Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 11
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Pekanbaru,12 November 2019

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Determinan Dan Invers Matriks Blok $\mathbf{2 \times 2}$ Dalam Aplikasi Matriks $\boldsymbol{FLScirc_r}$ Bentuk Khusus

Zulfa Hasanah[1], Yuslenita Muda[2], Fitri Aryani[3] , Corry Corazon Marzuki[4]
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email : zulfa.hasanah11@gmail.com

Abstrak

Matriks blok adalah matriks persegi yang diblok dengan memberi garis vertical dan horizontal sehingga menjadi submatriks dengan ukuran yang lebih kecil . Matriks blok dapat diaplikasikan dalam mencari dterminan dan invers dari suatu matikrs persegi . Penelitian ini bertujuan untuk menentukan determinan dan invers dari suatu matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus dengan memblok matriks tersebut menjadi matriks blok 2×2, terdapat beberapa langkah yang dikerjakan. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa matriks taksingular dapat dicari determinan dan invers nya dengan cara memblok matriks tersebut menjadi matriks yang lebih kecil dengan salah satu dari submatriks P memiliki determinan yang tidak sama dengan nol.

Kata Kunci: *blok $\mathbf{2 \times 2}$; $\boldsymbol{FLScirc_r}$; determinan; invers; komplemen schur; matriks*

Abstract

Block matrikx is a square matrix that is bloked by giving vertical and horizontal lines so that it becomes a submatrix with a small size . Block matrix can be applied in finding determinants and invers of a square matrix . This study aims to determine the determinant and invers of a specially $\boldsymbol{FLScirc_r}$ by blocking the matrix into a $\mathbf{2 \times 2}$ block matrix, there are steps. The result of this study indicate that the nonsingular matrix can be found determinant and its inverse by blocking the matrix into small matrices with one of the submtrix P having a determinant that not aqual zero .

Keywords : *block; determinant;invers;$FLScirc_r$; schur complements; matrix*

1. Pendahuluan

Determinan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan aljabar linear, antara lain mencari invers matriks, menentukan persamaan karakteristik suatu permasalahan dalam menentukan nilai eigen, dan untuk menyelesaikan persamaan linear .

Untuk menghitung nilai determinan dari suatu matriks dapat menggunakan beberapa metode seperti metode kofaktor, metode sarrus, aturan segitiga, reduksi baris, operasi baris elementer (OBE), operasi kolom elementer (OKE) . Sedangkan untuk menentukan invers dari suatu matriks dapat menggunakan metode adjoin, eliminasi gauss dan gauss jordan, dekomposisi crout dan komplemen schur .

Menurut Zhao Lin Jiang dan Zong Ben Xu (2005), matriks *circulant* mempunyai bentuk baru yaitu $FLScirc_r$ yang merupakan bentuk lain dari matriks $FLDcirc_r$. Bentuk umum dari matriks $FLScirc_r$ adalah sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0 - a_{n-1} & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ ra_{n-2} & ra_{n-1} - a_{n-2} & a_0 - a_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ra_2 & ra_3 - a_2 & ra_4 - a_3 & \cdots & a_0 - a_{n-1} & a_1 \\ ra_1 & ra_2 - a_1 & ra_3 - a_2 & \cdots & ra_{n-1} - a_{n-2} & a_0 - a_{n-1} \end{bmatrix},$$

dapat ditulis dengan $A = FLScirc_r(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. (1)

Matriks blok digunakan untuk menyederhanakan matriks yang ukurannya besar menjadi kecil sehingga lebih mudah dioperasikan untuk tujuan tertentu, salah satunya yaitu untuk menentukan determinan. Menurut Ilhamsyah Dkk (2017) Matriks blok adalah matriks persegi yang dipartisi atas dua baris dan dua kolom sub-sub matriks yang disebut matriks blok 2×2. Gambaran secara umum matriks blok 2×2 adalah sebagai berikut:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ \hline a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(k-1)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \quad (2)$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Berdasarkan beberapa penelitian di atas penulis tertarik untuk mengulas kembali penelitian Zhao Lin Jiang dan Zong Ben Xu (2005) tentang matriks $FLScirc_r$ dengan bentuk khusus matriks yang digunakan adalah :

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a \\ ra & -a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dengan } a, r \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

Persamaan (3) dapat ditulis dengan $A_n = FLScirc_r\ (0, a, 0, \ldots, 0)$.

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan determinan dan invers matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus berukuran $n \times n$ dengan metode blok 2×2 .

2. Metode dan Bahan Penelitian

Definisi 1 (Ilhamsyah dkk, 2017): Matriks persegi yang dipartisi atas dua baris dan dua kolom sub-sub matriks yang disebut matriks blok 2×2. Gambaran secara umum matriks blok 2×2 adalah sebagai berikut:

Misalkan P merupakan suatu matriks $m \times n$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(k-1)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kemudian diberi garis horizontal dan vertikal sehingga menjadi matriks seperti Persamaan (2) :

Sehingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Definisi 2 (M. Radivo Zaglia, 2004): Komplemen *schur* merupakan salah satu metode atau cara dalam analisis matriks yang banyak menggunakan pertidaksamaan matriks. Dalam teori tentang matriks, komplemen *schur* biasanya di gunakan pada matriks kuadrat yang berukuran besar dimana matriks tersebut telah di blok.

Diberikan matriks :

$$\underset{(k+l) \times (m+n)}{P} = \begin{pmatrix} \underset{k \times m}{A} & \underset{k \times n}{B} \\ \underset{l \times m}{C} & \underset{l \times n}{D} \end{pmatrix}$$

1. Jika A adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari A adalah $D - CA^{-1}B$.
2. Jika D adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari D adalah $A - BD^{-1}C$.
3. Jika B adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari B adalah $C - DB^{-1}A$.
4. Jika C adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari C adalah $B - AC^{-1}D$.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Teorema 1 (Ilhamsyah dkk, 2017) Jika A dan B merupakan matriks $n \times n$ maka
(i) $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$
(ii) $det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = det(A) \cdot det(D)$ jika A dan D merupakan matriks persegi

Teorema 2 (Ilhamsyah dkk, 2017) Jika P merupakan matriks $n \times n$ dan $P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ maka determinan dari P adalah

$$det(P) = det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{cases} det(A) \cdot det(D - CA^{-1}B)\ jika\ A\ memiliki\ invers \\ det(D) \cdot det(A - BD^{-1}C)\ jika\ D\ memiliki\ invers \end{cases}$$

Lemma 1 (Ilhamsyah dkk, 2017) Misalkan J merupakan matriks blok $n \times n$ dengan entri 1 pada diagonal keduanya dan 0 untuk yang lainnya, yaitu

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka } det(J) = (-1)^{\frac{1}{2}(n)(n-1)}$$

Matriks J pada Lemma 1 disebut juga dengan matriks diagonal kedua, matriks J memiliki sifat $JJ = I$ dan $JJ^T = I$ sehingga $P = J(PJ^T)$.

Jika submatriks A dan D pada matriks P tidak memiliki invers maka dengan memanfaatkan Lemma 4 dapat digunakan teorema berikut dalam mencari determinan dari matriks P.

Teorema 3 (Ilhamsyah dkk, 2017) Jika P merupakan matriks $n \times n$ serta B dan C merupakan matriks $p \times p$ atau $q \times q$ maka:

(i) $det\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} det(A) \cdot det(B)$

(ii) $det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} \cdot det(B) \cdot det(C - DB^{-1}A)\ jika\ B\ memiliki\ invers \\ (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} \cdot det(C) \cdot det(B - AC^{-1}D)\ jika\ C\ memiliki\ invers \end{cases}$

Pembuktian pernyataan matematika yang digunakan pada makalah ini adalah induksi matematika. Berikut diberikan definisi mengenai induksi matematika. Materi yang berhubungan dengan induksi matematika berdasarkan. Misalkan $P(n)$adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan akan dibuktikan bahwa$P(n)$ tersebut benar untuk semuabilangan bulat $n \geq 1$, maka untuk membuktikan pernyataan ini, cukup dengan menunjukkan bahwa:
1. $P(1)$benar, dan
2. Jika $P(k)$benar, maka $P(k+1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$.

Definisi 3 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) : Jika A dan B adalah matriks bujursangkar dan jika matriks B dapat dicari sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers dari A dan dapat ditulis $B = A^{-1}$.

Suatu matriks A mempunyai invers yang ditulis dengan A^{-1} apabila matriks A dapat dibalik (*invertible*) dimana $\det(A) \neq 0$ dan matriks A disebut juga dengan matriks non singular dan disebut singular apabila A tidak mempunyai invers.

Definisi 4 (Tzon Tzer Lu dan Sheng Hua Shiou, 2002): Sebuah matriks persegi tak singular P dan mempunyai P^{-1} dapat dipartisi menjadi blok 2 × 2 seperti persamaan (2).

Untuk membuat perkalian R dengan R^{-1} dan R^{-1} dengan R, ukuran semua blok tidak dapat sembarang. Misalkan$A, B, C,$ dan D mempunyaiukuran $k \times m,\ k \times n,\ l \times m$ dan $l \times m$, berturut-turut dengan $k + l = m + n$. Lalu ukuran E, F, G dan H mempunyai ukuran $m \times k,\ m \times l,\ n \times k,$ dan $n \times l$. Dengan kata lain, R^{-1} ada di dalam partis transpos dari R.

Di bagian ini, untuk E, F, G dan H istilah dari $A, B, C,$ dan D. Misalkan salah satu blok dari $A, B, C,$ dan D adalah matriks persegi tak singular untuk menghindari invers umum. Sehingga, mempunyai tiga kemungkinan partisi:

1. Partisi diagonal persegi: $k = m$ dan $l = n$
2. Kuadrat partisi diagonal: $k = n$ dan $l = m$
3. Semua partisi persegi: $k = l = m = n$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Teorema 4 (Tzon Tzer Lu dan Sheng Hua Shiou, 2002) : Misalkan P merupakan matriks persegi:

i. Diasumsikan submatriks A pada matriks P dalam Persamaan (1.2) adalah tak singular. Matriks P pada Persamaan (1.2) punya invers jika dan hanya jika komplemen *Schur* dari A punya invers dan $(D - CA^{-1}B)$ juga memiliki invers didapat

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}.$$

ii. Diasumsikan submatriks D pada matriks P dalam Persamaan (1.2) adalah tak singular. Matriks P pada Persamaan (1.2) punya invers jika dan hanya jika komplemen *schur* dari D punya invers dan $(A - BD^{-1}C)$ juga memiliki invers didapat

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}.$$

iii. Diasumsikan submatriks B pada matriks P dalam Persamaan (1.2) adalah tak singular. Matriks P pada Persamaan (1.2) punya invers jika dan hanya jika komplemen Schur dari B punya invers dan $(C - DB^{-1}A)$ juga memiliki invers didapat

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}.$$

iv. Diasumsikan submatriks C pada matriks P dalam Persamaan (1.2) adalah tak singular. Matriks P pada Persamaan (1.2) punya invers jika dan hanya jika komplemen Schur dari C punya invers dan $(B - AC^{-1}D)$ juga memiliki invers didapat

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1} & C^{-1} + C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & -(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}.$$

Teorema 5 (Tzon Tzer Lu dan Sheng Hua Shiou, 2002) : Jika P merupakan matriks persegi, maka:

i. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$ akan memiliki matriks invers jika dan hanya jika $B\ dan\ C$ memiliki invers dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1} - DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

ii. Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ akan memiliki matriks invers jika dan hanya jika $B\ dan\ C$ memiliki invers dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$.

3. Hasil dan Pembahasan

Bab ini berisi proses untuk menentukan bentuk umum determinan dan invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus . Proses pertama mencari determinan dengan cara yaitu menentukan nilai determinan berdasakan teorema 3, menduga bentuk umum determinan matriks blok dan membuktikan dengan langkah induksi. Proses kedua mencari invers yaitu dengan cara memblok matriks dan menentukan submatriks $FLScirc_r$ bentuk khusus, membuktikan bentuk umum dalam menentukan invers submatriks yang *invertible* dari matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus menggunakan komplemen *Schur* dan yang terakhir adalah membuktikan bentuk umum menentukan invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus menggunakan komplemen *Schur* .

Berikut proses dalam menentukan matriks blok 2×2 pada Persamaan (4) dengan menggunakan komplemen *schur* berorde 3×3 sampai $n \times n$ yang disajikan sebagai berikut.
Tentukan determinan dan invers matriks blok 2×2 dari matriks berikut :

$$P_3 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ \hline ra & -a & 0 \end{array}\right], n \geq 3$$

A. Menentukan determinan matriks blok 2×2

maka dapat dimisalkan :

$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, C = [ra]\ , dan\ D = \ [-a \quad 0]$

Berdasarkan Teorema 3 untuk mencari determinan matriks blok 2×2 maka

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$P_3 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ \hline ra & -a & 0 \end{array}\right]$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} \det(B).\det(C)$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}(3^2-2(3)+(3-1)^2+1^2)}\, a^2 .ra$$
$$= ra^3$$

Dengan menggunakan cara yang sama sehingga diperoleh hasil determinan berorde 3×3 sampai 15×15 . Berikut disajikan determinan matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLScirc_r$ untuk P_{13} sampai P_{15} .

$$\det(P_{13}) = (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)}.\det(B).\det(C)$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}(13^2-2(13)+(13-1)+1}.a^{12}.ra = ra^{13}$$

$$\det(P_{14}) = (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)}.\det(B).\det(C)$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}(14^2-2(14)+(14-1)+1}.a^{13}.ra = -ra^{14}$$

$$\det(P_{14}) = (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)}.\det(B).\det(C)$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}(15^2-2(15)+(15-1)+1}.a^{14}.ra = ra^{15}$$

Setelah mendapatkan nilai-nilai determinan dari matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLScirc_r$ berbentuk khusus berorde 3×3 sampai 15×15 , maka dapat diduga bentuk umum determinan matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLScirc_r$ berbentuk khusus tersebut, yaitu

$$P_n = (-1)^{n-1}\, r\, a^n \quad , n \geq 3 \qquad (4)$$

Teorema 6 Diberikan P_n suatu matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus pada persamaan (3) , maka nilai determinan matriks P_n adalah

$$P_n = (-1)^{n-1}\, r\, a^n \quad , n \geq 3$$

Bukti :

1. Akan ditunjukkan P(3) benar . Perhatikan bahwa
   $P(3) = |A_3| = (-1)^{3-1}ra^3$
   $= ra^3$

Dengan memperhatikan determinan matriks $FLScirc_r$ orde $n \times n$ maka $P(3)$ benar .

2. Langkah induksi .
   Asumsikan $P(k)$ benar, yaitu $P(k): |A_k| = (-1)^{k-1}ra^k, k \geq 3$ selanjutnya akan dibuktikan $P(k+1)$ juga benar, yaitu :
   $P(k+1): |A_{k+1}| = (-1)^k ra^k, k \geq 3$
   Dengan memperhatikan persamaan umum tersebut maka $P(k+1)$ benar. Sehingga teorema 6 terbukti .

B. Menentukan invers matriks blok 2×2

1. Memblok matriks $FLScirc_rP$ menjadi matriks blok 2×2 sesuai Persamaan (4) berorde $n \times n$ sebagai berikut :

$$P_3 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ \hline ra & -a & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Maka invers submatriks tersebut adalah

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$
$$C = [ra]\ ,\ C^{-1} = \left[\frac{1}{ra}\right]$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ D = [-a \quad 0]$$

Kemudian mencari invers P_3 berdasakan Teorema 4 diperoleh bahwa

$$(P_3)^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(C-DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C-DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(C-DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C-DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}.$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Sub matrriks A merupakan matriks nol maka diperoleh $(C - DB^{-1}A)^{-1} = C^{-1}$, sehingga rumus diatas dapat juga ditulis sebagai berikut.

$$(P_3)^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = -(C^{-1}DB^{-1}) = -\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{ra}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a}\end{bmatrix}\right) = -\begin{bmatrix}-\frac{1}{ra} & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{ra} & 0\end{bmatrix}$$

$$F = C^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{ra}\end{bmatrix}$$

$$G = B^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a}\end{bmatrix}$$

$$H = A$$

Karena $(P_3)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right] = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$, maka $(P_3)^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{ra} & 0 & \frac{1}{ra} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0\end{bmatrix}$.

Dengan menggunakan cara yang sama sehingga diperoleh hasil invers matriks blok 2×2 . Berikut disajikan invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLScirc_r$ untuk P_{13} sampai P_{15}.

$$(P_{13})^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{ra} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{ra} \\
\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0
\end{bmatrix}$$

$$(P_{14})^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{ra} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{ra} \\
\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0
\end{bmatrix}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$(P_{15})^{-1}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{ra} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{ra}\\
\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0
\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan nilai-nilai invers dari matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus berorde 3×3 sampai 15×15 maka dapat diduga bentuk umum invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLScirc_r$ berbentuk khusus tersebut yaitu

$$(P_n)^{-1}=\begin{bmatrix}
ra^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & ra^{-1}\\
a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & a^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{-1} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^{-1} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^{-1} & 0
\end{bmatrix}$$

Berdasarkan dugaan tersebut, maka bentuk umum invers submatriks $FLScirc_r$ orde $n\times n$ disajikan pada teorema berikut .

Teorema 7 Diberikan P_n suatu matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus berorde $n\geq 3$ pada persamaan (3) dengan $a,r\in\mathbb{R}$ maka invers matriks P_n adalah

$$(P_n)^{-1}=\begin{bmatrix}
ra^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & ra^{-1}\\
a^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & a^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{-1} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^{-1} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a^{-1} & 0
\end{bmatrix}$$

Bukti :

Berdasarkan Defenisi 3, maka pembuktian Teorema 7 cukup dengan menunjukkan bahwa terdapat matriks identitas I sedemikian sehingga $PP^{-1}=P^{-1}P=I$.

Pembuktian Invers kiri :

$$PP^{-1}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}=I$$

Pembuktian Invers kanan :

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$P^{-1}P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Berdasarkan pembuktian diatas terdapat matriks identitas I sedemikian sehingga $PP^{-1} = P^{-1}P = I$. Sehingga teorema 7 terbukti.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang teah dipaparkan, maka dapat ditarik kesimpulan, yaitu :

1. Determinan matriks blok 2×2 dapat dicari dengan langkah berikut :
Misalkan submatriks A dan D atau B dan C merupakan matriks persegi, Jika A dan D merupakan matriks persegi, maka dicari determinan dan invers matriks A dan D sehingga didapat determinan matriks P yaitu
$\det(\mathrm{P}) = \mathrm{Det}\ (A)\ .\det(D - CA^{-1}B)\ jika \det(A) \neq 0$ atau
$\det(\mathrm{P}) = \mathrm{Det}\ (D).\det(A - BD^{-1}C)\ jika \det(D) \neq 0$.
Jika B dan C merupakan matriks persegi, maka dicari determinan matriks P yaitu $\det(P) = (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} \det(B).\det(C - DB^{-1}A)$ atau
$\det(P) = (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} \det(C).\det(B - AC^{-1}D)$.
2. Invers dari matriks P dapat ditentukan dengan memisalkan submatriks A, B, C dan D memiliki invers atau dterminannya tidak sama dengan nol . Misalkan $P^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$. Entri dari submatriks E, F, G dan H dapat dicari jika :
   (i) submatriks A memiliki invers dan submatriks $H = (D - CA^{-1}B)$ memiliki invers maka
   $$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$
   (ii) submatriks D memiliki invers dan submatriks $E = (A - BD^{-1}C)$ memiliki invers maka
   $$P^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$$
   (iii) submatriks B memiliki invers dan submatriks $F = (C - DB^{-1}A)$ memiliki invers maka
   $$P^{-1} = \begin{bmatrix} -(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}$$
   (iv) submatriks C memiliki invers dan submatriks $G = (B - AC^{-1}D)$ memiliki invers maka
   $$P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1} & C^{-1} + C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & -(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$$

Daftar Pustaka

[1] Anton H, dan Rorres, Chris. Aljabar Linier Elementer, Edisi Kedelapan. Jakarta: Erlangga. 2004.
[2] Munir R. Matematika Diskrit, Edisi Ketiga. Bandung:Informatika Bandung. 2007
[3] Ilhamsyah, Helmi, dan F.Fran. “Determinan dan Invers Matriks Blok 2×2".Vol 06, No.3, hal.193-202. 2017.
[4] Lin Jiang Z, Ben Xu Z.”Efficient Alghorithm For Finding The Inverse And The Group Inverse of FLS r-Circulant Matrix” . J . Appl. Math & Computing. Vol 18, No 1-2, hal 45-47, 2005.
[5] Tzon T.L dan Sheng H.S. “Inverses of 2×2 Block Matrices”. *Computer and Mathematic with Application*, Vol 43, hal.119-129. 2002.
[6] Zaglia, M. R. “Pseudo-Schur Complements and their Properties”. *Apll.Numer Math*. Vol 50, hal 511-519. 2004.