PENYELESAIAN PERSAMAAN PARABOLIK NONLINIER DENGAN MENGGUNAKAN MODIFIKASI METODE ITERASI VARIASI

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Jurusan Matematika

Oleh :

MUHAMMAD YUNUS
10654004487

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2011

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARABOLIK NONLINIER DENGAN MENGGUNAKAN MODIFIKASI METODE ITERASI VARIASI

MUHAMMAD YUNUS
10654004487

Tanggal sidang : 04 Juli 2011
Periode Wisuda : November 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl.Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) + g(x,t)$ menggunakan modifikasi metode iterasi variasi berdasarkan syarat batas $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$. Modifikasi metode iterasi variasi merupakan metode semi analitik yang digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan diferensial parsial nonlinier. Berdasarkan perhitungan yang diperoleh dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi ini menghasilkan deret dan penyelesaian akurasi yang cukup akurat untuk persamaan homogen dan untuk persamaan nonhomogen menghasilkan perhitungan yang kurang bagus.

Kata kunci : Modifikasi metode iterasi variasi, Persamaan diferensial parabolik nonlinier.

DAFTAR ISI

Halaman

BAB II
LANDASAN TEORI

Landasan teori yang akan digunakan dalam pembahasan skripsi ini adalah sebagai berikut:

2. 1. Diferensial Parsial.

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang di dalamnya memuat suku-suku turunan parsial, yang dalam matematika merupakan fungsi dari beberapa variabel bebas.

Persamaan diferensial parsial digunakan untuk melakukan formulasi dan menyelesaiakan permasalahan yang melibatkan fungsi-fungsi yang tidak diketahui, yang dibentuk oleh beberapa variabel.

Definisi (*Ioninnis P Stavroulakis, 2004*) Diberikan $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah suatu fungsi pada *n* dengan variabel bebas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang mempunyai variabel bebas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dan variabel tak bebas yang dikenal dengan fungsi u dan mempunyai beberapa orde turunan parsial, dengan bentuk persamaan yaitu :

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, , u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_2x_2}, \ldots, u_{x_ix_j}\right) = 0 \qquad (2.1)$$

dengan F adalah fungsi yang diberikan dan $u_{x_j} = \partial u / \partial x_j, u_{x_ix_j} = \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j, i, j = 1, 2, \ldots, n$ adalah turunan parsial pada *u*. Orde pada persamaan diferensial parsial adalah turunan yang paling tinggi pada sebuah persamaan.

Formulasi matematika dari kebanyakan permasalahan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi dapat dipresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas yang biasanya adalah waktu dan jarak (ruang). Bentuk umum persamaan diferensial parsial order 2 dan dua dimensi adalah :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) dikatakan persamaan diferensial linier jika nilai *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, dan *G* adalah konstanta atau suatu fungsi lain dan dikatakan persamaan diferensial nonlinier jika *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, dan *G* adalah suatu fungsi integral dari fungsi diferensial yang ada pada persamaan tersebut. Persamaan diferensial parsial dapat dibedakan menjadi 3 tipe dasar, yaitu:

a) Persamaan (2.2) disebut persamaan parabolik jika $B^2 - 4AC = 0$.

Biasanya merupakan persamaan yang tergantung pada waktu (tidak permanen) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi awal dan batas. Persamaan parabolik paling sederhana adalah :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

Penyelesaian dari persamaan diatas adalah mencari temperatur T untuk nilai jarak x pada setiap waktu t.

b) Persamaan (2.2) disebut persamaan eliptik jika $B^2 - 4AC < 0$.

Biasanya menghubungkan dengan masalah kesetimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung waktu) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas keliling daerah tinjauan. Seperti aliran air tanah dibawah bendungan dan karena adanya pemompaan, defleksi plat akibat pembebanan, dsb. Persamaan eliptik yang paling sederhana yaitu:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.4}$$

c) Persamaan (2.2) disebut persamaan hiperbolik jika $B^2 - 4AC > 0$.

Biasanya berhubungan dengan getaran atau permasalahan dimana terjadi diskontinue dalam waktu, seperti gelombang kejut yang terjadi diskontinue dalam kecepatapan, tekanan dan rapat massa. Persamaaan hiperbolik yang sederhana yaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.5}$$

dengan u adalah perpindahan vertikal (fluktuasi) pada jarak x dari ujung tali yang bergetar yang mempunyai panjang L sesudah waktu t.

Secara jelas dapat dilihat bahwa solusi dari persoalan persamaan diferensial parsial tidak hanya ditentukan oleh persamaan tersebut secara sendiri, tetapi diperlukan nilai batas (*boundary)* atau juga nilai awal (*initial value*). Syarat yang diperlukan oleh suatu persoalan adalah:

i. Penyelesaian harus ada.
ii. Penyelesaian tersebut harus unik/khusus.
iii. Penyelesaian tersebut harus secara kontinu bergantung pada nilai awal dan nilai batas.

2. 2. Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial ini memiliki beberapa kelompok, yaitu:

a) Berdasarkan Orde.

Orde suatu persamaan diferensial adalah orde turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial tersebut.

Contoh:

1) $u_t = u_x$, orde satu
2) $u_t = uu_{xxx} + \sin x$, orde tiga
3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, orde satu
4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x + y - uz = 0$, orde dua

Dari contoh diatas disebut orde satu karena orde turunan tertingginya bernilai satu dan orde dua karena orde turunan tertingginya bernilai dua

b) Berdasarkan Jumlah Variabel

Jumlah variabel ditentukan dengan cara melihat jumlah fungsi diferensial yang ada pada persamaan tersebut.

Contoh:

i. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 u_{xx}$, memiliki 2 variabel bebas, yaitu t, dan x

ii. $\frac{\partial u}{\partial t} = u_{yx} + \frac{1}{r} u_x + \frac{1}{r^2} u(x)$ memiliki 3 variabel yaitu $x, y,$ dan t

iii. $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \right)$, memiliki 4 variabel bebas, yaitu *t*, *x*, *y*, dan *z*.

c) Berdasarkan Linear dan Nonlinear

Pada persamaan diferensial ini dapat dilihat secara langsung bahwa suatu persamaan tersebut linear atau nonlinear. Dengan melihat koefisien pada fungsi turunan, jika koefisiennya konstanta atau suatu fungsi lain maka persamaan itu disebut persamaan diferensial linear, sedangkan jika koefisiennya suatu fungsi integral dari fungsi diferensial yang ada pada persamaan tersebut maka persamaan itu disebut persamaan diferensial nonlinear.

2.3 Persamaan Parabolik

Persamaan parabolik merupakan persamaan yang bergantung pada waktu yang penyelesaiannya memerlukan syarat batas dan kondisi awal. Persamaan parabolik yang paling sederhana yaitu perambatan panas atau daya aliran panas pada suhu tertentu.

2.3.1 Teknik Variabel Terpisah

Beberapa jenis persamaan diferensial parsial diselesaikan dengan teknik variabel terpisah. Pertama dengan mempertimbangkan solusi *u(x,t)*= 0 pada persamaan diferensial sebagai kombinasi linier tak terbatas fungsi komponen sederhana $u_n(x,t), n = 1, 2...,$ juga memenuhi persamaan dan kondisi batas tertentu.

Untuk menentukan fungsi komponen sederhana $u_n(x,t)$, diperoleh dengan mengasumsikan bentuk variabel terpisah.

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) \tag{2.6}$$

Mengsubsitusikan fungsi ke dalam persamaan diferensial parsial dan menggunakan syarat batas yang mengarah pada kedua persamaan diferensial biasa untuk fungsi yang tidak diketahui.

$$X_n(x),\ T_n(t) \tag{2.7}$$

2.3.2 Penerapan Metode Variabel Terpisah Pada Persamaan Panas

Pemodelan persamaan panas dalam sepotong kawat ketika ujungnya disimpan dalam temperatur nol. Misalkan sebuah kabel dengan panjang *L*, ditempatkan pada sumbu *X* dengan ujung kiri $x=0$ dan ujung kanan $x=L$. Jika $u(x,t)$ merupakan suhu kabel, dan u juga bergantung terhadap waktu t dan posisi x.

Untuk mengembangkan model aliran panas tersebut, pertimbangkan elemen volum kecil V kabel yang terletak, pada x dan $x+\Delta x$ dan suhu pada bidang A sebesar $u(x,t)$ dan pada bidang B sebesar $u(x+\Delta x,t)$. Beberapa prinsip-prinsip fisika digunakan untuk menggambarkan aliran panas sebagai berikut:

1. Konduksi panas

   Laju aliran panas (banyaknya panas yang mengalir setiap unit waktu melalui bidang A_0 adalah berbanding terhadap $\partial u/\partial t$ atau perubahan suhu pada bidang A). Perbandingan konstanta k disebut konduktifitas termal material.
2. Arah aliran panas

   Arah aliran panas selalu dari titik bersuhu tinggi ke titik yang bersuhu rendah.
3. Spesifikasi kapasitas panas

   Banyaknya panas yang dibutuhkan untuk menaikan suhu dari suatu kabel yang bermasa m oleh sejumlah Δu adalah $cm\Delta u$, dengan konstanta c adalah spesifikasi kapasitas panas *material*.

Dimisalkan bahwa H merupakan jumlah panas yang mengalir dari titik $x=0$ ke titik $x=L$ melalui permukaan A selama interval waktu Δt, maka kondisi panas menjadi,

$$H(x) = -ka\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

dengan a adalah daerah bagian yang melintang dari kabel, dan tanda negatif menunjukkan arah perambatan panas ke suhu yang lebih rendah.

Perubahan panas ΔH pada volume V adalah banyaknya panas yang masuk pada ujung A dikurangi dengan banyaknya panas yang melewati B, atau ditulis,

$$\Delta H = H(x) - H(x + \Delta x)$$

$$\Delta H = ka\Delta t\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right] \tag{2.8}$$

Berdasarkan prinsip kerja ketiga, jika diasumsikan bahwa perubahan suhu pada volume V pada dasarnya adalah sama dengan perubahan suhu pada sumbu x, yaitu sebesar,

$$\Delta u = u(x, t + \Delta t) - u(x, t)$$

dan masa volume V kabel sebesar $a\rho\Delta x$, yang mana ρ adalah masa jenis kabel, maka

$$\Delta H = c\rho a\Delta x\left[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\right] \tag{2.9}$$

Kesamaan perubahan panas pada persamaan (2.7) dan (2.8) memberikan,

$$ka\Delta t\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right] = c\rho a\Delta x\left[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\right]$$

Pembagian dengan Δx dan Δt pada kedua ruas, diperoleh,

$$k\frac{\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right]}{\Delta x} = c\rho\frac{\left[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\right]}{\Delta t}$$

kemudian ambil limit untuk $\Delta x \to 0$ dan $\Delta t \to 0$, maka diperoleh,

$$k\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0}}\frac{\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right]}{\Delta x} = c\rho\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0}}\frac{\left[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\right]}{\Delta t}$$

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2(x, t)} = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x}(x, t)$$

dimana konstanta positif $\alpha = k/c\rho$ adalah difusitas material, dan persamaan (2.9) disebut persamaan aliran panas satu dimensi.

Selanjutnya, akan dipertahankan suhu pada kedua ujung-ujung kabel berada pada suhu 0^0 C. Untuk diperlukan syarat batas,

$u(0,t) = 0$, dan $u(L,t) = 0$, untuk $t > 0$ (2.11)

Selain diperlukan syarat batas, maka diperlukan juga distribusi temperatur awal $f(x)$, yaitu:

$$u(x,0) = f(x) \qquad (2.12)$$

yang disebut juga dengan syarat awal.

Menggabungkan persamaan aliran panas (2.9), syarat batas (2.10) dan syarat awal (2.10), maka diperoleh model aliran panas kabel yang mana ujung-ujung kabel berada pada suhu konstan sebesar 0^0 C,

$$u_t = \alpha u_{xx} \qquad 0 < x < L, t > 0 \qquad (2.13)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \qquad (2.14)$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (2.14)$$

dengan menggunakan metode variabel terpisah dalam bentuk,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Subsitusikan persamaan diatas ke dalam persamaan (2.13) akan diperoleh persamaan:

$$X^{''}(x) - KX(x) = 0 \qquad X'(0) = X'(L) = 0 \qquad (2.16)$$

dan

$$T'(t) - \alpha KT(t) = 0 \qquad (2.17)$$

dengan K adalah sembarang konstanta. Untuk menyelesaikan persamaan (2.14), kita mulai dengan persamaan karakteristik,

$$r^2 - K = 0 \qquad (2.18)$$

untuk $K > 0$, maka penyelesaian dari persamaan karakteristik (2.18) tidak diperoleh.

Sedangkan jika $K = 0$, maka persamaan karakteristik (2.18) mempunyai akar kembar yaitu $r = 0$, sehingga penyelesaian uumnya adalah:

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

Jika turunan pertama dari persamaan di atas adalah

$$X'(x) = c_2$$

Syarat batas pada (2.16) memberikan,

$$X'(0) = c_2$$

dan

$$X'(L) = c_2 = 0$$

sehingga penyelesaian untuk (2.16) adalah non-trivial dalam bentuk

$$X(x) = c_1$$

dengan c_1 adalah sembarang konstanta bukan nol. Untuk $K < 0$ persamaan karekteristik (2.16) mempunyai akar-akar $r = \pm i\sqrt{-K}$, sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{-K}x + c_2 \sin\sqrt{-K}x$$

Turunan pertama dari bentuk terakhir,

$$X'(x) = -\sqrt{-K}c_1 \sin\sqrt{-K}x + \sqrt{-K}c_2 \cos\sqrt{-K}x$$

dengan memasukkan syarat batas diperoleh $X'(0) = 0$,

$$X'(0) = -\sqrt{-K}c_1 \sin\sqrt{-K}(0) + \sqrt{-K}c_2 \cos\sqrt{-K}(0) = 0$$

$$0 + c_2\sqrt{-K} = 0$$

atau $c_2 = 0$, sedangkan untuk syarat batas $X'(L) = 0$, memberikan

$$X'(L) = -\sqrt{-K}c_1 \sin\sqrt{-K}(L) + \sqrt{-K}c_2 \cos\sqrt{-K}(L) = 0$$

Oleh karena $c_2 = 0$, maka persamaan menjadi,

$$-\sqrt{-K}c_1 \sin\sqrt{-K}L = 0$$

dan

$\sin\sqrt{-K}L = 0$ hanya jika $\sqrt{-K}L = n\pi$, $\qquad n = 0,1,2,\cdots$

maka

$$X_n(x) = \sin(n\pi x) \tag{2.19}$$

dan

$$T_n(t) = b_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \tag{2.20}$$

dengan b_n adalah konstanta sembarang. Gabungkan persamaan (2.20) dengan persamaan (2.18) dan kita peroleh fungsi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) b_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \tag{2.21}$$

dengan

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx \tag{2.22}$$

2.4 Metode Iterasi Variasi

Untuk menggambarkan teknik konsep dasar, selanjutnya pertimbangkan bentuk umum persamaan diferensial berikut :

$$Lu + Nu = g(x,t) \tag{2.23}$$

Misalkan $Lu = L_t u + L_x u$ maka

$$L_t u + L_x u + Nu = g(x,t) \tag{2.24}$$

atau

$$L_t u - L_x u + Nu = g(x,t)$$

$$L_t(.) = \frac{\partial}{\partial t}(.)$$

dimana L_x, L_t adalah masing-masing operator linier *x*,*t* yang di tuis, N adalah operator Nonlinier dan $g(x,t)$ adalah fungsi kontinu. Dari metode variasi iterasi, kita dapat membuat fungsional yang benar sebagai berikut :

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda\{L_s u_n + (L_x + N)\tilde{u}_n - g(x,t)\}\partial s \tag{2.25}$$

dengan :

$u_0(x)$ adalah Nilai awal yang diketahui

λ adalah Fungsi pengali langrange

$\tilde{u}_n$ adalah Variasi yang tebatas.dan $u_{n+1}, n \geq 0$

untuk fungsi pengali langrange (λ) yaitu :

$$\lambda(s) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1} \tag{2.26}$$

dengan:

m $=$ Banyak orde

Dimana λ adalah fungsi pengali langrange yang dapat didefinisikan secara optimal melaui metode variasi iterasi.

2.5 Metode Homotopi Pertubasi

Metode Homotopi pertubasi merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinear dan hasil perhitungannya cukup efektif dan akurat.

Misalkan:

$$A(u) - f(u) = 0 \tag{2.27}$$

dengan kondisi batas:

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0 \tag{2.28}$$

Dengan A adalah operator differensial umum, B adalah operator syarat batas, $f(u)$ adalah analisis fungsi yang diketahui. Operator A dapat dibagi menjadi dua bagian yaitu L dan N dimana L adalah linier dan N adalah nonlinier.

Oleh karena itu persamaan (2.27) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$L(u) + N(u) - f(u) = 0 \tag{2.29}$$

Dalam teknik homotopi, membangun sebuah homotopi $v(u, p)$ yang memenuhi:

$$H(u, p) = (1-p)\left[L(u) - L(u_0)\right] + p\left[A(u) - f(u)\right] = 0\,,\ p \in [0,1] \tag{2.30}$$

yang ekuivalen dengan:

$$H(u, p) = L(u) - L(u_0) + pL(u_0) + p\left[N(u) - f(u)\right] = 0 \tag{2.31}$$

dengan $p \in [0,1]$ merupakan *embedding* parameter yang digunakan sebagai parameter kecil dan $u(0)$ merupakan perkiraan awal dari persamaan (2.27) yang memenuhi kondisi batas.

Selanjutnya dari persamaan (2.31) untuk $p = 0$ akan menjadi:

$$H(u,0) = L(u) - L(u_0) = 0 \tag{2.32}$$

$$H(u,1) = A(u) - f(u) = 0 \tag{2.33}$$

Persamaan (2.32) dan (2.33) disebut homotopi. Menurut metode homotopi pertubasi pertama $p \in [0,1]$ merupakan *embedding* parameter yang dapat digunakan sebagai ”parameter kecil”, dan dianggap bahwa solusi dari persamaan (2.30) dan (2.31) dapat ditulis sebagai berikut:

$$u(x) = u_0(x) + pu_1(x) + p^2u_2(x) + \cdots \tag{2.34}$$

dalam metode homotopi pertubasi perkiraan solusi persamaan (2.27) dengan $p = 1$ adalah:

$$u = \lim_{p \to 1} u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{2.35}$$

Selanjutnya untuk memperoleh nilai u_0, u_1,....maka dapat diperoleh dari dengan mengsubstitusikan persamaan (2.29) kedalam persamaan (2.30) diperoleh

$$\begin{aligned} H(u,p) = (1-p)[L(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots) - L(u)] + p[L(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots) \\ + N(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots) - f(u)] = 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Misalkan L dan N operator diferensial fungsi linier dan nonlinier. Untuk sifat linier dari operator diferensial adalah

$$\begin{aligned} H(u,p) = L(u_0) - L(u_0) + p[L(u_1) + N(u_0) + L(u_0) - f(r)] + p^2[N(u_1) \\ + L(u_2)] + p^3[L(u_3) + N(u_3)] + \cdots \end{aligned} \tag{2.37}$$

Oleh karena itu dengan mengekspansikan persamaan (2.37) maka akan diperoleh orde utama yaitu

$$\begin{aligned} p^0 &: L(u_0) - L(u_0) = 0 \\ & L(u_0) = L(u_0) \\ & u_0 = L^{-1}L(u_0) \\ & u_0 = u_0 \end{aligned}$$

Kemudian untuk orde pertama diperoleh

$$p^1 : L(u_1) + N(u_0) + L(u_0) - f(r) = 0$$
$$L(u_1) = -N(u_0) - L(u_0) + f(r)$$
$$u_1 = -L^{-1}N(u_0) - L^{-1}L(u_0) + L^{-1} f(r)$$
$$u_1 = -L^{-1}N(u_0) - u_0 + L^{-1} f(r)$$

Seterusnya untuk orde kedua diperoleh

$$p^2 : \ N(u_1) + L(u_2) = 0$$
$$L(u_2) = -N(u_1)$$
$$u_2 = -L^{-1} N(u_1)$$

$$p^3 : \ N(u_1) - L(u_1) + L(u_3) = 0$$
$$L(u_3) = L(u_1) - N(u_1)$$
$$u_3 = u_1 - L^{-1} N(u_1)$$
$$\vdots$$

2.6 Modifikasi Metode Iterasi Variasi

Untuk menggambarkan konsep dasar dari metode homotopi pertubasi variasional, dengan mempertimbangkan persamaan diferensial umum berikut :

$$Lu + Nu = g(x,t) \tag{2.38}$$

dimana *L* atau L_x, L_t adalah operator linier *x,t*, *N* adalah operator Nonlinier dan *g(x)* adalah fungsi kontinu. Dari metode variasi iterasi, kita dapat membuat fungsional yang benar sebagai berikut :

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda\{L_s u_n + (L_x + N)\tilde{u}_n - g(x,t)\}\partial s \tag{2.39}$$

Kemudian, dengan menerapkan fungsi metode homotopi pertubasi ke dalam persamaan metode iterasi variasi, yang akan menghasilkan persamaan yaitu :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} u_n(x,t) = u_0(x,t) + p\int_0^x \lambda(s)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} L_x(u_n) + \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} N(\tilde{u}_n)\right) ds - \int_0^x \lambda(s)\, g(s)\, ds \tag{2.40}$$

Contoh :

Diberikan sebuah persamaan linier parabolik sebagai berikut :

$$u_t = \frac{1}{2} x^2 u_{xx}\,, \quad 0 < x < 1, t > 0 \tag{2.41}$$

dengan kondisi awal

$$u(x,0) = x^2$$

Penyelesaian :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} u_n(x,t) = u_0(x,t) + p\int_0^x \lambda(s)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} L_x(u_n) + \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} N(\tilde{u}_n)\right) ds - \int_0^x \lambda(s)\, g(s)\, ds$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.39) ke dalam persamaan parabolik di atas maka akan diperoleh :

$$u_{n+1}(x,t) = x^2 + \int_0^t \lambda(s)\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{1}{2} x^2\, u_{xx}\right) ds$$

Untuk menentukan nilai langrange (λ) dapat dicari dengan :

$$\lambda(s) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

dengan m=1

$$\lambda(s) = \frac{(-1)^1}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$

$$= \frac{(-1)}{(0)!}(s-t)^0$$

$$= -1$$

sehingga dengan memasukkan nilai pengali langrange $\lambda = -1$ maka:

$$u_{n+1}(x,t)=x^2-\int_0^t \lambda(s)\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}-\frac{1}{2}x^2\, u_{xx}\right)ds$$

$$u_0+pu_1+p^2u_2+\ldots=x^2-\ p\int_0^t\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s}+p\,\frac{\partial u_1}{\partial s}+p^2\,\frac{\partial u_2}{\partial s}+\ldots\right)\right.$$
$$\left.-\ \frac{1}{2}x^2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+p\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+p^2\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\cdots\right)\right)ds$$

Orde utama p^0 untuk $p=p^2=\ldots=0$, maka penyelesaian $u_0(x,t)$ didapatkan :

$$u_0(x,t)=x^2-\ p\int_0^t\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s}+p\,\frac{\partial u_1}{\partial s}+p^2\,\frac{\partial u_2}{\partial s}+\ldots\right)\right.$$
$$\left.-\ \frac{1}{2}x^2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+p\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+p^2\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\cdots\right)\right)ds$$

$$u_0(x,t)=x^2$$

Orde pertama p^1 untuk $p^2=p^3=\ldots=0$ maka untuk penyelesaiannya :

$$u_1(x,t)=x^2-\ p\int_0^t\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s}+p\,\frac{\partial u_1}{\partial s}+p^2\,\frac{\partial u_2}{\partial s}+\ldots\right)\right.$$
$$\left.-\ \frac{1}{2}x^2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+p\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+p^2\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\cdots\right)\right)ds$$

$$u_1(x,t)=x^2-\int_0^t\left(\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(x^2\right)\right)ds-\frac{1}{2}x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2\right)\right)\right)ds$$
$$=x^2-\int_0^t\left(0-\frac{1}{2}x^2\,(2)\right)ds$$
$$=\ x^2-0+x^2\,t$$
$$u_1(x,t)=x^2+x^2\,t$$

Untuk orde kedua p^2 maka $p^3=p^4=\ldots=0$

Kemudian agar lebih mudah untuk mencari $u_2(x,t)$, maka persamaan pada $u_1(x,t)$ variable *t* diganti dengan *s* sehingga :

$$u_2(x,t) = x^2 + x^2 t - p\int_0^t \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2 \frac{\partial u_2}{\partial s} + \dots \right) - \frac{1}{2}x^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + p^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \cdots \right) \right) ds$$

$$u_2(x,t) = x^2 + x^2 t - \int_0^t \left(\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(x^2 + x^2 s\right) \right) ds - \frac{1}{2}x^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2 + x^2 s\right) \right) \right) ds$$

$$= x^2 + x^2 t - \int_0^t \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2 (2+2s) \right) ds$$

$$= x^2 + x^2 t - \int_0^t x^2\, ds + \int_0^t x^2 + x^2 s\, ds$$

$$= x^2 + x^2 t - x^2 t + x^2 t + \frac{1}{2}x^2 t^2$$

$$= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2}x^2 t^2$$

$$u_2(x,t) = x^2 + x^2 t + \frac{1}{2}x^2 t^2$$

Untuk orde ketiga p^3 dengan $p^4 = p^5 = \dots = 0$. Karena persamaan $u_2(x,t)$ sudah didapat, maka selanjutnya dengan mencari persamaan $u_3(x,t)$, dengan mengganti variable *t* dengan *s* pada persamaan $u_2(x,t)$ sehingga di peroleh :

$$u_3(x,t) = x^2 + x^2 t + \frac{1}{2}x^2 t^2 - p\int_0^t \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2 \frac{\partial u_2}{\partial s} + \dots \right) - \frac{1}{2}x^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + p^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \cdots \right) \right) ds$$

$$u_3(x,t) = x^2 + x^2 t + \frac{1}{2}x^2 t^2 - \int_0^t \left(\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(x^2 + x^2 s + \frac{1}{2}x^2 s^2 \right) \right) - \frac{1}{2}x^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2 + x^2 s + \frac{1}{2}x^2 s^2 \right) \right) \right) ds$$

$$= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2}x^2 t^2 - \int_0^t \left(x^2 + x^2 s - \frac{1}{2}x^2 (2 + 2s + s^2) \right) ds$$

$$= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2}x^2 t^2 - \int_0^t x^2 + x^2 s\, ds + \int_0^t x^2 + x^2 s + \frac{1}{2}x^2 s^2\ ds$$

$$= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 - \int_0^t x^2 + x^2 s \, ds + \int_0^t x^2 + x^2 s + \frac{1}{2} x^2 s^2 \; ds$$

$$= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 - x^2 t - \frac{1}{2} x^2 t^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{6} x^2 s^3$$

$$= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{6} x^2 s^3$$

$$u_3(x,t) = x^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{6} x^2 s^3$$

Kemudian untuk orde ke empat p^4 untuk $p^5 = p^6 = \ldots = 0$, maka untuk mencarinya adalah :

$$u_4(x,t) = x^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{6} x^2 s^3 - p\int_0^t \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p \frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2 \frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + p^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \cdots \right) \right) ds$$

$$u_4(x,t) = x^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{6} x^2 s^3 - \int_0^t \left(\left(\frac{\partial}{\partial s} \left(x^2 + x^2 s + \frac{1}{2} x^2 s^2 + \frac{1}{6} x^2 s^3 \right) \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x^2 + x^2 s + \frac{1}{2} x^2 s^2 + \frac{1}{6} x^2 s^3 \right) \right) \right) ds$$

$$= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{6} x^2 s^3 - \int_0^t \left(x^2 + x^2 s + \frac{1}{2} x^2 s^2 \right) ds$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{2} x^2 \left(2 + 2s + 2s^2 + \frac{1}{3} s^3 \right) ds$$

$$= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{6} x^2 s^3 - x^2 t - \frac{1}{2} x^2 t^2 - \frac{1}{6} x^2 t^3$$

$$+ x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{6} x^2 t^3 + \frac{1}{24} x^3 t^4$$

$$= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{6} x^2 t^3 + \frac{1}{24} x^3 t^4$$

$$u_4(x,t) = x^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{6} x^2 t^3 + \frac{1}{24} x^2 t^4$$

Selanjutnya untuk mencari $u_5(x,t), u_6(x,t), \ldots.$ pada persamaan (2.41) sama halnya mencari $u_1(x,t), u_2(x,t), \cdots$ sehingga nantinya akan didapat penyelesaian hampiran dari solusi eksaknya, dan didapatkan deretnya yaitu :

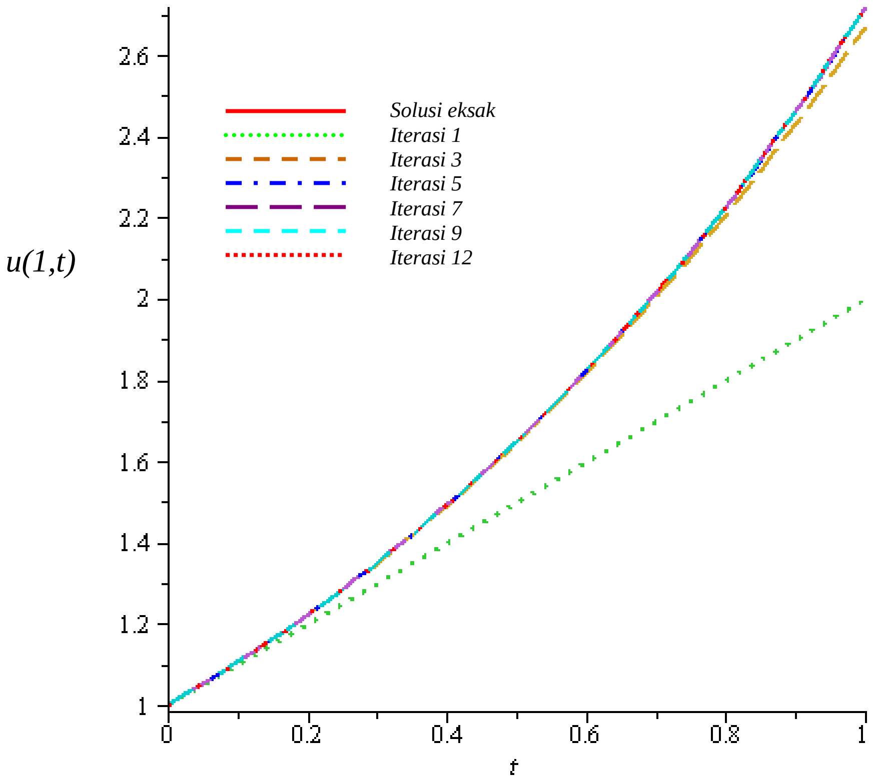
$$u(x,t) = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots$$

$$u(x,t) = x^2 + x^2t + \frac{1}{2!}x^2t^2 + \frac{1}{3!}x^2t^3 + \frac{1}{4!}x^3t^4$$

dengan solusi eksaknya yaitu $u(x,t) = x^2$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (2.41) bergantung kepada banyak iterasi yang dicari

Gambar (2.1) menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode iterasi variasi untuk beberapa iterasi terhadap penyelesaian eksak persamaan diferenesial parabolik nonlinier di $t = 0..1$

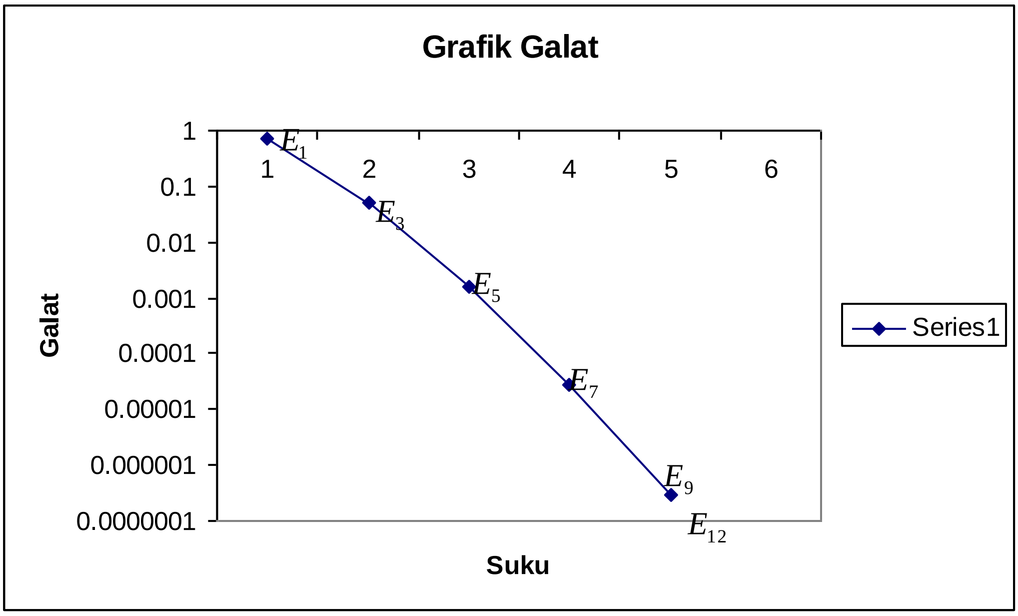


Gambar 2.1 Hampiran penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier pada persamaan (2.41) dengan $u(x,0) = x^2$, $0 \le t \le 1$ untuk beberapa jumlah suku.

Tabel 2.1 galat persamaan (2.41) untuk $x = 1$

t	E_1	E_3	E_5	E_7	E_9	E_{13}
0.1	0.005170918	0.000004251	0.0000000001	0	0	0
0.2	0.021402758	0.000069425	0.00000091	0.0000000001	0.0000000001	0.0000000001
0.4	0.091824698	0.001158031	0.000006031	0.00000017	0	0
0.6	0.222118800	0.006118800	0.000070800	0.00000446	0.0000000001	0.0000000001
0.8	0.425540928	0.020207595	0.000410261	0.000004562	0.00000031	0.0000000001
1	0.718281828	0.051615161	0.001615161	0.000027860	0.00000302	0

Berdasarkan pada gambar 2.1 dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentuk oleh $u_{13}(x,t)$ lebih mendekati dibandingkan kurva- kurva lainnya. Hal ini menunjukan iterasi lebih banyak akan mendekati kurva penyelesain eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada gambar 2.2 berikut :



Gambar 2.2 menunjukkan kecepatan modifikasi metode iterasi variasi menghampiri persamaan diferensial parabolik nonlinier pada persamaan (2.40) dengan $u(x,0) = x^2$.

BAB III
METODOLOGI

Metode yang digunakan penulis pada skripsi ini adalah metode studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan diferensial parabolik nonlinear dengan persamaan umumnya $u_t - u_{xx} = f(u) + g(x,t)$, dengan syarat batas $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$.
2. Mengubah persamaan diferensial parabolik nonlinier kedalam bentuk Modifikasi Metode Iterasi Variasi yaitu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} u_n(x,t) = u_0(x,t) + p\int_0^x \lambda(s)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} L_x(u_n) + \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} N(\tilde{u}_n)\right) ds - \int_0^x \lambda(s)\, g(s)\, ds \tag{3.1}$$

3. Menentukan nilai pengali langrange (λ) pada persamaan (3.1) dengan bentuk persamaan yaitu:

$$\lambda(s) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1} \tag{3.2}$$

4. Menyelesaikan persamaan parabolik nonlinier menggunakan modifikasi metode iterai variasi.
5. Mencari nilai $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$ untuk mencari nilai hampiran dari solusi eksak.
6. Menentukan nilai hampiran suatu persamaan diferensial parabolik nonlinier dalam bentuk $u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t)$.
7. Membandingkan nilai eksak yang telah di tentukan (dalam jurnal) dengan solusi hampiran untuk mencari galat suatu persamaan.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Persamaan Homogen

Pertimbangkan kembali persamaan parabolik nonlinear berikut

$$u_t - u_{xx} - f(u) = g(x,t) \tag{4.1}$$

Misalkan $f(u)$ adalah fungsi yang terdiri dari bentuk nonlinear $N(\tilde{u}_n)$ dan linear $L(u)$, maka persamaan (4.1) dapat ditulis kembali:

$$u_t - u_{xx} - N(\tilde{u}_n) - L(u) = g(x,t) \tag{4.2}$$

dengan nilai awal $u(x,0) = f(x)$. Persamaan (4.2) dikatakan Homogen jika $g(x,t) = 0$.

Penyelesaian persamaan (4.2) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $u(x,t)$ yang merupakan deret $u_0(x,t), u_1(x,t), u_2(x,t), \cdots$, dimana

$$u_{n+1}(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \ldots. \tag{4.3}$$

Penyelesaian persamaan (4.2) dilakukan dengan mengubah persamaan (4.2) kedalam bentuk modifikasi metode iterai variasi yaitu

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} u_n(x,t) = u_0(x,t) + p\int_0^x \lambda(s)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} L_x(u_n) + \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} N(\tilde{u}_n)\right) ds \\ - \int_0^x \lambda(s)\, g(s)\, ds\end{aligned} \tag{4.4}$$

Contoh 1:

Diberikan sebuah persamaan parabolik nonlinier sebagai berikut :

$$u_t - u_{xx} = u^2 - (u_x)^2 \tag{4.5}$$

dengan masalah nilai awal $u(x,0) = e^x$ (Mustafa Inc, 2004)

Penyelesaian :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} u_n(x,t) = u_0(x,t) + p\int_0^x \lambda(s)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} L_x(u_n) + \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} N(\tilde{u}_n)\right)ds$$

$$-\int_0^x \lambda(s)\, g(s)\, ds$$

Jadi dengan mensubtitusikan persamaan (4.5) kedalam persamaan parabolik nonlinier di atas maka :

$$u_{n+1}(x,t) = u_0(x,t) + p\int_0^t \lambda(s)\left(\frac{\partial u_n}{\partial s} - u_{xx} - u^2 + (u_x)^2\right)ds$$

Untuk menentukan nilai langrange (λ) dengan :

$$\lambda(s) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

Oleh karena m = 1, maka

$$\lambda(s) = \frac{(-1)^1}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$
$$= \frac{(-1)}{(0)!}(s-t)^0$$
$$= -1$$

sehingga dengan memasukkan nilai langrange -1, pada persamaan (2.39) diperoleh;

$$u_{n+1}(x,t) = u_0(x,t) - \int_0^t \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} - u_{xx} - u^2 + (u_x)^2\right)ds$$

Sehingga menjadi kepada persamaan (2.40) maka :

$$u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots = e^x - p\int_0^t \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots\right) - \left(u_{0xx} + pu_{1xx} + p^2u_{2xx} + \ldots\right)\right.$$
$$\left. - \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots\right)^2 + \left(u_{0x} + pu_{x1} + p^2u_{2x} + \ldots\right)^2\right)ds$$

Orde utama p^0 maka $p = p^2 = \ldots = 0$, sehingga penyelesaian $u_0(x,t)$ didapatkan :

$$u_0(x,t) = e^x$$

Orde pertama p^1 maka $p^2 = p^3 = \ldots = 0$ sehingga penyelesaian untuk $u_1(x,t)$ adalah:

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= e^x - \int_0^t \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots \right) - \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots \right)_{xx} \right. \\
&\quad \left. - \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots \right)^2 + \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots \right)_x{}^2 \right) ds \\
&= e^x - \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s}\left(e^x\right) ds - \int_0^t e^x\, ds - \int_0^t u_0{}^2\, ds + \int_0^t u_0{}^2 ds \\
&= e^x + e^x\, t \\
u_1(x,t) &= e^x + e^x\, t
\end{aligned}$$

Untuk orde kedua p^2 maka $p^3 = p^4 = \ldots = 0$, dan untuk memperoleh penyelsaian $u_2(x,t)$, maka persamaan pada $u_1(x,t)$ variable t diganti dengan s sehingga :

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) &= \left(e^x + e^x t\right) - \int_0^t \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots \right) - \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots \right)_{xx} \right. \\
&\quad \left. - \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots \right)^2 + \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots \right)_x{}^2 \right) ds \\
&= \left(e^x + e^x t\right) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(e^x + e^x s\right) ds - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x^2}\left(e^x + e^x s\right) ds \\
&\quad - \int_0^t 2u_0u_1\, ds + \int_0^t 2u_0u_1\, ds \\
&= \left(e^x + e^x t\right) - \int_0^t \left(e^x\right) ds - \int_0^t \left(e^x + e^x s\right) ds \\
&= e^x\left(t + \frac{1}{2}t^2\right)
\end{aligned}$$

Untuk orde ketiga p^3 dengan $p^4 = p^5 = \ldots = 0$. Karena persamaan $u_2(x,t)$ sudah didapat, maka untuk memperoleh penyelesaian $u_3(x,t)$, dengan mengganti variable t dengan s pada persamaan $u_2(x,t)$ sehingga diperoleh :

$$u_3(x,t) = e^x\left(t+\frac{1}{2}t^2\right) - \int_0^t \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots\right) - \left(u_{0xx} + pu_{1xx} + p^2 u_{2xx} + \ldots\right)\right.$$
$$\left. - \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots\right)^2 + \left(u_{0x} + pu_{1x} + p^2u_{2x} + \ldots\right)^2\right)ds$$
$$= e^x\left(t+\frac{1}{2}t^2\right) - \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s}\left(e^x\left(s+\frac{1}{2}s^2\right)\right)ds - \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(e^x\left(s+\frac{1}{2}s^2\right)\right)ds$$
$$-\int_0^t (2u_0u_2 + u_1)ds + \int_0^t (2u_0u_2 + u_1)ds$$
$$= e^x\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)ds - \int_0^t e^x + e^x s\ ds + \int_0^t e^x\left(s+\frac{1}{2}s^2\right)ds$$
$$= e^x\left(t+\frac{1}{2}t^2\right) - \int_0^t e^x\ ds + \int_0^t e^x\left(\frac{1}{2}s^2\right)ds$$
$$= e^x\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3\right)$$

selanjutnya untuk orde ke empat p^4 maka $p^5 = p^6 = \ldots = 0$, sehingga penyelesaian untuk $u_4(x,t)$ adalah :

$$u_4(x,t) = e^x\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3\right) - p\int_0^t \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots\right)\right.$$
$$\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + p^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \cdots\right) - \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots\right)^2$$
$$\left. + \left(u_{0x} + pu_{1x} + p^2u_{2x} + \ldots\right)^2\right)ds$$
$$= e^x\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3\right) - \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s}\left(e^x\left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3\right)\right)ds + \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(e^x\left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3\right)\right)$$
$$+\int_0^t (2u_1u_2 + u_3u_0)\partial s - \int_0^t (2u_1u_2 + u_3u_0)$$
$$= e^x\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3\right) - \int_0^t e^x\left(s+\frac{1}{2}s^2\right)\partial s + \int_0^t \left[e^x\left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3\right)\right]ds$$
$$= e^x\left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4\right)$$
$$\vdots$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh :

$$u_4(x,t) = e^x\left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4\right)$$

Oleh karena itu

$$u(x,t) = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots$$

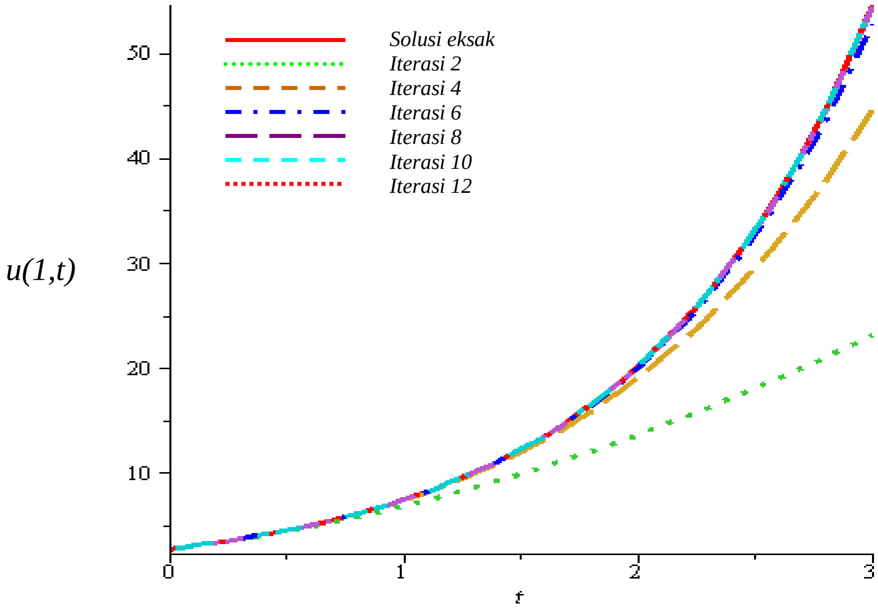
maka penyelesaiannya adalah :

$$u_4(x,t) = e^x\left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4\right)$$

dengan solusi eksaknya yaitu $u(x,t) = e^{x+t}$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (4.5) bergantung kepada banyak iterasi yang dicari.

Gambar 4.1 menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi untuk beberapa iterasi terhadap penyelesaian eksak persamaan diferenesial parabolik nonlinier di $t = 0..3$

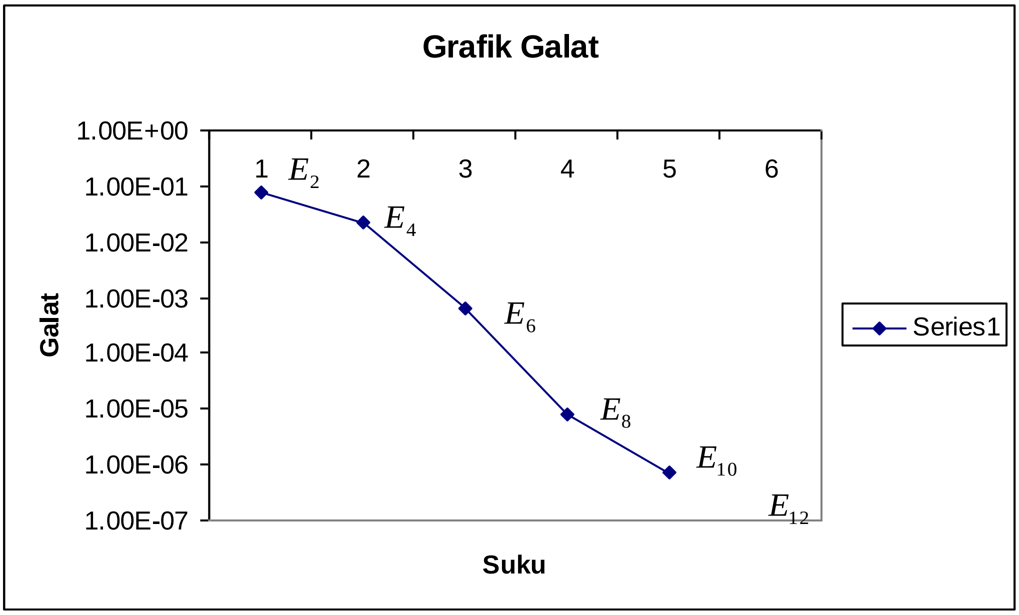


Gambar 4.1 Hampiran penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier pada persamaan (4.5) dengan $u(x,0)=e^x$ di $x=1$ dan $0<t<3$ untuk beberapa jumlah suku.

Tabel 4.1 Galat persamaan (4.5) dari masing-masing iterasi dengan $x=1$

t	E_2	E_4	E_6	E_8	E_{10}	E_{12}
0.1	0.000464603	0.00000228	0	0	0	0
0.2	0.003813092	0.000007497	0.00000006	0.00000002	0.00000002	0.00000002
0.4	0.032142861	0.000248352	0.00000929	0.00000002	0.00000001	0.00000001
0.6	0.114490769	0.001953901	0.000016310	0.00000079	0.00000002	0.00000002
0.8	0.286889988	0.008537928	0.000125509	0.000001091	0.00000004	0.00000002
1	0.593351526	0.027042813	0.00615071	0.000008312	0.00000073	0

Berdasarkan pada gambar 4.1, dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentuk oleh $u_{12}(x,t)$ lebih mendekati dibandingkan kurva- kurva lainnya. Hal ini menunjukan iterasi lebih banyak akan mendekati kurva penyelesain eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada gambar 4.2 berikut :



Gambar 4.2 kecepatan modifikasi metode iterasi variasi menghampiri persamaan diferensial parabolik nonlinier pada persamaan (4.5) dengan $u(x,0)=e^{x}$ di $x=1$ dan $0<t<3$ untuk beberapa jumlah suku.

Contoh 2 :

Tentukan penyelesaian eksak dari persamaan parabolik nonlinier homogen berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(u^{2}\right)_{x}-u\left(1-u\right)=0 \tag{4.6}$$

dengan masalah nilai awal $u(x,0)=e^{-x}$ (Jafari hossein, 2008)

Penyelesaian :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}u_{n}(x,t)=u_{0}(x,t)+p\int_{0}^{x}\lambda(s)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}L_{x}(u_{n})+\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}N(\tilde{u}_{n})\right)ds$$

$$-\int_{0}^{x}\lambda(s)\,g(s)\,ds$$

Selanjutnya, subsitusikan persamaan (4.6) ke persamaan (2.39), maka akan diperoleh :

$$u_{n+1}(x,t)=u_{0}(x,t)+p\int_{0}^{t}\lambda(s)\left(\frac{\partial u_{n}}{\partial s}+\frac{1}{2}u^{2}{}_{x}-u+u^{2}\right)ds$$

Untuk menentukan nilai langrange (λ) diperoleh dengan :

$$\lambda(s)=\frac{(-1)^{m}}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

Oleh karena m = 1, maka :

$$\lambda(s)=\frac{(-1)^{1}}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$

$$=\frac{(-1)}{(0)!}(s-t)^{0}$$

$$=-1$$

Berdasarkan persamaan (2.40) diperoleh

$$u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots = u_0\,(x,t) - \; p\int_0^t \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\,\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2\,\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots \right) \right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots\right)^2{}_x - \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots\right)$$

$$\left. + \; \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots\right)^{\,2} \; \right)ds$$

Orde utama p^0 untuk $p = p^2 = \ldots = 0$, maka penyelesaian $u_0\,(x,t)$ didapatkan :

$u_0\,(x,t) = e^{-x}$

Orde pertama p^1 untuk $p^2 = p^3 = \ldots = 0$ maka untuk penyelesaian $u_1\,(x,t)$ diperoleh :

$$u_1\,(x,t) = e^{-x} - \; p\int_0^t \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\,\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2\,\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots \right) + \frac{1}{2}\left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots\right)^2{}_x \right.$$

$$\left. - \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots\right) \; + \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots\right)^{\,2} \right) = 0$$

$$u_1\,(x,t) = e^{-x} - \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s}\left(e^{-x}\right)ds - \int_0^t \frac{1}{2}\,u_{0x}{}^2\; ds + \int_0^t u_0\;\partial s - \int_0^t u_0{}^2\; ds$$

$$= e^{-x} - 0 - \int_0^t \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\left(e^{-2x}\right)\right)ds + \int_0^t e^{-x}\;\partial s - \int_0^t e^{-2x}\; ds$$

$$= e^{-x} + \int_0^t e^{-2x}\; ds + \int_0^t e^{-x}\; ds - \int_0^t e^{-2x}\; ds$$

$$= e^{-x} + \int_0^t e^{-x}\; ds$$

$$= e^{-x} + e^{-x}t$$

Untuk orde kedua p^2 maka $p^3 = p^4 = \ldots = 0$. Untuk memperoleh penyelesaian $u_2\,(x,t)$, maka persamaan pada $u_1\,(x,t)$ variable t diganti dengan s, sehingga di peroleh :

$$u_2\,(x,t) = \left(e^{-x} + e^{-x}t\right) - p\int_0^t \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\,\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2\,\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots \right) + \frac{1}{2}\left(u_{0x} + pu_{1x} + p^2u_{2x} + \ldots\right)^2 \right.$$

$$\left. - \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots\right) \; + \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots\right)^{\,2} \right)ds$$

$$=\left(e^{-x}+e^{-x}t\right)-\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-x}+e^{-x}s\right)ds-\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(u_0u_1\right)ds+\int_0^t u_1\,\partial s-\int_0^t 2u_0u_1\,ds$$

$$=\left(e^{-x}+e^{-x}t\right)-\int_0^t e^{-x}\,ds-\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(e^{-x}\right)\left(e^{-x}+e^{-x}s\right)\right)ds+\int_0^t \left(e^{-x}+e^{-x}s\right)ds$$

$$-\int_0^t 2\left(\left(e^{-x}\right)\left(e^{-x}+e^{-x}s\right)\right)ds$$

$$=\left(e^{-x}+e^{-x}t\right)-\left[e^{-x}s\right]_0^t-\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(e^{-x}\right)^2+e^{-x}s\right)ds+\left[e^{-x}s+\frac{1}{2}e^{-x}s^2\right]_0^t$$

$$-\int_0^t 2\left(\left(e^{-x}\right)^2+e^{-x}s\right)ds$$

$$=\left(e^{-x}+e^{-x}t\right)-e^{-x}t+\int_0^t 2\left(\left(e^{-x}\right)^2+e^{-x}s\right)ds+e^{-x}t+\frac{1}{2}e^{-x}t^2$$

$$-\int_0^t 2\left(\left(e^{-x}\right)^2+e^{-x}s\right)ds$$

$$=\left(e^{-x}+e^{-x}t\right)-e^{-x}t+e^{-x}t+\frac{1}{2}e^{-x}t^2$$

$$=e^{-x}\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)$$

Untuk orde ketiga p^3 maka $p^4=p^5=\ldots=0$, untuk penyelesaian $u_3(x,t)$ dengan mengganti variabel t dengan s pada persamaan $u_2(x,t)$, sehingga di peroleh :

$$u_3(x,t)=e^{-x}\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)-\int_0^t\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s}+p\frac{\partial u_1}{\partial s}+p^2\frac{\partial u_2}{\partial s}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(u_0+pu_1+p^2u_2+\ldots\right)^2{}_x\right.$$

$$\left.-\left(u_0+pu_1+p^2u_2+\ldots\right)+\left(u_0+pu_1+p^2u_2+\ldots\right)^2=0\right.$$

$$u_3(x,t)=e^{-x}\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)-\int_0^t\frac{\partial u}{\partial s}\left(e^{-x}\left(s+\frac{1}{2}ts^2\right)\right)\partial s-\int_0^t\frac{1}{2}u_{1x}{}^2+\left(u_{0x}\,u_{1x}\right)\partial s+\int_0^t u_2\,\partial$$

$$-\int_0^t 2u_0u_1+u_1{}^2\,\partial s$$

$$=e^{-x}\left(t+\frac{1}{2}t^{2}\right)-\int_{0}^{t} e^{-x}+e^{-x}s\ \partial s-\int_{0}^{t}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\left(e^{-x}+e^{-x}s\right)^{2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\left(e^{-x}\right)\left(e^{-x}\left(s+\frac{1}{2}s^{2}\right)\right)\partial s$$

$$+\int_{0}^{t} e^{-x}\left(t+\frac{1}{2}s^{2}\right)\partial s\ -\int_{0}^{t} 2\left(e^{-x}\left(s+\frac{1}{2}s^{2}\right)\right)+\left(e^{-x}+e^{-x}s\right)^{2}\partial s$$

$$=e^{-x}\left(t+\frac{1}{2}t^{2}\right)-\left[e^{-x}s+\frac{1}{2}e^{-x}s^{2}\right]_{0}^{t}+\int_{0}^{t} 2\left(\left(e^{-x}+e^{-x}s\right)^{2}+2\left(e^{-x}\right)\left(e^{-x}\left(s+\frac{1}{2}s^{2}\right)\right)\right)\partial s$$

$$+\int_{0}^{t} e^{-x}\left(s+\frac{1}{2}s^{2}\right)\partial s\ -\int_{0}^{t} 2\left(\left(e^{-x}\left(s+\frac{1}{2}s^{2}\right)\right)+\left(e^{-x}+e^{-x}s\right)^{2}\right)\partial s$$

$$=e^{-x}\left(t+\frac{1}{2}t^{2}\right)-e^{-x}t+\frac{1}{2}e^{-x}t^{2}+\left[\frac{1}{2}e^{-x}s^{2}+\frac{1}{6}e^{-x}s^{3}\right]_{0}^{t}$$

$$=e^{-x}t+\frac{1}{2}e^{-x}t^{2}-e^{-x}t+\frac{1}{2}e^{-x}t^{2}+\frac{1}{2}e^{-x}t^{2}+\frac{1}{6}e^{-x}t^{3}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-x}t^{2}+\frac{1}{6}e^{-x}t^{3}$$

untuk orde ke empat $p^{4}=u_{4}(x,t)$ untuk $p^{5}=p^{6}=\ldots=0$, maka untuk mencari $u_{4}(x,t)$ adalah :

$$u_{4}(x,t)=\frac{1}{2}e^{-x}t^{2}+\frac{1}{6}e^{-x}t^{3}-\int_{0}^{t}\left(\left(\frac{\partial u_{0}}{\partial s}+p\frac{\partial u_{1}}{\partial s}+p^{2}\frac{\partial u_{2}}{\partial s}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(u_{0}+pu_{1}+p^{2}u_{2}+\ldots\right)^{2}{}_{x}\right.$$
$$\left.-\left(u_{0}+pu_{1}+p^{2}u_{2}+\ldots\right)+\left(u_{0}+pu_{1}+p^{2}u_{2}+\ldots\right)^{2}\right)ds$$

$$u_{4}(x,t)=\frac{1}{2}e^{-x}t^{2}+\frac{1}{6}e^{-x}t^{3}-\int_{0}^{t}\frac{\partial u_{0}}{\partial s}\left(\frac{1}{2}e^{-x}t^{2}+\frac{1}{6}e^{-x}t^{3}\right)\partial s-\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\frac{\partial u}{\partial x}\left(2u_{3}u_{0}+u_{1}u_{2}\right)\partial s$$

$$+\int_{0}^{t}u_{3}\,\partial s-\int_{0}^{t}\left(2u_{3}u_{0}+u_{1}u_{2}\right)\partial s$$

$$=\frac{1}{2}e^{-x}t^{2}+\frac{1}{6}e^{-x}t^{3}-\int_{0}^{t}\left(e^{-x}s+\frac{1}{2}e^{-x}s^{2}\right)\partial s$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\frac{\partial u}{\partial x}\left(2\left(\left(e^{-x}\right)\left(\frac{1}{2}e^{-x}s^{2}+\frac{1}{6}e^{-x}s^{3}\right)\right)+\left(\left(e^{-x}+e^{-x}s\right)\left(e^{-x}\left(s+\frac{1}{2}s^{2}\right)\right)\right)\right)\partial s$$

$$+\int_{0}^{t}\frac{1}{2}e^{-x}s^{2}+\frac{1}{6}e^{-x}s^{3}\,\partial s-\int_{0}^{t}2\left(\left(e^{-x}\right)\left(\frac{1}{2}e^{-x}s^{2}+\frac{1}{6}e^{-x}s^{3}\right)\right)+\left(\left(e^{-x}+e^{-x}s\right)\left(e^{-x}\left(s+\frac{1}{2}s^{2}\right)\right)\right)\partial s$$

$$=\frac{1}{2}e^{-x}t^{2}+\frac{1}{6}e^{-x}t^{3}-\left[\frac{1}{2}e^{-x}s^{2}+\frac{1}{6}e^{-x}s^{3}\right]_{0}^{t}$$

$$-\int_0^t -\left(e^{-x}\right)^2 s^2 - \frac{1}{6}e^{-x}s^3 - \frac{1}{2}e^{-x} - \left(e^{-x}\right)^2 s^2 - \frac{1}{4}e^{-x}s^2 + \int_0^t \frac{1}{2}e^{-x}s^2 + \frac{1}{6}e^{-x}s^3 \,\partial s$$

$$-\int_0^t \left(e^{-x}\right)^2 s^2 + \frac{1}{6}e^{-x}s^3 + \frac{1}{2}e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2 s^2 + \frac{1}{4}e^{-x}s^2$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x}t^2 + \frac{1}{6}e^{-x}t^3 - \frac{1}{2}e^{-x}t^2 + \frac{1}{6}e^{-x}t^3 + \left[\frac{1}{6}e^{-x}s^3 + \frac{1}{24}e^{-x}s^4\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x}t^2 + \frac{1}{6}e^{-x}t^3 - \frac{1}{2}e^{-x}t^2 + \frac{1}{6}e^{-x}t^3 + \frac{1}{6}e^{-x}t^3 + \frac{1}{24}e^{-x}t^4$$

$$= \frac{1}{6}e^{-x}t^3 + \frac{1}{24}e^{-x}t^4$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh :

$$u_0(x,t) = e^{-x}$$

$$u_1(x,t) = e^{-x}(1+t)$$

$$u_2(x,t) = e^{-x}\left(t + \frac{1}{2}t^2\right)$$

$$u_3(x,t) = e^{-x}\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3\right)$$

$$u_4(x,t) = e^{-x}\left(\frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4\right)$$

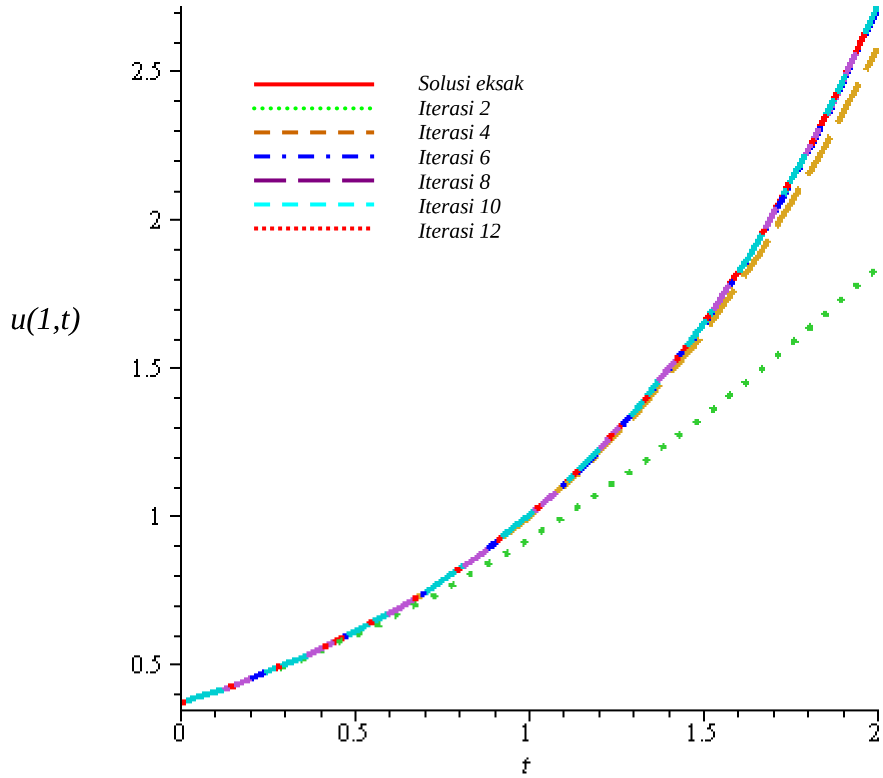
maka penyelesaiannya persamaan (4.6) adalah :

$$u(x,t) = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots$$

$$u(x,t) = e^{-x}\left(\frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4\right)$$

dengan solusi eksaknya $u(x,t) = e^{t-x}$

Sehingga akurasi yang diperoleh tergantung pada banyak iterasi yang ada. Gambar 4.3 menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi untuk beberapa jumlah suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferenesial parabolik nonlinier di $t = 0..2$

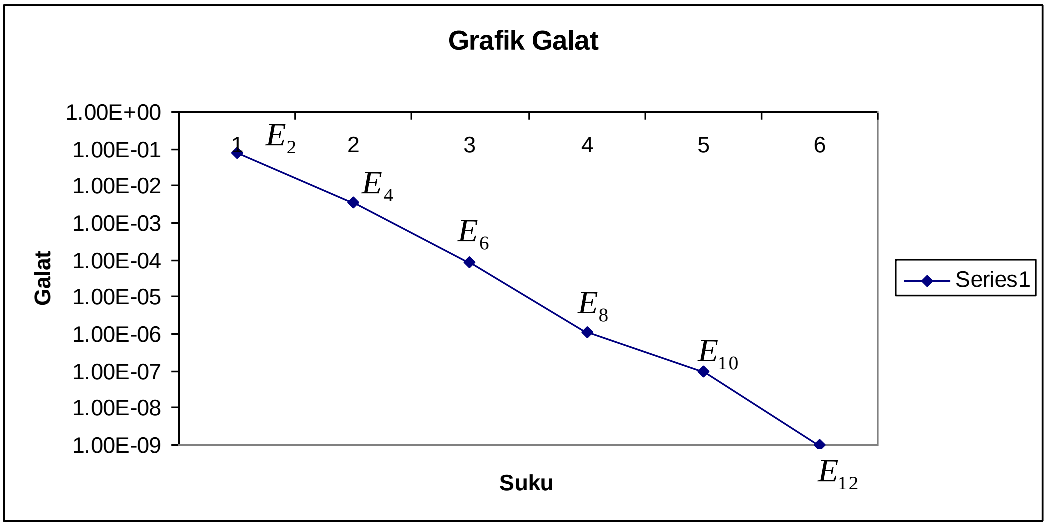


Gambar 4.3 Hampiran penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier pada persamaan (4.6) dengan $u(x,0) = e^{-x}$, $0 < t < 2$ untuk beberapa jumlah suku.

Tabel 4.2 Galat persamaan (4.6) dari masing-masing iterasi dengan $x = 1$

t	E_2	E_4	E_6	E_8	E_{10}	E_{12}
0.1	0.0000628773	0.00000031	0.0000000001	0.0000000001	0.0000000001	0.0000000001
0.2	0.0005160459	0.0000010147	0.000000008	0.000000003	0.000000003	0.000000003
0.4	0.0043500631	0.0000336108	0.000001256	0.000000002	0.000000002	0.000000002
0.6	0.0154946400	0.0002644319	0.0000022074	0.000000108	0.000000002	0.000000002
0.8	0.0388263378	0.0011554830	0.0000169859	0.000001477	0.000000005	0.000000002
1	0.0803013970	0.0036598469	0.0000832409	0.0000011251	0.0000001	0.000000001

Berdasarkan pada gambar 4.3, dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentuk oleh $u_{12}(x,t)$ lebih mendekati dibandingkan kurva- kurva lainnya. Hal ini menunjukan iterasi lebih banyak akan mendekati kurva penyelesain eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada gambar 4.4



Gambar 4.4 Kecepatan modifikasi metode iterasi variasi menghampiri persamaan diferensial parabolik nonlinier pada persamaan (4.6) dengan $u(x,0) = e^x$.

4.2 Persamaan Nonhomogen

Persamaan (4.2) dikatakan nonhomogen jika $g(x,t) \neq 0$. Persamaan (4.2) dapat ditulis kembali:

$$u_t - u_{xx} - N(\tilde{u}_n) \quad - L(u) = g(x,t) \tag{4.8}$$

Penyelesaian persamaan (4.8) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $u(x,t)$ yang merupakan deret $u_0(x,t), u_1(x,t), u_2(x,t), \cdots,$ dengan :

$$u_{n+1}(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \ldots. \tag{4.9}$$

Penyelesaian persamaan (4.9) dilakukan dengan mengubah persamaan (4.9) kedalam bentuk modifikasi metode iterai variasi yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} u_n(x,t) = u_0(x,t) + p\int_0^x \lambda(s)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} L_x(u_n) + \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} N(\tilde{u}_n)\right) ds - \int_0^x \lambda(s)\, g(s)\, ds \qquad (4.10)$$

Contoh 3:

Diberikan sebuah persamaan parabolik nonlinier sebagai berikut :

$$u_t = uu_{xx} - 2x^2 \qquad (4.11)$$

Dengan masalah nilai awal $u(x,0) = x^2$ (Wartono, 2010)

Penyelesaian :

Penyelesaian persamaan parabolik nonlinier pada persamaan (4.11), dengan mengubah ke dalam bentuk modofikasi metode iterasi variasi yaitu :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} u_n(x,t) = u_0(x,t) + p\int_0^x \lambda(s)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} L_x(u_n) + \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} N(\tilde{u}_n)\right) ds - \int_0^x \lambda(s)\, g(s)\, ds \qquad (4.12)$$

Untuk nilai langrange λ diperoleh dengan persamaan :

$$\lambda(s) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

Oleh karena $m = 1$, maka

$$\begin{aligned}\lambda(s) &= \frac{(-1)^1}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}\\ &= \frac{(-1)}{(0)!}(s-t)^0\\ &= -1\end{aligned}$$

sehingga dengan memasukkan nilai langrange -1, pada persamaan (2.39) diperoleh :

$$u_{n+1}(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t -1\left(\frac{\partial u_n}{\partial s} - uu_{xx}\right) ds + \int_0^t 2x^2\, ds$$

Sehingga menjadi kepada persamaan (2.40) yaitu :

$$u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots = x^2 + p\int_0^t -1\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots\right)\right.$$
$$\left. - \left(uu_{0xx} + puu_{1xx} + p^2uu_{2xx} + \ldots\right)\right)ds + \int_0^t (-1)2x^2\, ds$$

orde utama p^0 maka $p^1 = p^2 = \ldots = 0$, sehingga penyelesaian $u_0\,(x,t)$ adalah :

$$u_0\,(x,t) = x^2 + \int_0^t -2x^2\,\partial s$$
$$= x^2 - \left[2x^2 s\right]_0^t$$
$$= x^2 - 2x^2 t$$

Orde pertama p^1 maka $p^2 = p^3 = \ldots = 0$, sehingga penyelesaian untuk $u_1\,(x,t)$ dengan cara mengubah variable *t* dengan *s* pada persamaan $u_0\,(x,t)$:

$$u_1\,(x,t) = \left(x^2 + 2x^2t\right) + p\int_0^t -1\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots\right)$$
$$- \left(uu_{0xx} + puu_{1xx} + p^2uu_{2xx} + \ldots\right) + \int_0^t (-1)2x^2 ds$$
$$= \left(x^2 + 2x^2t\right) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(x^2 + 2x^2s\right)\partial s + \int_0^t u_0\,\frac{\partial}{\partial x^2}\,ds$$
$$= \left(x^2 + 2x^2t\right) - \int_0^t 2x^2\,ds + \int_0^t \left(x^2 + 2x^2s\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\left(x^2 + 2x^2s\right)\right)ds$$
$$= \left(x^2 + 2x^2t\right) - \left[2x^2s\right]_0^t + \int_0^t \left(x^2 + 2x^2s\right)\left(2 + 4s\right)ds$$
$$= \left(x^2 + 2x^2t\right) - 2x^2t + \int_0^t \left(2x^2 - 8x^2s + 8x^2s^2\right)ds$$
$$= \left(x^2 + 2x^2t\right) - 2x^2t + 2x^2t - 4x^2t^2 + \frac{8}{3}x^2t^3$$
$$= \left(x^2 + 2x^2t\right) - 4x^2t^2 + \frac{8}{3}x^2t^3$$

Orde kedua p^2 , maka $p^3 = p^4 = \ldots = 0$, sehingga penyelesaian $u_2\,(x,t)$ adalah :

$$u_2\,(x,t) = \left(x^2 + 2x^2 t\right) - 4x^2t^2 + \frac{8}{3}x^2t^3 + \; p\int_0^t -1\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2\,\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots\right)$$

$$- \left(uu_{0xx} + puu_{1xxx} + p^2uu_{2xx} + \ldots\right) \; + \int_0^t (-1)2x^2 ds$$

$$= \left(x^2 + 2x^2t\right) - 4x^2t^2 + \frac{8}{3}x^2t^{\,3} \; - \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(\left(x^2 + 2x^2s\right) - 4x^2s^2 + \frac{8}{3}x^2s^{\,3}\right)ds$$

$$+ \int_0^t \left(\left(x^2 + 2x^2s\right) - 4x^2s^2 + \frac{8}{3}x^2s^3\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\left(x^2 + 2x^2s\right) - 4x^2s^2 + \frac{8}{3}x^2s^{\,3}\right)\right)ds$$

$$= \; \left(x^2 + 2x^2t\right) - 4x^2t^2 + \frac{8}{3}x^2t^{\,3} \; - \int_0^t \;\left(\left(x^2 + 2x^2\right) - 8x^2s \; + 8x^2s^2\right)ds$$

$$+ \int_0^t \left(\left(x^2 + 2x^2s\right) - 4x^2s^2 + \frac{8}{3}x^2s^3\right)\left(\left(2 + 4s\right) - 8s^2 + \frac{16}{3}s^{\,3}\right)\; ds$$

$$= \; 2x^2t + 4x^2t^2 - \frac{8}{3}x^2t^3 - \frac{32}{12}x^2t^4 + \frac{64}{15}x^2t^5 - \frac{128}{24}x^2t^6 + \frac{128}{72}x^2t^7$$

Selanjutnya untuk mencari $u_3(x,t), u_4(x,t), \ldots.$ pada persamaan (4.12) sama halnya mencari $u_1(x,t), u_2(x,t), \cdots$ sehingga berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa :

$$u_2\,(x,t) = 2x^2t + 4x^2t^2 - \frac{8}{3}x^2t^3 - \frac{32}{12}x^2t^4 + \frac{64}{15}x^2t^5 - \frac{128}{24}x^2t^6 + \frac{128}{72}x^2t^7$$

Oleh karena itu, maka penyelesaian persamaan (4.12) adalah :

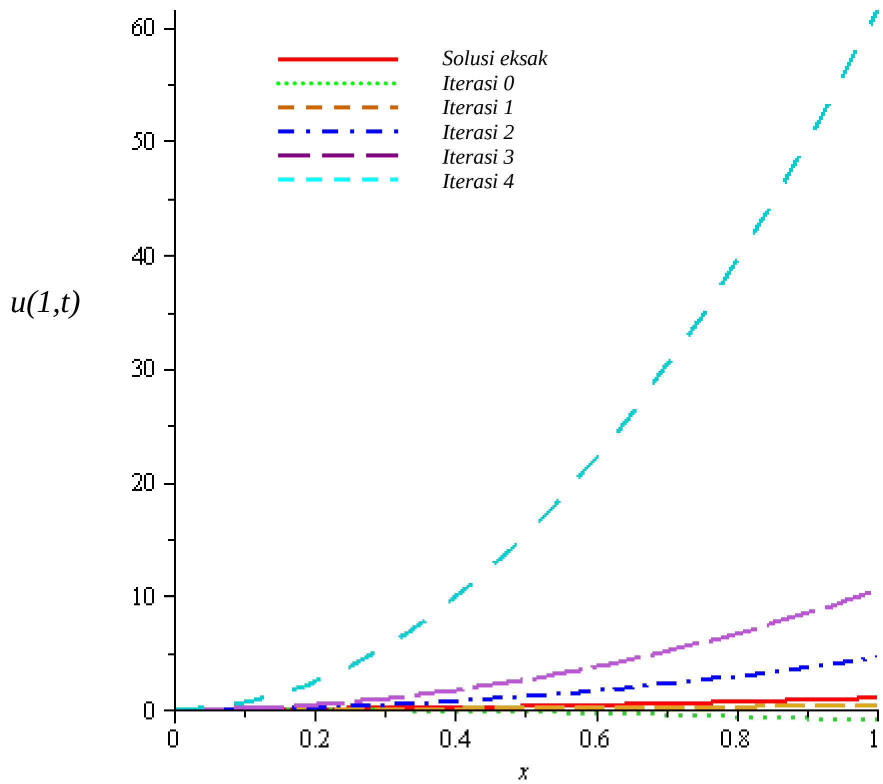
$$u\,(x,t) = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots$$

$$u\;_2(x,t) = \; 2x^2t + 4x^2t^2 - \frac{8}{3}x^2t^3 - \frac{32}{12}x^2t^4 + \frac{64}{15}x^2t^5 - \frac{128}{24}x^2t^6 + \frac{128}{72}x^2t^7$$

Sehingga akurasi yang diperoleh tergantung pada banyak iterasi yang ada.

dengan solusi eksak yang diberikan yaitu $u\,(x,t) = x^2$

Gambar 4.5 menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi untuk beberapa iterasi terhadap penyelesaian eksak persamaan diferenesial parabolik nonlinier di $t = 0..1$

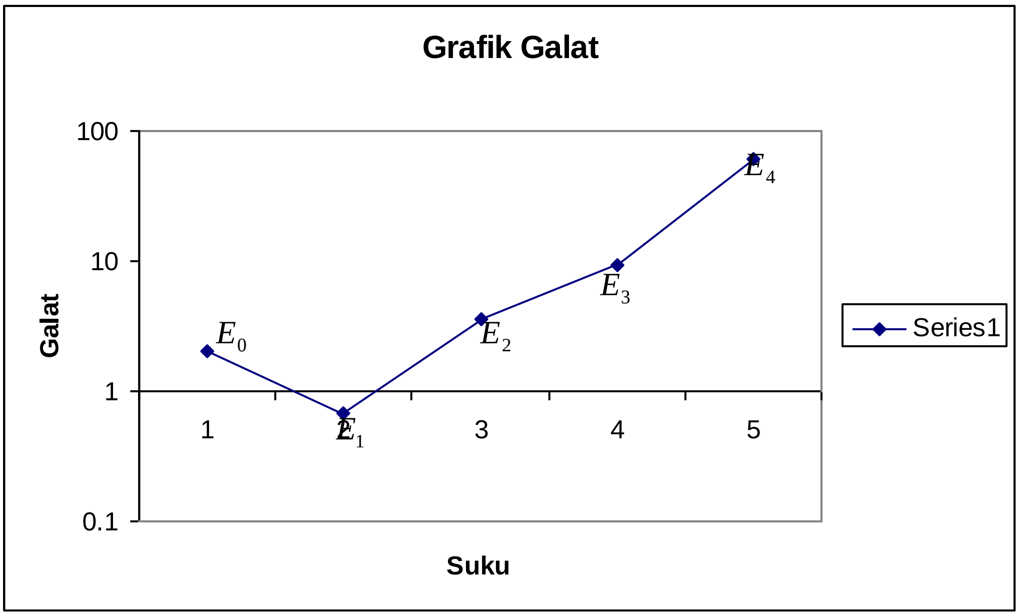


Gambar 4.5 Hampiran penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier pada persamaan (4.11) dengan $u(x,0) = x^2$, $0 < x < 1$ untuk beberapa jumlah suku.

Tabel 4.3 Galat persamaan (4.11) dengan $t = 1$

x	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
0.2	0.08	0.0266666667	0.1434920636	0.379155058	2.421215748
0.4	0.32	0.1066666667	0.5739682537	1.516620231	9.684863000
0.6	0.72	0.240000000	1.291428571	3.412395520	21.79094186
0.8	1.28	0.426666667	2.295873016	6.06648092	38.73945198
1	2	0.666666667	3.587301587	9.478876444	60.53039383

Berdasarkan pada gambar 4.5, dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentuk oleh $u_4(x,t)$ lebih mendekati dibandingkan kurva- kurva lainnya. Hal ini menunjukan iterasi lebih banyak akan mendekati kurva penyelesain eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada gambar 4.6



Gambar 4.6 kecepatan modifikasi metode iterasi variasi menghampiri persamaan diferensial parabolik nonlinier pada persamaan (4.11) dengan $u(x,0) = x^2$.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari Tugas Akhir ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

a) Persamaan diferensial parabolik nonlinier $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) + g(x,t)$ baik yang homogen $g(x,t) = 0$ maupun yang nonhomogen $g(x,t) \neq 0$ berdasarkan masalah syarat batas $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dapat diselesaikan dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi.

b) Hasil yang diperoleh dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi semakin mendekati nilai eksak yang dapat dilihat pada grafik 4.2 contoh 4.5 dan pada grafik 4.4 contoh 4.6. untuk persamaan yang homogen $g(x,t) = 0$.

c) Semakin banyak iterasi yang digunakan maka hasilnya cukup akurat untuk penyelesaian persamaan homogen dengan kata lain dapat memperkecil error.

d) Kemudian untuk penyelesaian persamaan nonhomogen $g(x,t) \neq 0$ menggunakan modifikasi metode iterasi variasi tidak mendekati nilai eksak. Jadi, untuk penyelesaian persamaan nonhomogen pada persamaan (4.11) dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi tidak bagus hasilnya.

5.2 Saran

Tugas Akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonliner $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) + g(x,t)$ baik yang homogen $g(x,t) = 0$ maupun yang nonhomogen $g(x,t) \neq 0$ berdasarkan nilai awal $u(0,t) = u(L,t) = 0$dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dengan modifikasi metode iterasi variasi. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan skripsi ini, penulis sarankan membahas tentang modifikasi lain yang membahas penyelesaian parabolik nonlinier homogen dan non homogen, misalnya modifikasi metode iterasi variasi dengan metode adomian, atau dengan metode lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdoul R, et al, Application of Variational Iterative Method to Parabolic Problems, *Applied Mathematical Sciences, Vol. 3 no. 19, 927-934*. 2009.

Adomian. G, Application of Decompotition to Hyperbolic, Parabolic, and Elliptic Partial Differential Equations, *canter for Applied Mathematics, internat. J. & Math, Sci, university of Georgia, Vol. 12 no. 1, 137-144.* 1989.

Aslam Noor, Muhammad, Modified Variational Iteration Method for Heat and Wave Like Equations, *Acta Appl Math, Vol. 104 no. 257-269*. 2008.

Batiha, B, et al, Application of Variational Iteration Method to a general Riccati Equation, *International Mathematical Forum, Vol. 2 no. 56, 2759-2770*. 2007.

Esmail Hessameddini, The Use of Variational Iteration Method and Homotopy Pertubation Method for Painleve' Equation I, *Applied Mathematics Sciences, Vol. 3 no. 38, 1861-1871*. 2009.

He, J.H, Varitional Iteration Method-some Recent Result and New Interpretations, *J. Comput. Appl Math, Vol. 207 No. 3-17.* 2007.

Jafari, Hossein, et al, Application of Homotopy Pertubation Method for Solving Gas Dynamics Equation, *Applied Mathematical Sciences, Vol.2 no. 48, 2393-2396.* 2008.

K. A. Stroud, *Matematika Teknik*, Erlangga, 2001

Kaya. D, A New Approach to Solve a Nonlinier Wave Equation, *Bull Malaysia Math. Soc, Vol.21 no. 2, 95-100.* 1998.

Kaya.D et al, On The Solutions of The Nonlinier Wave Equation by The Decompotition Method, *Bull Malaysia Math. Soc. Vol.* 2 *no. 22, 151-155*. 1999.

Lin Jin, Application of Variational Iteration Method to the Fifth-Order KdV Equation, Int. J. Contemp. *Math. Sciences, Vol. 3 no. 5, 213-221*. 2008.

Mustafa Inc, On Numerical Solutions of Partial Differential Equations By Decompotition Method, *Kragujevac J. Math*, ***26****: 153-164*. 2004.

Noor, M.A, T. Mohtuddin, Modofied Variation Iteration Methods for Solving Fourth-order Boundart Problems, *Aplied mathematich Computation*, ***29*** *: 81-94*. 2009.

Noor, M.A, T. Mohtuddin, Modofied Variation Method For Heat and Wave-Like Equations, *Aplied mathematich Computation,* ***29*** *: 81-94*. 2008.

Stavroulakis, Ioannis P, Stepean A Tersian, *Partial Differtial Equations*, World Scientific Publishing Co. Re. Ltd. 2004.

Taghipour. R, Application of Homotopy Pertubation Method on Some Linier and Nonlinier Parabolic Equations, *IJRRAS Department of Civil Engineering, Islamic Azad University, Vol. 6 no. 1, 55-59.* 2011.

Tukrar R, Introduction to Fifth-order Iterative Methods for Solving Nonlinier Equations, *international Journal of Computation and Applied Mathematics*, *Vol. 4 no. 2, 135-140*. 2009.

Wartono, kamairoh bakri, Penyelesaian Persamaan Diferensial Parabolic Nonlinier Dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian, *Sains, Teknologi dan Industri, Vol 8 no.1, 1-57.* 2010.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika adalah ilmu yang mempunyai peranan penting dalam perkembangan teknologi. Tampak jelas bahwa semua yang berhubungan dengan teknologi kebanyakan memerlukan perhitungan matematika. Misalnya dalam pembuatan alat-alat elektronik, mesin-mesin dan sebagainya, semua itu memerlukan perhitungan matematika. Oleh karena itu, matematika sangat diperlukan dalam semua bidang.

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai ilmu pengetahuan, seperti dalam bidang fisika, kimia, ekonomi, atau pada persoalan rekayasa. Seringkali model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang tidak ideal atau rumit penyelesaiannya. Misalnya persoalan pada persamaan diferensial, dimana pada persamaan diferensial terkadang muncul berbagai bentuk persamaan diferensial linier dan nonlinier. Kemudian penerapan ilmu matematika yang sangat berpesan penting salah satunya adalah persamaan diferensial nonlinier.

Persamaan diferensial nonlinier terdiri dari beberapa macam persamaan diantaranya persamaan hiperbolik nonlinier, persamaan parabolik nonlinier, persamaan eliptik nonlinier, dan sebagainya. Persamaan-persamaan tersebut mempunyai penyelesaian yang berbeda-beda.

Persamaan diferensial nonlinier sebagian besar sulit dan rumit untuk diselesaikan secara analitik. Berbagai metode semi analitik melalui pendekatan deret yang telah diusulkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier.

Mustafa (2004) menyelesaikan persamaan parabolik nonlinier menggunakan metode dekomposisi adomian, dengan persamaan:

$$u_t = u_{xx} + f(x,t) \text{, dengan } u(x,0) = f(x) \qquad (1.1)$$

Selanjutnya, Jafari (2008) menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier menggunakan metode homotopi pertubasi dengan persamaan :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}(u^2)_x - u(u-1)=0 \quad 0\le x\le 1, t>0, \text{ dengan } u(x,0)=g(x) \qquad (1.2)$$

Selain itu, salah satu metode semi analitik yang sering digunakan adalah metode iterasi variasi (VIM). Beberapa peneliti yang menggunakan metode iterasi variasi (VIM) untuk menyelesaikan persamaan diferensial yaitu Batiha, B (2009) penyelesaian persamaan diferensial linier orde tiga. Kemudian Abdoul R (2009) penyelesaian persamaan parabolik nonhomogen satu dimensi dengan koefisien variabel, ditulis

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\phi(x,t), 0<x<1, t>0 \qquad (1.3)$$

dengan kondisi awal

$$u(x,0)=f(x)$$

Selanjutnya, metode iterasi variasi (VIM) dimodifikasi oleh He (2007) dengan menggunakan homotopi. Beberapa penulis yang menggunakan modifikasi metode iterasi variasi misalnya : Noor, M.A (2008) memodifikasi metode iterasi variasi dengan homotopi untuk meyelesaikan persamaan diferensial biasa, Mohyuddin, ST, et al (2009) modifikasi metode iterasi variasi untuk penyelesaian persamaan panas , Mohyuddin, ST, et al (2010) menyelesaikan persamaan Schrodinger .

Berdasakan uraian diatas, maka penulis tertarik untuk menerapkan modifikasi metode iterasi variasi terhadap persamaan parabolik nonlinier. Oleh karena itu, judul dari tugas akhir adalah **“ Penyelesaian Persamaan Parabolik Nonlinier dengan Menggunakan Modifikasi Metode Iterasi Variasi“**

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian diatas, maka permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini, yaitu :

Bagaimana menentukan penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi.

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini akan dibahas mengenai penyelesaian persamaan parabolik nonlinier dengan variabel bebas x dan t dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi.

1.4 Tujuan dan Manfaat

1) Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk :

Menentukan penyelesian persamaan diferensial parabolik nonlinier dengan menggunakan modifikasi metode iterasi variasi.

2) Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan diatas, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut :

a. Penulis mengharapkan dapat menyelesaiakan persamaan parabolik nonlinier homogen dan nonhomogen dengan modifikasi metode iterasi variasi.
b. Penulis dapat mengetahui tentang solusi hampiran dari persamaan diferensial parabolik nonlinier dengan menggunakan modifikasi metode iterai variasi.
c. Penulis dapat mengetahui galat dari penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier dengan cara membandingkan nilai eksak yang telah diketahui dengan nilai hampirannya.

1.5 Sitematika Penulisan

Sistematika penulisan pada Tugas Akhir ini terdiri dari beberapa bab yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulis, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang digunakan, seperti : persamaan diferensial, persamaan diferensial parsial, klasifikasi persamaan diferensial, persamaan diferensial parsial parabolik, metode iterasi variasi dan modifikasi metode iterasi variasi

Bab III Metodologi

Bab ini berisikan studi literatur yang digunakan penulis dan berisikan serta langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan dari Tugas Akhir ini.

Bab IV Pembahasan

Bab ini berisikan tentang modifikasi metode iterasi variasi yang akan digunakan untuk menyelesaian atau membahas persamaan diferensial parsial nonlinier parabolik $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) + g(x,t)$ berdasarkan syarat batas $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ serta memperlihatkan grafik *galat*.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dari seluruh pembahasan dan saran- saran yang berguna untuk pembaca.