PELABELAN *VERTEX* AJAIB PADA GRAF SIKLIK DENGAN JUMLAH *VERTEX* GENAP

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

MUKTI HIDAYAH
10554001585

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2011

DAFTAR ISI

PELABELAN *VERTEX* AJAIB PADA GRAF SIKLIK DENGAN JUMLAH *VERTEX* GENAP

MUKTI HIDAYAH
10554001585

Tanggal Sidang : 07 Juli 2011
Tanggal Wisuda : November 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
JL. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas tentang pelabelan *vertex* ajaib pada graf siklik dengan jumlah *vertex* genap. Graf *vertex* ajaib adalah graf siklik yang jika angka *vertex* dan *edge* yang bersisian dijumlahkan, maka akan menghasilkan bilangan yang sama untuk setiap *vertex*. Berdasarkan hasil penelitian, jika jumlah vertex $v = 2n$, maka pemberian label pada masing-masing *vertex* dan *edge*nya tergantung dari n genap atau n ganjil.

Kata Kunci: Graf Siklik, Pelabelan *edge*, Pelabelan *vertex*, *Vertex* Ajaib.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu cabang matematika yang cukup penting untuk dipelajari dan dikembangkan. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 yang membahas permasalahan tentang jembatan Koigsberg Kirkman, kemudian dikembangkan lagi oleh William Rowan Hamilton.

Dalam teori graf banyak permasalahan yang ditemukan diantaranya masalah yang paling terkenal dalam teori graf adalah konjektur empat warna yang dicetuskan oleh Francis Guthrie, seorang murid dari Augustus DeMorgan, Tahun 1850.

Selain itu, masalah yang cukup menarik dalam teori graf adalah pelabelan graf. Gambar graf biasanya menjelaskan suatu lintasan yang diberi label pada *vertex* dan *edge*, yang merupakan himpunan tak kosong $G(V,E)$ dengan V adalah *vertex* dan E adalah *edge*. Suatu graf dikatakan graf terhubung jika setiap pasangan *vertex* yang satu dihubungkan dengan *vertex* yang lain. Graf dikatakan graf siklik jika lintasan berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Graf siklik terbagi menjadi dua yaitu graf siklik dengan jumlah *vertex* ganjil dan graf siklik dengan jumlah *vertex* genap.

Salah satu graf siklik yang mempunyai sifat istemewa adalah graf *vertex* ajaib, yaitu graf siklik yang jika angka *vertex* dan *edge* yang bersisian dijumlahkan, maka akan menghasilkan bilangan yang sama untuk setiap *vertex-vertexnya*. Cunningham, (2004) membahas tentang pelabelan *vertex* ajaib dari suatu graf siklik. Kemudian Sri Handayani, (2007) memaparkan kembali pelabelan *vertex* ajaib pada graf siklik dengan jumlah *vertex* ganjil. Berdasarkan jurnal yang sama, penulis ingin memaparkan tentang pelabelan *vertex* ajaib pada graf siklik dengan jumlah *vertex* genap.

Oleh kerena itu, penulis memberi judul tugas akhir ini, “Pelabelan *Vertex* Ajaib pada Graf Siklik dengan Jumlah *Vertex* Genap”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka dapat dirumuskan permasalahan dalam tugas akhir ini adalah,” Bagaimana cara melabelkan *vertex* dan *edge* suatu graf siklik yang mempunyai jumlah *vertex* genap sehingga diperoleh *vertex* ajaib”.

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan dalam tugas akhir ini dibatasi pada graf siklik dengan jumlah *vertex* genap.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan cara pemberian label pada *vertex* dan *edge* pada graf siklik dengan jumlah *vertex* genap, sehingga diperoleh *vertex* ajaib.

1.5 Sistimatika Penulisan

Adapun sistimatika penulisan tugas akhir ini terdiri dari lima bab yaitu sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Berisi tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang materi penunjang yang memuat teori dasar yang berkaitan dengan penelitian yang akan dibahas seperti materi tentang graf, *walk*, *trail* dan path, graf terhubung, graf siklik, dan pelabelan

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi tentang langkah-langkah dalam menganalisa dan memperoleh hasil dalam penelitian

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi tentang pembahasan dalam pelabelan *vertex* ajaib pada graf siklik dengan jumlah *vertex* genap

BAB V PENUTUP

Bab ini akan dijelaskan mengenai kesimpulan dan saran berdasarkan hasil yang diperoleh pada bagian pembahasan

BAB II

LANDASAN TEORI

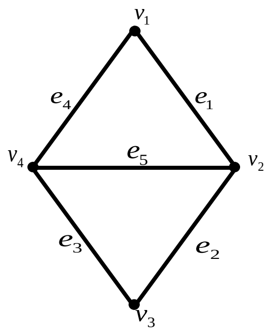
Landasan teori dalam tugas akhir ini akan membahas beberapa pengertian dan istilah dalam graf yang digunakan untuk membahas *vertex* ajaib pada graf siklik dengan jumlah *vertex* genap.

2.1 Graf

Definisi 2.1 (Munir, 2005): Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E), ditulis dengan notasi $G=(V,E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari *vertex-vertex* sedangkan E adalah himpunan *edge* yang menghubungkan sepasang *vertex.*

Contoh 2.1

Perhatikan gambar 2.1 berikut :



Gambar 2.1 Graf

Berdasarkan gambar 2.1 di atas graf tersebut *vertex*nya adalah $v_1, v_2, v_3,$ dan v_4, sedangkan *edge*nya adalah $e_1, e_2, e_3, e_4,$ dan e_5.

2.2 *Walk, Trail* dan *Path*

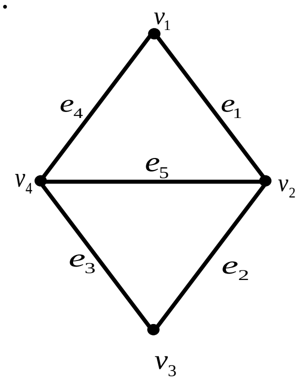
Definisi 2.2 (Samuel, 2004) : *Walk* ialah lintasan dari suatu *vertex* ke v*ertex* yang lain.

Definisi 2.3 (Samuel, 2004) : *Trail* ialah *walk* yang semua *edge*nya berlainan.

Definisi 2.4 (Samuel, 2004) : *Path* ialah *walk* yang semua *vertex*nya berlainan.

Contoh 2.2

Perhatikan gambar 2.2 di bawah :



Gambar 2.2 *Walk, Trail* dan *Path*

Berdasarkan Gambar 2.2. di atas, maka diperoleh :

Walk adalah $v_2, e_1, v_1, e_4, v_4, e_5, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4$

Trail adalah $v_4, e_5, v_2, e_1, v_1, e_4, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2$

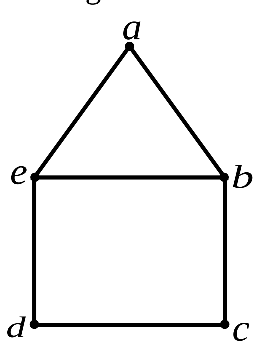
Path adalah $v_1, e_1, v_2, e_5, v_4, e_3, v_3$

2.3 Graf Terhubung

Definisi 2.5 (Jong Jek Siang, 2003) : Dua titik u dan w dalam G dikatakan terhubung jika dan hanya jika ada *walk* dari u dan w, dan graf G dikatakan terhubung jika dan hanya jika setiap dua titik dalam G terhubung.

Contoh 2.3

Gambar di bawah ini adalah graf terhubung



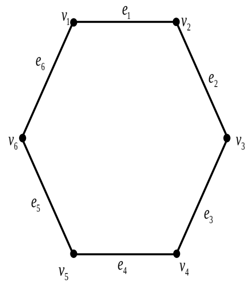
Gambar 2.3 Graf Terhubung

2.4 Graf Siklik

Definisi 2.6 (Munir, 2005) : Graf siklik adalah graf yang lintasannya berawal dan berakhir pada *vertex* yang sama.

Contoh 2.4

Gambar di bawah ini adalah graf siklik



Gambar 2.4 Graf Siklik

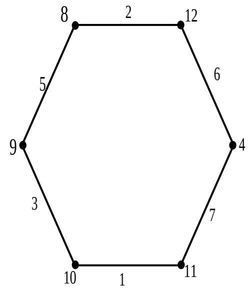
2.5 Pelabelan

Pelabelan merupakan pemberian tanda yang mencakup pemberian tanda pada *edge* atau pemberian tanda pada *vertex.* Untuk menentukan *vertex* ajaib pada graf siklik tidak mungkin setiap angka dicoba satu persatu sebagai angka ajaib. Untuk itu terlebih dahulu ditentukan batas bawah angka ajaib dan batas atas angka ajaib, berdasarkan jumlah *vertex*nya.

Definisi 2.7 (Cunningham, 2004) : Jika sebuah graf G dengan v *vertex* dan e *edge* diberi label 1 hingga $(v+e)$ sedemikian hingga setiap *vertex* dan *edge* yang bersisian (*incident*) dijumlahkan menghasilkan jumlah yang sama, maka G disebut graf *vertex* ajaib.

Contoh 2.7

Gambar di bawah ini menunjukan *vertex* dan *edge* yang diberi label dengan angka. Apabila masing-masing *vertex* pada gambar dijumlahkan dengan *edge* yang bersisian maka menghasilkan angka yang sama yaitu 22.

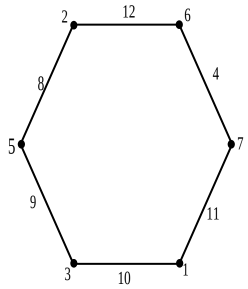


Gambar 2.5 Graf *Vertex* Ajaib

Definisi 2.8 (Cunningham, 2004) : Jika sebuah graf G dengan v *vertex* dan e *edge* ditandai dengan angka 1 sampai $v+e$ sedemikian hingga setiap *edge* dan dua buah *vertex* yang berdekatan (*adjacent*) dijumlahkan menghasilkan angka yang sama, maka G disebut graf *edge* ajaib.

Contoh 2.8

Gambar di bawah ini menunjukan *vertex* dan *edge* yang diberi label dengan angka. Apabila masing-masing *edge* pada gambar dijumlahkan dengan *vertex* yang berdekatan maka menghasilkan angka yang sama yaitu 22.



Gambar 2.8 Graf *Edge* Ajaib

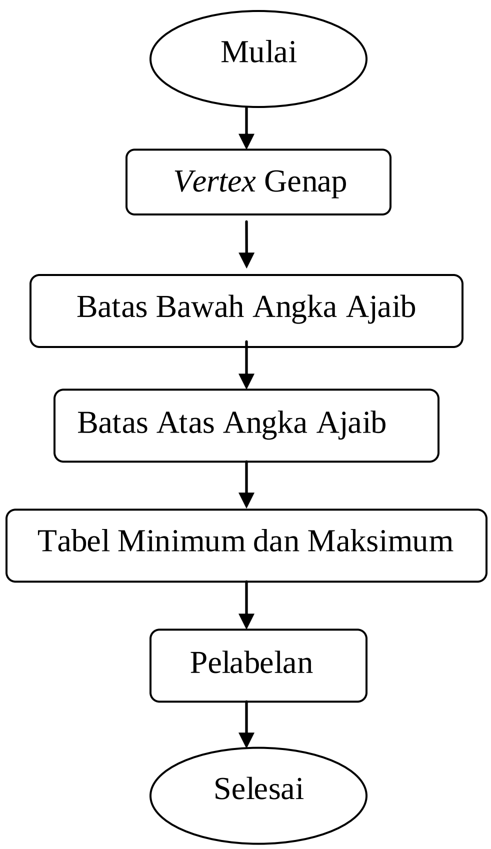
BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang penulis gunakan dalam tugas akhir ini adalah studi literatur terhadap referensi-referensi yang berhubungan dengan teori graf dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Menentukan graf yang jumlah *vertexnya* genap.
2. Menentukan batas bawah angka ajaib pada graf siklik.
3. Menentukan batas atas angka ajaib pada graf siklik.
4. Menentukan tabel minimum dan maksimum angka ajaib pada graf siklik.
5. Pemberian label atau nama pada graf siklik.

Langkah-langkah tersebut di atas dapat digambarkan dalam bentuk *flowchart* seperti di bawah ini :



Gambar 3.1 *Flowchart* Pelabelan *Vertex* Ajaib pada Graf Siklik dengan Jumlah *Vertex* Genap

BAB IV
PEMBAHASAN

Pembahasan pada bab ini akan membahas *vertex* ajaib pada graf siklik berdasarkan teori-teori yang berhubungan dengan permasalahan sebagaimana telah dibahas pada bab sebelumnya.

4.1 Batas Bawah dan Batas Atas Angka Ajaib pada Graf Siklik

Batas bawah atau batas atas angka ajaib pada graf siklik merupakan suatu nilai minimum atau maksimum yang didapat dari penjumlahan suatu *vertex* dengan *edge* yang bersisian. Baik batas bawah atau batas atas angka ajaib dilambangkan dengan k.

Untuk mencari nilai k dapat dihitung dengan menggunakan lemma, teorema, dan akibat yang akan dijelaskan di bawah ini :

Lemma 4.1 (Cunningham, 2004) : Jika G sebuah graf dengan *vertex* ajaib, dengan v *vertex* dan e *edge*, maka :

$$\frac{(v+e)(v+e+1)}{2v}+\frac{E_{sum}}{v}=k$$

dengan

$v =$ banyaknya *vertex*

$e =$ banyaknya *edge*

$k =$ angka ajaib

$E_{sum} =$ jumlah seluruh label angka *edge* pada graf G

$V_{sum} =$ jumlah seluruh label angka *vertex* pada graf G

Bukti :

Diketahui setiap *vertex* bersisian dengan 2 *edge*, dengan masing-masing *edge* akan dihitung 2 kali untuk setiap *vertex*, maka

$$V_{Sum}+2E_{Sum}=vk \tag{4.1}$$

Misalkan v *vertex* dan e *edge* diberi label 1 sampai $v+e$

$$V_{Sum}+E_{Sum}=1+2+...+(v+e)$$

$$=\frac{(v+e)(v+e+1)}{2} \tag{4.2}$$

Substitusikan persamaan (4.2) ke persamaan (4.1), maka diperoleh

$$\frac{(v+e)(v+e+1)}{2}+E_{Sum}=vk$$

Sehingga

$$\frac{(v+e)(v+e+1)}{2v}+\frac{E_{Sum}}{v}=k \ \blacksquare$$

Teorema 4.1 (Cunningham, 2004) : Misalkan G sebuah graf dengan v *vertex* dan e *edge*. Jika G adalah graf *vertex* ajaib, maka angka ajaib k terbatas, yaitu :

$$\frac{e(e+1)+(v+e+1)(v+e)}{2v}\le k\le e+\frac{e(e+1)+(v+e+1)(v+e)}{2v}$$

Bukti :

Berdasarkan Lemma (4.1) diperoleh

$$\frac{(v+e)(v+e+1)}{2}+E_{Sum}=vk$$

Selanjutnya nilai E_{Sum} minimum akan diperoleh apabila $v+e=e$, sehingga

$$E_{Sum}\ge 1+2+3+...+e$$

$$=\frac{e}{2}(1+e)$$

$$E_{Sum}=\frac{e(e+1)}{2} \tag{4.3}$$

Sedangkan E_{Sum} maksimum akan diperoleh apabila $v+e=e+1$, sehingga

$$E_{Sum}\le(v+1)+(v+2)+...+(v+e)$$

$$=\sum_{i=1}^{e}v+i$$

$$=\sum_{i=1}^{e}v+\sum_{i=1}^{e}i$$

$$E_{Sum}=ve+\frac{e(e+1)}{2} \tag{4.4}$$

Selanjutnya

$$\frac{e(e+1)}{2} \leq E_{Sum} \leq ve + \frac{e(e+1)}{2}$$

$$\frac{e(e+1)}{2} \leq vk - \frac{(v+e)(v+e+1)}{2} \leq ve + \frac{e(e+1)}{2}$$

$$\frac{e(e+1)}{2} \leq vk - \frac{(v+e)(v+e+1)}{2} \leq vk \leq ve + \frac{e(e+1)}{2} + \frac{(v+e)(v+e+1)}{2}$$

$$\frac{e(e+1)+(v+e)(v+e+1)}{2v} \leq k \leq e + \frac{e(e+1)+(v+e)(v+e+1)}{2v} \quad \blacksquare$$

Untuk memperoleh batas bawah angka ajaib pada graf siklik dengan jumlah *vertex* genap dapat mengunakan Akibat 4.1 yang akan dijelaskan di bawah ini :

Akibat 4.1 (Cunningham, 2004) : Misalkan G adalah sebuah graf siklik dengan v *vertex* berjumlah genap. Jika G adalah sebuah graf *vertex* ajaib, maka berlaku

$$\frac{5}{2}v + 2 \leq k \tag{4.5}$$

Bukti :

Untuk setiap graf siklik, jika $v = e$ disubstusikan pada salah satu ruas ketidaksamaan Teorema 4.1, maka diperoleh

$$k \geq \frac{v(v+1)+(2v+1)(2v)}{2v}$$

$$= 2v + 1 + \frac{v+1}{2} \tag{4.6}$$

Berdasarkan Persamaan (4.6) maka diperoleh

$$E_{sum} = (1+2+\ldots+v) + \frac{v}{2}$$

$$= \frac{v(v+1)}{2} + \frac{v}{2}$$

Sehingga diperoleh

$$k = 2v + 1 + \frac{E_{sum}}{v}$$

$$\geq 2v + 1 + \frac{\frac{v(v+1)+v}{2}}{v}$$

$$= 2v + 1 + \frac{v+2}{2}$$

$$= \frac{5}{2}v + 2 \quad \blacksquare$$

Untuk memperoleh batas atas angka ajaib pada graf siklik dengan jumlah *vertex* genap digunakan akibat sebagai berikut :

Akibat 4.2 (Cunningham, 2004): Misalkan G adalah graf dengan v *vertex*. Jika G merupakan graf dengan *vertex* ajaib, maka angka ajaib k terbatas yaitu :

$$k \leq \frac{7}{2}v + 1 \tag{4.7}$$

Bukti :

Angka ajaib akan maksimum apabila $v+1$ hingga $2v$ ditempatkan sebagai label *edge*, sehingga

$$E_{Sum} = \sum_{i=1}^{e} v + i$$

Karena $e = v,$ maka

$$E_{Sum} = \sum_{i=1}^{v} v + i$$

$$= \sum_{i=1}^{v} v + \sum_{i=1}^{v} i$$

$$v^2 = \frac{v(v+1)}{2}$$

$$E_{Sum} = \frac{v(3v+1)}{2}$$

Jika ruas kanan di kurangkan dengan $\frac{v}{2}$ maka diperoleh

$$E_{Sum} = \frac{v(3v+1)}{2} - \frac{v}{2}$$

$$= \frac{v(3v)}{2}$$

$$= \frac{3v^2}{2}$$

Sehingga

$$k = 2v + 1 + \frac{E_{Sum}}{v}$$

$$\leq 2v + 1 + \frac{\frac{3v^2}{2}}{v}$$

$$= 2v + 1 + \frac{3v}{2}$$

$$= \frac{7}{2}v + 1 \quad \blacksquare$$

4.2 Pelabelan *Vertex* Ajaib pada Graf Siklik dengan Jumlah *Vertex* Genap

Pelabelan untuk *vertex* genap, dengan $v = 2n$ tergantung dari n ganjil atau n genap.

4.2.1 Angka Ajaib Minimum

Jika n ganjil maka digunakan rumus e_i sebagai berikut :

$$e_i = \begin{cases} \frac{i+1}{2} & i = 1,3,\ldots, n, \\ 3n & i = 2, \\ \frac{2n+i+2}{2} & i = 4,6,\ldots, n-1 \\ \frac{n+3}{2} & i = n+1 \\ \frac{2n+i}{2} & i = n+3, n+5,\ldots, 2n-2 \\ \frac{i+3}{2} & i = n+2, n+4,\ldots,2n-1 \\ n+2 & i = 2n \end{cases}$$

jika n genap, maka digunakan rumus e_i sebagai berikut :

$$e_i = \begin{cases} \dfrac{i+1}{2} & i = 1,3,\ldots,\ n+1 \\ 3n & i = 2 \\ \dfrac{2n+i}{2} & i = 4,6,\ldots,\ n \\ \dfrac{2n+i-1}{2} & i = n+3, n+5,\ldots,\ 2n-1 \\ \dfrac{i+2}{2} & i = n+2, n+4,\ldots,\ 2n \end{cases}$$

Berikut ini akan diberikan contoh-contoh pelabelan *vertex* ajaib pada graf siklik dengan jumlah *vertex* genap.

Contoh 4.1

Diberikan G graf siklik dengan jumlah *vertex* $v = 6$, maka batas bawah angka ajaib adalah

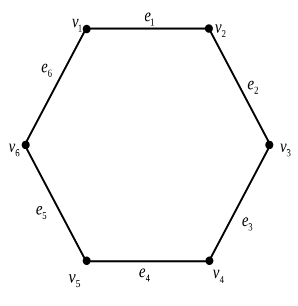
$$k = \frac{5}{3}v + 2$$

$$k = \frac{5}{2}(6) + 2$$

$$k = 17$$

Sementara masing-masing *edge* dapat ditentukan sebagai berikut :

$v = 2n$ dan $6 = 2n$, jadi $n = 3$



Gambar 4.1 Graf Siklik dengan Jumlah *Vertex* 6

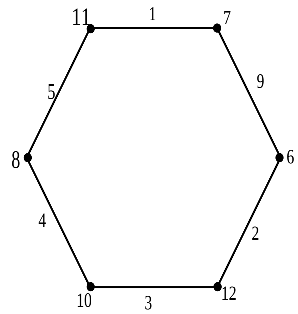
Berdasarkan Gambar 4.1, untuk pemberian label pada *vertex* dan *edge* pada graf siklik dengan jumlah *vertex* 6 dan *edge* 6 dapat dilihat pada tabel di bawah ini :

Tabel 4.1 Pelabelan Minimum, *Vertex* 6

Dimulai dari	Label *Vertex*	Label *Edge* Kiri	Label *Edge* Kanan
Vertex 1	$v_1 = k - e_6 + e_1$ $v_1 = 17 - 5 + 1$ $v_1 = 17 - 6$ $v_1 = 11$	$n + 2 \quad i = 2n$ $= 3 + 2$ $e_6 = 5$	$\frac{i+1}{2} \quad i = 1$ $\frac{1+1}{2}$ $= \frac{2}{2}$ $e_1 = 1$
Vertex 2	$v_2 = k - e_1 + e_2$ $= 17 - 1 + 9$ $= 17 - 10$ $v_2 = 7$	$\frac{i+1}{2} \quad i = 1$ $\frac{1+1}{2}$ $= \frac{2}{2}$ $e_1 = 1$	$3n \quad i = 2$ 3.3 $e_2 = 9$
Vertex 3	$v_3 = k - e_2 + e_3$ $= 17 - 9 + 2$ $= 17 - 11$ $v_3 = 6$	$3n \quad i = 2$ $= 3.3$ $e_2 = 9$	$\frac{i+1}{2} \quad i = 3$ $\frac{3+1}{2}$ $= \frac{4}{2}$ $e_3 = 2$
Vertex 4	$v_4 = k - e_3 + e_4$ $= 17 - 2 + 3$ $= 17 - 5$ $v_4 = 12$	$\frac{i+1}{2} \quad i = 3$ $\frac{3+1}{2}$ $= \frac{4}{2}$ $e_3 = 2$	$\frac{n+3}{2} \quad i = n + 1$ $= \frac{3+3}{2}$ $= \frac{6}{2}$ $e_4 = 3$
Vertex 5	$v_5 = k - e_4 + e_5$ $= 17 - 3 + 4$ $= 17 - 7$ $v_5 = 10$	$\frac{n+3}{2} \quad i = n + 1$ $= \frac{3+3}{2}$ $= \frac{6}{2}$ $e_4 = 3$	$\frac{i+3}{2} \quad i = 5$ $= \frac{5+3}{2}$ $= \frac{8}{2}$ $e_5 = 4$

Vertex 6	$v_6 = k - e_5 + e_6$ $= 17 - 4 + 5$ $= 17 - 9$ $v_6 = 8$	$\frac{i+3}{2} \quad i = 5$ $= \frac{5+3}{2}$ $= \frac{8}{2}$ $e_5 = 4$	$n+2 \quad i = 2n$ $= 3+2$ $e_6 = 5$

Berdasarkan Tabel 4.1 untuk pemberian label pada *vertex* dan *edge* dengan menggunakan tabel minimum, dengan batas bawah angka ajaib 17 dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 4.2 Graf Siklik dengan Jumlah *Vertex* 6 dan Angka Ajaib 17

Contoh 4.2

Diberikan G graf siklik dengan jumlah *vertex* $v = 8$, maka batas bawah angka ajaib adalah

$$k = \frac{5}{2}v + 2$$

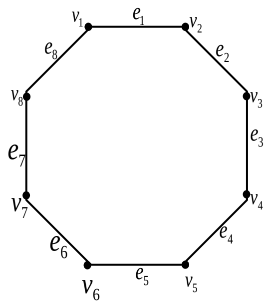
$$k = \frac{5}{2}(8) + 2$$

$$k = 20 + 2$$

$$k = 22$$

Sementara masing-masing *edge* dapat ditentukan sebagai berikut :

$v = 2n$, dan $8 = 2n$, jadi $n = 4$



Gambar 4.3 Graf Siklik dengan Jumlah *Vertex* 8

Berdasarkan Gambar 4.3, untuk pemberian label pada *vertex* dan *edge* pada graf siklik dengan jumlah *vertex* 8 dan *edge* 8 dapat dilihat pada tabel di bawah ini :

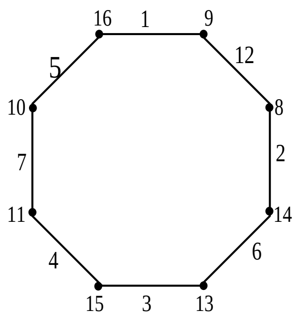
Tabel 4.2 Pelabelan Minimum *Vertex* 8

Dimulai dari	Label *vertex*	Label *Edge* Kiri	Label *Edge* Kanan
Vertex 1	$v_1 = k - e_8 + e_1$ $v_1 = 22 - 5 + 1$ $v_1 = 22 - 6$ $v_1 = 16$	$\frac{i+2}{2}$ $= \frac{8+2}{2}$ $= \frac{10}{2}$ $e_8 = 5$	$\frac{i+1}{2} \quad i = 1$ $\frac{1+1}{2}$ $= \frac{2}{2}$ $e_1 = 1$
Vertex 2	$v_2 = k - e_1 + e_2$ $= 22 - 1 + 12$ $= 22 - 13$ $v_2 = 9$	$\frac{i+1}{2} \quad i = 1$ $\frac{1+1}{2}$ $= \frac{2}{2}$ $e_1 = 1$	$3n \quad i = 2$ 3.4 $= 12$ $e_2 = 12$

Vertex 3	$v_3 = k - e_2 + e_3$ $= 22 - 12 + 2$ $= 22 - 14$ $v_3 = 8$	$3n \quad i = 2$ 3.4 $= 12$ $e_2 = 12$	$\frac{i+1}{2} \quad i = 3$ $\frac{3+1}{2}$ $= \frac{4}{2}$ $e_3 = 2$
Vertex 4	$v_4 = k - e_3 + e_4$ $= 22 - 2 + 6$ $= 22 - 8$ $v_4 = 14$	$\frac{i+1}{2} \quad i = 1$ $\frac{3+1}{2}$ $= \frac{4}{2}$ $e_3 = 2$	$\frac{2n+i}{2} \quad i = 4$ $\frac{2.4+4}{2}$ $= \frac{8+4}{2}$ $= \frac{12}{2}$ $e_4 = 6$
Vertex 5	$v_5 = k - e_4 + e_5$ $= 22 - 6 + 3$ $= 22 - 9$ $v_5 = 13$	$\frac{2n+i}{2} \quad i = 4$ $\frac{2.4+4}{2}$ $= \frac{8+4}{2}$ $= \frac{12}{2}$ $e_4 = 6$	$\frac{i+1}{2} \quad i = 5$ $\frac{5+1}{2}$ $= \frac{6}{2}$ $e_5 = 3$
Vertex 6	$v_6 = k - e_5 + e_6$ $= 22 - 3 + 4$ $= 22 - 7$ $v_6 = 15$	$\frac{i+1}{2} \quad i = 5$ $\frac{5+1}{2}$ $= \frac{6}{2}$ $e_5 = 3$	$\frac{i+2}{2} \quad i = 6$ $\frac{6+2}{2}$ $= \frac{8}{2}$ $e_6 = 4$

Vertex 7	$v_7 = k - e_6 + e_7$ $= 22 - 4 + 7$ $= 22 - 11$ $v_7 = 11$	$\frac{i+2}{2}$ $i = 6$ $\frac{6+2}{2}$ $= \frac{8}{2}$ $e_6 = 4$	$\frac{2n+i-1}{2}$ $= \frac{2.4+7-1}{2}$ $= \frac{8+7-1}{2}$ $= \frac{14}{2}$ $e_7 = 7$
Vertex 8	$v_8 = k - e_7 + e_8$ $= 22 - 7 + 5$ $= 22 - 12$ $v_8 = 10$	$\frac{2n+i-1}{2}$ $= \frac{2.4+7-1}{2}$ $= \frac{8+7-1}{2}$ $= \frac{14}{2}$ $e_7 = 7$	$\frac{i+2}{2}$ $= \frac{8+2}{2}$ $= \frac{10}{2}$ $e_8 = 5$

Berdasarkan Tabel 4.2 untuk pemberian label pada *vertex* dan *edge* dengan menggunakan tabel minimum, dengan batas bawah angka ajaib 22 dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 4.4 Graf Siklik dengan Jumlah *Vertex* 8 dan Angka Ajaib 22

4.2.2 Angka Ajaib Maksimum

Jika n ganjil maka digunakan rumus e_i sebagai berikut :

$$e_i = \begin{cases} 2v - \dfrac{i+1}{2} + 1 & i = 1,3,\ldots,\, n \\ 2v - 3n + 1 & i = 2 \\ 2v - \dfrac{2n+i+2}{2} + 1 & i = 4,6,\ldots,\, n-1 \\ 2v - \dfrac{n+3}{2} + 1 & i = n+1 \\ 2v - \dfrac{2n+i+}{2} + 1 & i = n+3, n+5,\ldots,\, 2n-2 \\ 2v - \dfrac{i+3}{2} + 1 & i = n+2, n+4,\ldots, 2n-1 \\ 2v - (n+2) + 1 & i = 2n \end{cases}$$

Jika n genap, maka digunakan rumus e_i sebagai berikut :

$$e_i = \begin{cases} 2v - \dfrac{i+1}{2} + 1 & i = 1,3,\ldots,\, n+1 \\ 2v - 3n + 1 & i = 2 \\ 2v - \dfrac{2n+i}{2} + 1 & i = 4,6,\ldots,\, n \\ 2v - \dfrac{2n+i-1}{2} + 1 & i = n+3, n+5,\ldots,\, 2n-1 \\ 2v - \dfrac{i+2}{2} + 1 & i = n+2, n+4,\ldots,\, 2n \end{cases}$$

Berikut ini akan diberikan contoh-contoh pelabelan *vertex* ajaib pada graf siklik dengan jumlah *vertex* genap.

Contoh 4.3

Diberikan G graf siklik dengan jumlah *vertex* $v = 6$ maka batas atas angka ajaib adalah

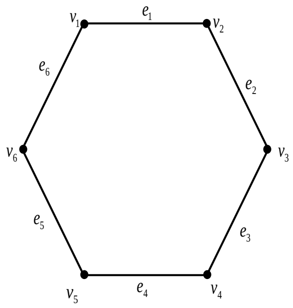
$$k = \frac{7}{2}v + 1$$

$$k = \frac{7}{2}(6) + 1$$

$$k = 22$$

Sementara masing-masing *edge* dapat ditentukan sebagai berikut :

$v = 2n$, dan $6 = 2n$, jadi $n = 3$



Gambar 4.5 Graf Siklik dengan Jumlah *Vertex* 6

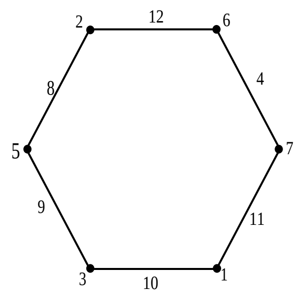
Berdasarkan Gambar 4.5, untuk pemberian label pada *vertex* dan *edge* pada graf siklik dengan jumlah *vertex* 6 dan *edge* 6 dapat dilihat pada tabel di bawah ini :

Tabel 4.3 Pelabelan Maksimum, *Vertex* 6

Dimulai dari	Label *Vertex*	Label *Edge* Kiri	Label *Edge* Kanan
Vertex 1	$v_1 = k - e_6 + e_1$ $v_1 = 22 - 8 + 12$ $v_1 = 22 - 20$ $v_1 = 2$	$2v - (n+2) + 1$ $2.6 - (3+2) + 1$ $= 12 - 5 + 1$ $e_6 = 8$	$2v - \frac{i+1}{2} + 1$ $2.6 - \frac{1+1}{2} + 1$ $12 - 1 + 1$ $= 12$ $e_1 = 12$
Vertex 2	$v_2 = k - e_1 + e_2$ $= 22 - 12 + 4$ $= 22 - 16$ $v_2 = 6$	$2v - \frac{i+1}{2} + 1$ $2.6 - \frac{1+1}{2} + 1$ $12 - 1 + 1$ $= 12$ $e_1 = 12$	$2v - 3n + 1$ $2.6 - 3.3 + 1$ $12 - 9 + 1$ $= 4$ $e_2 = 4$

Vertex 3	$v_3 = k - e_2 - e_3$ $= 22 - 4 + 11$ $= 22 - 15$ $v_3 = 7$	$2v - 3n + 1$ $2.6 - 3.3 + 1$ $12 - 9 + 1$ $= 4$ $e_2 = 4$	$2v - \frac{i+1}{2} + 1 \quad i = 3$ $2.6 - \frac{3+1}{2} + 1$ $12 - 2 + 1$ $= 11$ $e_3 = 11$
Vertex 4	$v_4 = k - e_3 + e_4$ $= 22 - 11 + 10$ $= 22 - 21$ $v_4 = 1$	$2v - \frac{i+1}{2} + 1 \quad i = 3$ $2.6 - \frac{3+1}{2} + 1$ $12 - 2 + 1$ $= 11$ $e_3 = 11$	$2v - \frac{n+3}{2} + 1$ $2.6 - \frac{3+3}{2} + 1$ $= 12 - 3 + 1$ $e_4 = 10$
Vertex 5	$v_5 = k - e_4 + e_5$ $= 22 - 10 + 9$ $= 22 - 19$ $v_5 = 3$	$2v - \frac{n+3}{2} + 1$ $2.6 - \frac{3+3}{2} + 1$ $= 12 - 3 + 1$ $e_4 = 10$	$2v - \frac{i+3}{2} + 1$ $2.6 - \frac{5+3}{2} + 1$ $= 12 - 4 + 1$ $e_5 = 9$
Vertex 6	$v_6 = k - e_5 + e_6$ $= 22 - 9 + 8$ $= 22 - 17$ $v_6 = 5$	$2v - \frac{i+3}{2} + 1$ $2.6 - \frac{5+3}{2} + 1$ $= 12 - 4 + 1$ $e_5 = 9$	$2v - (n+2) + 1$ $2.6 - (3+2) + 1$ $= 12 - 5 + 1$ $e_6 = 8$

Berdasarkan Tabel 4.3 untuk pemberian label pada *vertex* dan *edge* dengan menggunakan tabel maksimum, dengan menggunakan batas atas angka ajaib 22 dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 4.6 Graf Siklik Jumlah *Vertex* 6 dan Angka Ajaib 22

Contoh 4.4

Diberikan G graf siklik dengan jumlah *vertex* $v = 8$, maka batas atas angka ajaibnya adalah

$$k = \frac{7}{2}v + 1$$

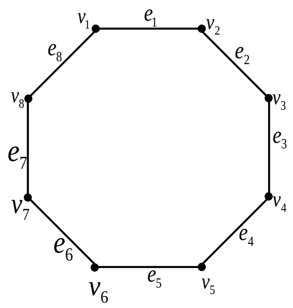
$$k = \frac{7}{2}(8) + 1$$

$$k = 28 + 1$$

$$k = 29$$

Sementara masing-masing *edge* dapat ditentukan sebagai berikut :

$v = 2n$, dan $8 = 2n$, maka $n = 4$



Gambar 4.7 Graf Siklik dengan Jumlah *Vertex* 8

Berdasarkan Gambar 4.7, untuk pemberian label pada *vertex* dan *edge* pada graf siklik dengan jumlah *vertex* 8 dan *edge* 8 dapat dilihat pada tabel di bawah ini :

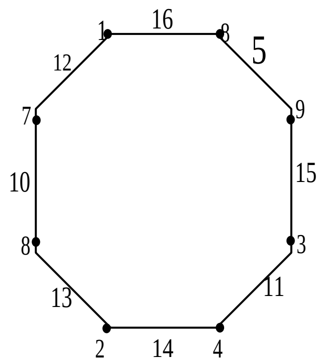
Tabel 4.4 Pelabelan Maksimum, *Vertex* 8

Dimulai dari	Label *Vertex*	Label *Edge* Kiri	Label *Edge* kanan
Vertex 1	$v_1 = k - e_8 + e_1$ $v_1 = 29 - 12 + 16$ $v_1 = 1$	$2v - \frac{i+2}{2} + 1$ $= 2.8 - \frac{8+2}{2} + 1$ $= 16 - 5 + 1$ $= 12$ $e_8 = 12$	$2v - \frac{i+1}{2} + 1$ $2.8 - \frac{1+1}{2} + 1$ $= 16 - 1 + 1$ $e_1 = 16$
Vertex 2	$v_2 = k - e_1 + e_2$ $= 29 - 16 + 5$ $= 29 - 21$ $v_2 = 8$	$2v - \frac{i+1}{2} + 1$ $2.8 - \frac{1+1}{2} + 1$ $= 16 - 1 + 1$ $e_1 = 16$	$2v - 3n + 1 \;\; i = 2$ $2.8 - 3.4 + 1$ $= 16 - 12 + 1$ $= 5$ $e_2 = 5$
Vertex 3	$v_3 = k - e_2 + e_3$ $= 29 - 5 + 15$ $= 29 - 20$ $v_3 = 9$	$2v - 3n + 1 \;\; i = 2$ $2.8 - 3.4 + 1$ $= 16 - 12 + 1$ $= 5$ $e_2 = 5$	$2v - \frac{i+1}{2} + 1$ $= 2.8 - \frac{3+1}{2} + 1$ $= 16 - 2 + 1$ $= 15$ $e_3 = 15$
Vertex 4	$v_4 = k - e_3 + e_4$ $= 29 - 15 + 11$ $= 29 - 26$ $v_4 = 3$	$2v - \frac{i+1}{2} + 1$ $= 2.8 - \frac{3+1}{2} + 1$ $= 16 - 2 + 1$ $= 15$ $e_3 = 15$	$2v - \frac{2n+i}{2} + 1$ $2.8 - \frac{2.4+4}{2} + 1$ $= 16 - \frac{8+4}{2} + 1$ $= 16 - 6 + 1$ $= 11$ $e_4 = 11$

Vertex 5	$v_5 = k - e_4 + e_5$ $= 29 - 11 + 14$ $= 29 - 25$ $v_5 = 4$	$2v - \frac{2n+i}{2} + 1$ $2.8 - \frac{2.4+4}{2} + 1$ $= 16 - \frac{8+4}{2} + 1$ $= 16 - 6 + 1$ $= 11$ $e_4 = 11$	$2v - \frac{i+1}{2} + 2$ $= 2.8 - \frac{5+1}{2} + 1$ $= 16 - \frac{6}{2} + 1$ $= 16 - 3 + 1$ $= 14$ $e_5 = 14$
Vertex 6	$v_6 = k - e_5 + e_6$ $= 29 - 14 + 13$ $= 29 - 27$ $v_6 = 2$	$2v - \frac{i+1}{2} + 2$ $= 2.8 - \frac{5+1}{2} + 1$ $= 16 - \frac{6}{2} + 1$ $= 16 - 3 + 1$ $= 14$ $e_5 = 14$	$2v - \frac{i+2}{2} + 1$ $= 2.8 - \frac{6+2}{2} + 1$ $= 16 - \frac{8}{2} + 1$ $= 16 - 4 + 1$ $= 13$ $e_6 = 13$
Vertex 7	$v_7 = k - e_6 + e_7$ $= 29 - 13 + 10$ $= 29 - 23$ $v_7 = 6$	$2v - \frac{i+2}{2} + 1$ $= 2.8 - \frac{6+2}{2} + 1$ $= 16 - \frac{8}{2} + 1$ $= 16 - 4 + 1$ $= 13$ $e_6 = 13$	$2v - \frac{2n+i-1}{2} + 1$ $= 2.8 - \frac{2.4+7-1}{2} + 1$ $= 16 - \frac{8+7-1}{2} + 1$ $= 16 - 7 + 1$ $= 10$ $e_7 = 10$

Vertex 8	$v_8 = k - e_7 + e_8$ $= 29 - 10 + 12$ $= 29 - 22$ $v_8 = 7$	$2v - \frac{2n + i - 1}{2} + 1$ $= 2.8 - \frac{2.4 + 7 - 1}{2} + 1$ $= 16 - \frac{8 + 7 - 1}{2} + 1$ $= 16 - 7 + 1$ $= 10$ $e_7 = 10$	$2v - \frac{i + 2}{2} + 1$ $= 2.8 - \frac{8 + 2}{2} + 1$ $= 16 - 5 + 1$ $= 12$ $e_8 = 12$

Berdasarkan Tabel 4.4 untuk pemberian label pada *vertex* dan *edge* dengan menggunakan tabel maksimum, dengan batas atas angka ajaib 29 dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 4.8 Graf Siklik dengan Jumlah *Vertex* 8 dan Angka Ajaib 29

BAB V

PENUTUP

Mengakhiri penulisan Tugas Akhir ini, penulis dapat menarik kesimpulan dan saran berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan pada bab-bab sebelumnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada bab IV, maka dapat diambil kesimpulan yaitu:

1. Untuk mencari *vertex* ajaib pada graf siklik, maka ditentukan terlebih dahulu batas bawah angka ajaib $\frac{5}{2}v + 2 \leq k$, dan batas atas angka ajaib $k \leq \frac{7}{2}v + 1$.
2. Berdasarkan hubungan $v = 2n$, maka pemberian label pada masing-masing *vertex* dan *edge*nya tergantung dari n genap ataupun n ganjil.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil tugas akhir ini penulis hanya membahas pelabelan *vertex* ajaib pada graf siklik dengan jumlah *vertex*nya genap, tanpa memperhatikan pemberian lebel pada masing-masing *edge* dengan angka genap atau ganjil. Untuk selanjutnya bagi para pembaca yang tertarik, dapat menggembangkan *vertex* ajaib pada graf siklik dengan jumlah *vertex*nya genap dengan memperhatikan pemberian angka pada *edge*nya ganjil saja atau genap saja.

DAFTAR PUSTAKA

Cunningcham, Daisy. *Vertex*-magic. *Electronic Journal of Undergraduate Mathematic.* Furman University. 2004

Siang Jek Jong, *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer.* . 2004

Harary, Frank. *Graph Theory.* Addison- Wesley Publishing Company New York. 1994
.

Kenneth H. Rosen. *Graph Theory and Its Applications New York.* 1994

Liu, C, L. *Dasar-Dasar Matematika Diskrit* . Gramedia Pustaka Umum Jakarta 1995

Munir, Rinaldi. *Matematika Diskrit.* Bandung Informasi. 2005

Sri, Handayani. *Vertex* Ajaib pada Graf Siklik Yang Banyak *Vertex* Ganji (Skripsi)Pekanbaru: *FMIPA UNRI 2007.*

Wibisono , Samuel. *Matematika Diskrit,* Graha Ilmu. 2004