turunan kedua, jika $\sigma_1 > \sigma_2$ dan $x^* > \sqrt{\sigma_1}$ diperoleh :

$$f_3''(x) = -\left\{1(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}}2x\right\} + \left\{1(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}}2x\right\}$$

$$= \frac{-(x^2 - \sigma_1)^{\frac{3}{2}} + x^2(x^2 - \sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 - \sigma_1)^2} + \frac{(x^2 - \sigma_1)^{\frac{3}{2}} - x^2(x^2 - \sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 - \sigma_2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(x^2 - \sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 - \sigma_1)^2}\left(-(x^2 - \sigma_1) + x^2\right) + \frac{(x^2 - \sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 - \sigma_1)^2}\left((x^2 - \sigma_1) - x^2\right)$$

$$f_3''(x) = \frac{(x^2 - \sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 - \sigma_1)^2}(\sigma_1) + \frac{(x^2 - \sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 - \sigma_1)^2}(-\sigma_1) > 0$$

Diperoleh $f_3''(x^*) > 0$, sehingga $f_3'(x)$ punya minimum pada saat $x^* > \sqrt{\sigma_1}$.

3. Jika $\sigma_1 < 0$ maka
   (a) Berdasarkan persamaan (4.14), selanjutnya dengan turunan pertama diperoleh

$$f_2'(x) = 1 + \left\{\frac{1}{2}(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}}2x\right\} - \left\{\frac{1}{2}(x^2 - \sigma_2)^{-\frac{1}{2}}2x\right\}$$

$$= 1 + x(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}} - x(x^2 - \sigma_2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{(x^2 - \sigma_1)}} - \frac{x}{\sqrt{(x^2 - \sigma_2)}} > 0.$$

Karena $f_2'(x) > 0$ maka $f_2(x)$ merupakan fungsi monoton naik.

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (4.15) dengan turunan pertama diperoleh

$$f_3'(x) = 1 - \left\{\frac{1}{2}(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}} 2x\right\} + \left\{\frac{1}{2}(x^2 - \sigma_2)^{-\frac{1}{2}} 2x\right\}$$

$$= 1 - x(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}} + x(x^2 - \sigma_2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2 - \sigma_1)}} + \frac{x}{\sqrt{(x^2 - \sigma_2)}} > 0.$$

Karena $f_3'(x) > 0$ maka $f_3(x)$ merupakan fungsi monoton naik.

(b). Berdasarkan persamaan (4.13), dengan syarat $\sigma_2 < 0$, maka

$$f_1(x) = x - \sqrt{x^2 - \sigma_1} - \sqrt{x^2 - \sigma_2}.$$

Dengan turunan pertama diperoleh :

$$f_1'(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - \sigma_1)^{-\frac{1}{2}} 2x - \frac{1}{2}(x^2 - \sigma_2)^{-\frac{1}{2}} 2x$$

$$= 1 + \frac{x}{(x^2 - \sigma_1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{(x^2 - \sigma_2)^{\frac{1}{2}}}$$

Maka $f_1'(x) = 0$ untuk suatu $x = x^*$ dengan syarat $x = x^* > 0$.

Dengan uji turunan kedua, jika $x^* > 0$ diperoleh :

$$f_1''(x) = -\frac{1}{(x^2 + \sigma_1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^2}{(x^2 + \sigma_1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + \sigma_2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^2}{(x^2 + \sigma_2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-(x^2 + \sigma_1)^{\frac{1}{2}} + x^2(x^2 + \sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + \sigma_1)^2} + \frac{-(x^2 + \sigma_2)^{\frac{1}{2}} + x^2(x^2 + \sigma_2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + \sigma_2)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + \sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + \sigma_1)^2}(-(x^2 + \sigma_1) + x^2) + \frac{(x^2 + \sigma_2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + \sigma_2)^2}(-(x^2 + \sigma_2) + x^2)$$

$$= \frac{(x^2 + \sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + \sigma_1)^2}(-\sigma_1) + \frac{(x^2 + \sigma_2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + \sigma_2)^2}(-\sigma_1) < 0.$$

Diperoleh $f_1''(x^*) < 0$. maka $f_1(x)$ akan memiliki nilai maksimum pada saat $x^* > 0$.

(c). Berdasarkan persamaan (4.16) dengan syarat $\sigma_1 < 0$, maka

$$f_4(x) = x + \sqrt{x^2 - \sigma_1} + \sqrt{x^2 - \sigma_2}$$

Selanjutnya dengan turunan pertama diperoleh

$$f_4'(x) = 1 + \frac{x}{(x^2 - \sigma_1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{(x^2 - \sigma_2)^{\frac{1}{2}}}$$

Maka $f_4'(x) = 0$ untuk suatu $x = x^*$ dengan syarat $x = x^* > 0$.

Selanjutnya dengan uji turunan kedua, jika $x^* < 0$ diperoleh

$$f_4''(x) = \frac{1}{(x^2 + \sigma_1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{(x^2 + \sigma_1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2 + \sigma_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{(x^2 + \sigma_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(x^2 + \sigma_1)^{\frac{1}{2}} - x^2(x^2 + \sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + \sigma_1)^2} + \frac{(x^2 + \sigma_2)^{\frac{1}{2}} - x^2(x^2 + \sigma_2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + \sigma_2)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + \sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + \sigma_1)^2}(\sigma_1) + \frac{(x^2 + \sigma_2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + \sigma_2)^2}(\sigma_2) > 0$$

Diperoleh $f_4''(x^*) > 0$, maka fungsi $f_4(x)$ memiliki minimum pada saat $x^* < 0$. Berdasarkan turunan pertama, $f_4(x) = x + \sqrt{x^2 + \sigma_1} + \sqrt{x^2 + \sigma_2}$ merupakan fungsi monoton naik.

(d). Diketahui fungsi $f_1(x)$ punya solusi maksimum untuk $x^* > 0$.

$$f_2(0) = 0 + \sqrt{0^2 + \sigma_1} - \sqrt{0^2 + \sigma_2} = \sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2},$$

Sehingga

$$f_1(x^*) - f_2(0) = x^* - \sqrt{(x^*)^2 + \sigma_1} - \sqrt{(x^*)^2 + \sigma_2} - \sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} < 0,$$

Maka diperoleh $f_1(x^*) - f_2(0) < 0 \Leftrightarrow f_1(x^*) < f_2(0)$

atau maksimum $f_1(x) < f_2(0)$. ■

Lemma 4.1 memberikan beberapa hasil yang dapat digunakan untuk membalas kondisi-kondisi yang menyebabkan suatu permainan tidak memiliki ekuilibrium Nash, memiliki satu ekuilibrium Nash dan memiliki lebih dari satu ekuilibrium Nash, hal ini dibahas pada teorema berikut.

Teorema 4.2 : Diberikan permainan yang memenuhi persamaan (4.11) dan (4.12), dengan $\sigma_1 = \frac{b_i^2 q_i}{r_i}$, $i = 1,2$. diasumsikan $\sigma_1 \geq \sigma_2$, selanjutnya diberikan persamaan $f_i(x), i = 1,2,3,4$, seperti pada persamaan (4.13)-(4.16), maka

1(a). Jika $\sigma_1 > 0$ dan $\sigma_1 \geq \sigma_2$, maka permainan memiliki

i. Satu ekuilibrium jika $-\infty < a < min\ f_3(x)$.
ii. Dua ekuilibrium jika $a = min\ f_3(x)$.
iii. Tiga ekuilibrium jika $a > min\ f_3(x)$.

1(b). Jika $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$, maka permainan memiliki

i. Satu ekuilibrium jika $a \leq \sqrt{\sigma_1}$.
ii. Tiga ekuilibrium jika $a > \sqrt{\sigma_1}$.

2(a). Jika $\sigma_1 < 0$ dan $\sigma_1 > \sigma_2$, maka permainan

i. Memiliki satu ekuilibrium jika $\sqrt{-\sigma_1} - \sqrt{-\sigma_2} < a \leq \sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2}$
ii. Memiliki dua ekuilibrium jika $-\sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2} < a \leq \sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2}$

iii. Memiliki tiga ekuilibrium jika $a > \sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2}$.

2(b). Jika $\sigma_1 = \sigma_2 < 0$, maka permainan

i. Memiliki dua ekuilibrium jika $0 < a \leq 2\sqrt{-\sigma_1}$.

ii. Memiliki tiga ekuilibrium jika $a > 2\sqrt{-\sigma_1}$.

Bukti :

1(a). Jika $\sigma_1 > 0$ dan $\sigma_1 \geq \sigma_2$ berlaku

i. Karena $f_1(x) < f_2(x) < f_3(x)$, jika $a > -\infty$ dan $a < min\, f_3(x)$. Maka a hanya akan memotong kurva didaerah stabil dengan kurva $f_2(x)$, berarti untuk $-\infty < a < min\, f_3(x)$, permainan hanya memiliki satu titik ekuilibrium.

ii. Karena $f_1(x) < f_2(x) < f_3(x)$, jika $a = min\, f_3(x)$ maka a akan memotong grafik pada daerah stabil yaitu pada $f_2(x)$ dan pada $f_3(x)$. Maka untuk $a = min\, f_3(x)$ permainan akan memiliki dua titik ekuilibrium.

iii. Karena $f_1(x) < f_2(x) < f_3(x) < f_4(x)$, jika $a > min\, f_3(x)$, maka akan memotong $f_2(x)$ pada daerah stabil, selanjutnya jika $min\, f_3(x)$ pada $x^* > \sqrt{\sigma_1}$, untuk $x = \sqrt{\sigma_1}$ berlaku $f_3(\sqrt{\sigma_1}) = f_4(\sqrt{\sigma_1})$, sehingga untuk $a > x^* > \sqrt{\sigma_1}$ maka a akan memotong grafik $f_3(x)$ dan $f_4(x)$ sehingga untuk $a > min\, f_3(x)$ akan memotong grafik $f_2(x)$, $f_3(x)$, dan $f_4(x)$. Sehingga diperoleh tiga titik ekuilibrium.

1(b). Jika $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$ berlaku

i. Andaikan $f_3(x)$ punya minimum $x^* > \sqrt{\sigma_1}$, jika $a \leq \sqrt{\sigma_1}$ berarti a berada dibawah grafik $f_3(x)$ maka a hanya akan memotong grafik $f_2(x)$ pada daerah stabil. Maka untuk $a \leq \sqrt{\sigma_1}$ permainan akan memiliki satu titik ekuilibrium.

ii. Andaikan $f_3(x)$ punya minimum $x^* > \sqrt{\sigma_1}$, dan memenuhi pertidaksamaan $f_2(x) < f_3(x) < f_4(x)$ dan untuk $x = \sqrt{\sigma_1}$, memenuhi $f_3(\sqrt{\sigma_1}) = f_4(\sqrt{\sigma_1})$, maka untuk $a = x^* > \sqrt{\sigma_1}$, garis a akan memotong grafik $f_2(x), f_3(x), f_4(x)$. Pada daerah stabil. Sehingga untuk $a > \sqrt{\sigma_1}$ permainan akan memiliki tiga titik ekuilibrium.

2(a). Jika $\sigma_1 < 0$ dan $\sigma_1 > \sigma_2$ berlaku

i. Berdasarkan lemma 1 dan $f_2(0) = \sqrt{-\sigma_1} - \sqrt{-\sigma_2}$, jika $a > maks\, f_1(x)$ dan $a \leq f_2(0)$, maka a memotong grafik pada daerah tidak stabil, sehingga tidak ada titik ekuilibrium.

ii. Karena $f_2(0) = \sqrt{-\sigma_1} - \sqrt{-\sigma_2}$ dan $f_3(0) = \sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2}$, jika $a > f_2(0)$ dan $a < -\sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2}$, maka a memotong grafik didaerah stabil pada grafik $f_2(x)$, maka permainan akan memiliki satu titik ekuilibrium.

iii. Karena $f_3(0) = \sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2}$ dan $f_4(0) = \sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2}$, jika $a > f_3(0)$ dan $a < f_4(0)$, maka a akan memotong grafik $f_2(x)$ dan $f_3(x)$ di daerah stabil. Sehinggga permainan akan memiliki dua titik ekuilibrium.

iv. Karena $f_4(0) = \sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2}$, jika $a < f_4(0)$ maka a akan memotong grafik $f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ di daerah stabil. Sehingga permainan akan memiliki tiga titik ekuilibrium.

2(b). jika $\sigma_1 = \sigma_2 < 0$ berlaku

i. Berdasarkan bagian 2.a, diketahui bahwa permainan tidak memiliki titik ekuilibrium jika $maks\, f_1(x) < a \leq \sqrt{-\sigma_1} - \sqrt{-\sigma_2}$. Selanjutnya untuk $\sigma_1 = \sigma_2 < 0$ maka maksimum $f_1(x)$ sebagai berikut :

$$f_1(x) = x - \sqrt{x^2 - \sigma_1} - \sqrt{x^2 - \sigma_2} = x - 2\sqrt{x^2 - \sigma_1},$$

Selanjutnya turunan pertama $f_1(x)$ diperoleh,

$$f_1''(x) = -\left\{2(x^2-\sigma_1)^{-\frac{1}{2}} + 2x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-\sigma_1)^{-\frac{1}{2}}2x\right\}$$

$$= \frac{-2(x^2-\sigma_1)^{\frac{3}{2}} + 2x^2(x^2-\sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2-\sigma_1)^2}$$

$$f_1''(x) = \frac{2(x^2-\sigma_1)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2-\sigma_1)^2}(\sigma_1)$$

Karena $\sigma_1 < 0$ maka untuk $x_{1.2} = \frac{\pm\sqrt{-3\sigma_1}}{3}$ didapat $f_1''(x) < 0$, selanjutnya berdasarkan Lemma 4.1, $f_1(x)$ punya maksimum untuk $x > 0$, maka $f_1(x)$ punya maksimum untuk $x = \frac{\sqrt{-3\sigma_1}}{3}$.

Sehingga nilai maksimum $f_1(x)$ adalah :

$$f_1(x) = x - 2\sqrt{x^2-\sigma_1} = \left(\frac{\sqrt{-3\sigma_1}}{3}\right) - 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{-3\sigma_1}}{3}\right)^2 - \sigma_1} = \sqrt{-3\sigma_1}$$

Selanjutnya untuk $f_2(0)$ dengan $\sigma_1 = \sigma_2 < 0$ diperoleh

$$f_2(0) = \sqrt{-\sigma_1} - \sqrt{-\sigma_2 = 0}$$

Maka

$$maks\ f_1(x) < a \leq \sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2} \Leftrightarrow \sqrt{-3\sigma_1} < a \leq 0.$$

Permainan tidak punya titik ekuilibrium.

ii. Berdasarkan bagian 2.a, permainan akan memiliki ekuilibrium jika

$$-\sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2} < a \leq \sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2}\,.$$

Karena $\sigma_1 = \sigma_2$ maka

$$-\sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2} < a \leq \sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2}$$

$$-\sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_1} < a \leq \sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_1}$$

$$0 < a \leq 2\sqrt{-\sigma_2}\ .$$

Maka untuk $\sigma_1 = \sigma_2$ permainan akan punya dua ekuilibrium jika

$$0 < a \leq 2\sqrt{-\sigma_2}\ .$$

iii. Berdasarkan bagian 2.a, permainan akan memiliki tiga ekuilibrium jika

$a > \sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2}$, karena $\sigma_1 = \sigma_2$ maka

$\sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_2} = \sqrt{-\sigma_1} + \sqrt{-\sigma_1} = 2\sqrt{-\sigma_1}$, diperoleh $a > 2\sqrt{-\sigma_1}$.

Sehingga permainan akan memiliki tiga ekuilibrium jika $a > 2\sqrt{-\sigma_1}$. ■

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Mengakhiri penulisan Tugas akhir ini, penulis dapat menarik kesimpulan dan saran berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan pada bab-bab sebelumnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian dan pembahasan yang dilakukan pada bab IV, dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{x}$ merupakan titik stabil dan $\exists\, \delta > 0$ sehingga $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$ memenuhi $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$. Untuk kasus lain titik $\bar{x}$ dikatakan tidak titik stabil jika tidak memenuhi definisi kestabilan.
2. Vektor kendali permainan dapat diperoleh jika dan hanya jika persamaan aljabar Riccati (2.3)-(2.4) memiliki solusi (K_1, K_2), yang menyebabkan $A - S_1K_1 - S_2K_2$ menjadi stabil.
3. Persamaan aljabar Riccati :

   $s_1x_1^2 + 2s_2x_2x_1 - 2ax_1 - q_1 = 0$

   $s_2x_2^2 + 2s_2x_2x_2 - 2ax_2 - q_2 = 0$

   Akan memiliki solusi (x_1, x_2) yang akan menghasilkan vektor kendali Nash, yang dapat menstabilkan sistem permainan loop tertutup $a - s_1x_1 - s_2x_2$ menjadi stabil atau $-s_1x_1 - s_2x_2 < 0$.

4. Persamaan $a - s_1x_1 - s_2x_2 < 0$ merupakan syarat kestabilan, yang menggambarkan daerah stabil dan daerah tak stabil. Umpan balik Nash dapat diperoleh dari titik perpotongan kedua hiperbola pada daerah kestabilan.

5.2 Saran

Dalam skripsi ini penulis hanya menggunakan permainan Non-kooperatif kontinu dua pemain dengan strategi Nash. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar pembaca dapat lebih lanjut menemukan strategi-strategi yang lebih optimal dari strategi Nash.

DAFTAR PUSTAKA

Engwerda, Jacob, *LQ Dynamic Optimization and Differensial Games*, Tilburg University, the Netherlands. John Wiley and Sons, LTD, England. 2005.

Weber, J. E, *Analisis Matematik Penerapan Bisnis dan Ekonomi*, University of Arizona, Erlangga, Jakarta. 1999.

Engwerda, Jacob, *Feedback Nash equlibria in the scalar infinite horizon LQ-games*, Tilburg University, the Netherlands.

Wartono, dkk, *Persamaan Diferensial Biasa dan Masalah Nilai Awal*, UIN-Press SUSQA, Pekanbaru. 2009.

Purcell, Edwin J., *Kalkulus 1*. Hamline:Addison-Wesley. 2003.

Bartle, R.G. and Sherbert, D.R., *Introduction to 1. Real Analysis,* John Wiley. 1998.