MENENTUKAN NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS INTERVAL

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

oleh

DEVI SAFITRI
10654004470

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2011

MENENTUKAN NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS INTERVAL

DEVI SAFITRI
NIM: 10654004470

Tanggal Sidang : 05 Juli 2011
Periode Wisuda: November 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Matriks interval adalah matriks yang elemen-elemen di dalamnya berupa interval tertutup dengan satu matriks batas bawah dan satu matriks batas atas sebagai penyusunnya. Salah satu kegunaan matriks interval yaitu seperti dalam pemodelan suatu sistem jaringan graf untuk jaringan dinyatakan dengan menggunakan matriks, sedangkan sifat periodik sistem dianalisis melalui nilai eigen dan vektor eigen matriks interval. Tugas akhir ini membahas cara untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks interval $A \in I(R)^{n\times n}_{max}$ dengan pendekatan aljabar *max-plus.* Nilai eigen dari matriks interval dapat dibentuk dengan menggunakan persamaan:

$$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}) = \oplus_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\oplus_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{A}^{\otimes k}\right)_{ii}\right)$$

Sedangkan vektor eigennya dapat dicari dengan melihat kolom ke-i pada matriks M^*, dimana jika $M_{ii} = 0$, maka kolom ke-i matriks M^* merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_{max}(A)$, Jika matriks $A \in I(R)^{n\times n}_{max}$ *irredusibel*, maka nilai eigen matriks A tunggal.

Kata kunci : *aljabar max-plus, matriks interval, nilai eigen dan vektor eigen.*

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah nilai eigen adalah masalah yang sering dibahas dalam aljabar linear, khususnya mengenai matriks. Mempelajari nilai eigen tidak akan terlepas dari mempelajari matriks. Biasanya matriks yang akan diselesaikan elemen-elemen penyusunnya berupa bilangan riil atau bilangan kompleks.

Menariknya, dalam tugas akhir ini akan dibahas matriks yang elemen-elemen didalamnya berupa interval tertutup dengan satu matriks batas bawah dan satu matriks batas atas sebagai penyusunnya yang disebut matriks interval. Seperti matriks biasa matriks interval juga mempunyai nilai dan vektor eigen untuk mendapatkan penyelesaiannya dan mengetahui kestabilan sistem. Untuk menentukan nilai dan vektor eigen suatu matriks interval dapat ditentukan dengan pendekatan aljabar *max-plus*.

Aljabar *max-plus* adalah aljabar atas bilangan riil yang dilengkapi dengan operasi maksimum dan penjumlahan. Operasi-operasi yang berlaku dalam aljabar *max-plus* bersifat *assosiatif, komutatif*, dan *distributif* seperti pada aljabar biasa. Aljabar *max-plus* juga sering digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan seperti pada penjadwalan, transportasi, sistem antrian dan lalu lintas.

Beberapa penelitian sebelumnya telah membahas tentang matriks interval dalam berbagai permasalahan, seperti K. Ganesan (2007) membahas tentang beberapa sifat matriks interval dengan menggunakan operasi aritmatik untuk memecahkan sistem persamaan linear interval. Katarina Cechlarova (2005) membahas tentang vektor eigen matriks interval, Jiri Rohn (2003) membahas determinan dan invers matriks interval dan sebagainya. Berdasarkan jurnal karangan M. Andi rudhito, dkk yang berjudul ”Nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus interval”, maka penulis berminat mengulasnya kembali yaitu membahas tentang menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks interval.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas pada tugas akhir ini adalah ”Bagaimana menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks interval”.

1.3 Batasan Masalah

Untuk mendapatkan hasil yang lebih baik maka penulis membatasi ulasan ini hanya menentukan nilai eigen pada matriks interval yang berukuran 3×3 dengan menggunakan operasi pada aljabar *max-plus*, dengan syarat kolom pada matriks tersebut elemennya tidak semua bernilai ε.

1.4 Tujuan dan Manfaat

1. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen matriks interval.

2. Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan di atas, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut :

a. Penulis mengharapkan dapat mengembangkan wawasan keilmuan dalam matematika mengenai matriks interval.
b. Penulis dapat mengetahui lebih banyak tentang materi matriks interval yang tentunya akan sangat memberikan konstribusi untuk mempermudah dalam menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan matriks interval.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini, adalah sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Berisi tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian serta sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Berisi teori-teori yang mendukung tentang Nilai dan vektor eigen Matriks interval yaitu : matriks, aljabar *max-plus*, graf berarah berbobot, aljabar *max-plus* interval dan matriks interval.

BAB III Metodologi Penelitian

Berisi mengenai Studi pustaka atau literatur, yaitu dengan membaca buku-buku dan sumber-sumber lain yang berhubungan dengan matriks interval.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan cara-cara dengan teoritis dalam mendapatkan hasil penelitian tersebut.

BAB V Penutup

Dalam bab ini akan dijelaskan mengenai kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori pendukung yang berkaitan dengan pembahasan pada Bab VI, diantaranya adalah matriks, aljabar max-plus, graf berarah berbobot, aljabar max-plus interval dan matriks interval.

2.1 Matriks

Seperti yang telah diketahui, bahwa matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan yang dinamakan entri dari matriks tersebut. Ukuran sebuah matriks dinyatakan dalam bentuk jumlah baris dan jumlah kolom yang dimuatnya.

2.2 Aljabar *Max- plus*

Aljabar *Max-plus* yaitu himpunan $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, dengan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real, yang dilengkapi dengan operasi maksimum dan penjumlahan.

Definisi 2.2.1 (Rudhito. dkk. 2008) Diberikan $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{R} \cup \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ dengan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi sebagai berikut:

$$\forall a, b \in \mathbf{R}_\varepsilon, a \oplus b = \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b = a + b \tag{2.1}$$

Contoh 2.2.1

Misalkan $a = 2$ dan $b = 1$, maka tentukan $a \oplus b$ dan $a \otimes b$.

Berdasarkan persamaan (2.1) diperoleh:

i. $a \oplus b = 2 \oplus 1 = \max(2,1) = 2$

ii. $a \otimes b = 2 \otimes 1 = 2 + 1 = 3$

Operator $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ seperti berikut:

Diberikan $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n} = \{\boldsymbol{A} = (A_{ij}) | \boldsymbol{A}_{ij} \in \mathbf{R}_{\max},\}$, untuk setiap $i = 1,2,\cdots.m, j = 1,2,\cdots,n$ dengan $\boldsymbol{A}$ adalah sebuah matriks. Kemudian matriks tersebut akan digunakan dalam operasi aljabar *max-plus*. Adapun operasi aljabar *max-plus* untuk $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ adalah sebagai berikut:

Definisi 2.2.2 (Rudhito. dkk. 2008)

i). Diketahui $\alpha \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$, dan $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ didefinisikan $(\alpha \otimes \boldsymbol{A})$ adalah matriks yang unsur ke-ij nya:

$(\alpha \otimes \boldsymbol{A})_{ij} = \alpha \otimes \boldsymbol{A}_{ij}$, untuk $i = 1,2,\cdots.m, j = 1,2,\cdots,n.$ (2.2)

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Maka $(\alpha \otimes \boldsymbol{A})_{ij}$ dapat dicari dengan melakukan proses seperti berikut:

$$(\alpha \otimes \boldsymbol{A})_{ij} = \alpha \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan diperoleh:

$$(\alpha \otimes \boldsymbol{A})_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha \otimes a_{11} & \alpha \otimes a_{12} & \cdots & \alpha \otimes a_{1n} \\ \alpha \otimes a_{21} & \alpha \otimes a_{22} & \cdots & \alpha \otimes a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \otimes a_{m1} & \alpha \otimes a_{m2} & \cdots & \alpha \otimes a_{mn} \end{bmatrix}$$

Maka berdasasarkan persamaan (2.1) dapat diperoleh:

$$(\alpha \otimes \boldsymbol{A})_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha + a_{11} & \alpha + a_{12} & \cdots & \alpha + a_{1n} \\ \alpha + a_{21} & \alpha + a_{22} & \cdots & \alpha + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha + a_{m1} & \alpha + a_{m2} & \cdots & \alpha + a_{mn} \end{bmatrix},$$

Selanjutnya akan ditentukan operasi aljabar max-plus $(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})$, dengan unsur ke-$ij$ nya yaitu:

$(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij} \oplus \boldsymbol{B}_{ij}$, untuk $i = 1,2,\cdots.m, j = 1,2,\cdots,n.$ (2.3)

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

dan

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Maka $(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})_{ij}$ dapat dicari dengan melakukan proses berikut:

$$(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan diperoleh:

$$(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} \oplus b_{11} & a_{12} \oplus b_{12} & \cdots & a_{1n} \oplus b_{1n} \\ a_{21} \oplus b_{21} & a_{22} \oplus b_{22} & \cdots & a_{2n} \oplus b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \oplus b_{m1} & a_{m2} \oplus b_{m2} & \cdots & a_{mn} \oplus b_{mn} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.1), diperoleh:

$$(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})_{ij} = \begin{bmatrix} \max(a_{11}, b_{11}) & \max(a_{12}, b_{12}) & \cdots & \max(a_{1n}, b_{1n}) \\ \max(a_{21}, b_{21}) & \max(a_{22}, b_{22}) & \cdots & \max(a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(a_{m1}, b_{m1}) & \max(a_{m2}, b_{m2}) & \cdots & \max(a_{mn}, b_{mn}) \end{bmatrix}$$

ii). Diketahui $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times p}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}_{\max}^{p\times n}$ didefinisikan $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})$ adalah matriks yang unsur ke-*ij* nya:

$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} \boldsymbol{A}_{ij} \otimes \boldsymbol{B}_{ij}$, untuk i =1,2,⋯,m, j=1,2, ⋯,n. (2.4)

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$

Maka $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})_{ij}$ dapat dicari dengan melakukan proses sebagai berikut:

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

Misalkan $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix}$

dengan

$$C_{11} = \max\left(a_{11} \otimes b_{11}, a_{12} \otimes b_{21}, \cdots, a_{1p} \otimes b_{p1}\right)$$

$$C_{12} = \max\left(a_{11} \otimes b_{12}, a_{12} \otimes b_{22}, \cdots, a_{1p} \otimes b_{p2}\right)$$

$$\vdots$$

$$C_{1n} = \max\left(a_{11} \otimes b_{1n}, a_{12} \otimes b_{2n}, \cdots, a_{1p} \otimes b_{pn}\right)$$

$$\vdots$$

$$C_{mn} = \max\left(a_{m1} \otimes b_{1n}, a_{m2} \otimes b_{2n}, \cdots, a_{mp} \otimes b_{pn}\right)$$

Definisi 2.2.3 (Farlow, kasie. 2009) Didefinisikan matriks $\boldsymbol{E} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, $(\boldsymbol{E})_{ij} = \begin{cases} 0\,, & \text{jika } i = j \\ \varepsilon\,, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks $\varepsilon \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, $(\varepsilon)_{ij} = \varepsilon$ untuk setiap i dan j. Matriks $\boldsymbol{E}$ disebut juga dengan matriks identitas, adapun bentuk umum matriks $\boldsymbol{E}$ yaitu:

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Pangkat $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ dengan $\mathbf{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli. Dari elemen $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ dalam aljabar *max-plus* didefinisikan dengan:

$$\boldsymbol{A}^{\otimes 0} = \boldsymbol{E} \text{ dan } \boldsymbol{A}^{\otimes k} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}^{\otimes k-1}, \text{ untuk } k = 1,2,\cdots,n \qquad (2.5)$$

Sedangkan untuk menentukan vektor eigen dalam aljabar *max-plus* dapat didefinisikan $\mathbf{R}_{\max}^{n} = \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T | \mathbf{x}_{\boldsymbol{i}} \in \mathbf{R}_{\max}^{n}, i = 1,2, \cdots, n\}$. Perhatikan bahwa $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{R}_{\max}^{n\times 1}$, unsur-unsur dalam $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ disebut vektor atas $\mathbf{R}_{\max}$. Untuk lebih memahami proses perhitungan aljabar *max-plus* dapat diperhatikan pada contoh berikut:

Contoh 2.2.2

a) Misalkan $\alpha = 3$ dan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & \varepsilon \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, tentukan $\alpha \otimes \boldsymbol{A}$.

Penyelesaian:

Berdasarkan persamaan (2.2) serta langkah-langkah operasi yang diberikan maka diperoleh:

$$\alpha \otimes \boldsymbol{A} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & \varepsilon \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \otimes \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 \otimes 0 & 3 \otimes 2 \\ 3 \otimes 1 & 3 \otimes \varepsilon \\ 3 \otimes 3 & 3 \otimes -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+0 & 3+2 \\ 3+1 & 3+\varepsilon \\ 3+3 & 3+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & \varepsilon \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka berdasarkan penghitungan di atas didapat

$$\alpha \otimes \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & \varepsilon \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Diketahui $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, tentukan $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$.

Berdasarkan persamaan (2.3) maka diperoleh:

$$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \oplus 1 & \varepsilon \oplus 2 \\ -1 \oplus 3 & 1 \oplus 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(2,1) & \max(\varepsilon, 2) \\ \max(-1,3) & \max(1,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Maka berdasarkan penghitungan di atas diperoleh:

$$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

c) Misalkan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ \varepsilon & 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, tentukan $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$

Berdasarkan persamaan (2.4) didapat

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ \varepsilon & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 \otimes \varepsilon \oplus 0 \otimes 3 \oplus 5 \otimes 5 & -2 \otimes 2 \oplus 0 \otimes 4 \oplus 5 \otimes 6 \\ \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus 3 \otimes 3 \oplus 2 \otimes 5 & \varepsilon \otimes 2 \oplus 3 \otimes 4 \oplus 2 \otimes 6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \max(\varepsilon, 3,10) & \max(0,4,11) \\ \max(\varepsilon, 6,7) & \max(\varepsilon, 7,8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Jadi berdasarkan penghitungan di atas diperoleh:

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

d) Diberikan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & -1 \end{bmatrix}$, tentukan $\boldsymbol{A}^{\otimes 2}$ dan $\boldsymbol{A}^{\otimes 3}$ dari matriks $\boldsymbol{A}$ tersebut. Berdasarkan persamaan (2.5) diperoleh:

$$\boldsymbol{A}^{\otimes 2} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.4), dimisalkan hasil dari penghitungan $\boldsymbol{A}^{\otimes 2}$ yaitu:

$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$, kemudian akan ditentukan C_{11}, $C_{12}, \cdots, C_{33}$ pada matriks $\boldsymbol{A}^{\otimes 2}$ yaitu sebagai berikut:

$$C_{11} = \max(-1 \otimes -1, 2 \otimes 1, 1 \otimes \varepsilon)$$

$$C_{12} = \max(-1 \otimes 2, 2 \otimes 1, 1 \otimes 3)$$

$$C_{13} = \max(-1 \otimes 1, 2 \otimes \varepsilon, 1 \otimes -1)$$

$$C_{21} = \max(1 \otimes -1, 1 \otimes 1, \varepsilon \otimes \varepsilon)$$

$$C_{22} = \max(1 \otimes 2, 1 \otimes 1, \varepsilon \otimes 3)$$

$$C_{23} = \max(1 \otimes 1, 1 \otimes \varepsilon, \varepsilon \otimes -1)$$

$$C_{31} = \max(\varepsilon \otimes -1, 3 \otimes 1, -1 \otimes \varepsilon)$$

$$C_{32} = \max(\varepsilon \otimes 2, 3 \otimes 1, -1 \otimes 3)$$

$$C_{33} = \max(\varepsilon \otimes 1, 3 \otimes \varepsilon, -1 \otimes -1)$$

Kemudian berdasarkan persamaan (2.1) maka diperoleh:

$$\boldsymbol{A}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} \max(-2,3,\varepsilon) & \max(1,3,4) & \max(0,\varepsilon,0) \\ \max(0,2,\varepsilon) & \max(3,2,\varepsilon) & \max(1,\varepsilon,\varepsilon) \\ \max(\varepsilon,4,\varepsilon) & \max(\varepsilon,4,2) & \max(\varepsilon,\varepsilon,-2) \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh:

$$\boldsymbol{A}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan dicari $\boldsymbol{A}^{\otimes 3}$, dari penghitungan sebelumnya telah diperoleh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

dan

$$\boldsymbol{A}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

dan berdasarkan persamaan (2.5) diperoleh:

$$\boldsymbol{A}^{\otimes 3} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}^{\otimes 2}$$

$$\boldsymbol{A}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama pada penghitungan $\boldsymbol{A}^{\otimes 2}$, misalkan $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{\otimes 3}$ dengan

$$C_{11} = \max(-1 \otimes 3, 2 \otimes 2, 1 \otimes 4)$$

$$C_{12} = \max(-1 \otimes 4, 2 \otimes 3, 1 \otimes 4)$$

$$C_{13} = \max(-1 \otimes 0, 2 \otimes 1, 1 \otimes -2)$$

$$C_{21} = \max(1 \otimes 3, 1 \otimes 2, \varepsilon \otimes 4)$$

$$C_{22} = \max(1 \otimes 4, 1 \otimes 3, \varepsilon \otimes 4)$$

$$C_{23} = \max(1 \otimes 0, 1 \otimes 1, \varepsilon \otimes -2)$$

$$C_{31} = \max(\varepsilon \otimes -1, 3 \otimes 2, -1 \otimes 4)$$

$$C_{32} = \max(\varepsilon \otimes 4, 3 \otimes 3, -1 \otimes 4)$$

$$C_{33} = \max(\varepsilon \otimes 0, 3 \otimes 1, -1 \otimes -2)$$

Dan berdasarkan persamaan (2.1) maka diperoleh:

$$\boldsymbol{A}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} \max(2,4,5) & \max(3,5,5) & \max(-1,3,-1) \\ \max(4,3,\varepsilon) & \max(5,4,\varepsilon) & \max(1,2,\varepsilon) \\ \max(\varepsilon,5,3) & \max(\varepsilon,6,3) & \max(\varepsilon,4,-2) \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh:

$$\boldsymbol{A}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.3 Graf Berarah Berbobot(Rudhito, dkk.2008)

Suatu graf berarah $\boldsymbol{G}$ didefinisikan sebagai suatu pasangan (V,E) dengan Vadalah suatu himpunan tak kosong yang anggotanya disebut titik dan E adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik. Anggota E disebut busur. Untuk busur $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in E$. $\boldsymbol{v}$ disebut titik awal busur dan $\boldsymbol{w}$ disebut titik akhir busur.

Jika suatu graf disajikan dalam gambar, titik digambarkan sebagai noktah yang diberi label dengan nama titik yang diwakilinya. Rusuk digambarkan sebagai kurva atau ruas garis yang menghubungkan noktah-noktah yang bersesuaian pada rusuk. Busur digambarkan sebagai kurva atau ruas garis berarah yang menghubungkan noktah-noktah yang bersesuaian dengan titik awal dan titik akhir busur, dengan tanda panah pada ujungnya yang menandakan arah busur.

Suatu lintasan disebut sirkuit jika titik awal dan titik akhirnya sama. Sirkuit elementer adalah sirkuit yang titik-titiknya muncul tidak lebih dari sekali, kecuali titik awal yang muncul tepat dua kali. Diberikan graf berarah $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}) = (V,E)$ dengan $V = \{1,2,\cdots,p\}$, graf berarah $\boldsymbol{G}$ dikatakan berbobot jika setiap busur $(j,i) \in E$, dikawankan dengan suatu bilangan real $\boldsymbol{A}_{ij}$. Bilangan real $\boldsymbol{A}_{ij}$ disebut bobot busur (j,i), dinotasikan dengan $w(j,i)$. Dalam penyajiannya dengan gambar untuk graf berarah berbobot, busur diberi label dengan bobotnya. Dari pengertian graf berbobot ini, untuk setiap matriks $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ akan bersesuaian dengan suatu graf berarah berbobot seperti diberikan dalam definisi berikut:

Definisi 2.3.1 (Rudhito. dkk. 2008) Diberikan $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$. Graf preseden dari $\boldsymbol{A}$ adalah graf berarah berbobot $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}) = (V,E)$ dengan $V = \{1,2,\cdots,n\}$ dan $E = \{(j,i) \middle| w(i,j) = A_{ij} \neq \varepsilon\}$.

Bobot suatu lintasan didefinisikan sebagai jumlah bobot busur-busur yang menyusunnya(lintasan). Berikut didefinisikan suatu matriks yang graf presedennya terhubung kuat:

Definisi 2.3.2 (Rudhito. dkk. 2008) Diberikan $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ dikatakan *irredusibel* jika graf presedennya terhubung kuat.

Suatu graf berarah $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}) = (V,E)$ dengan $V = \{1,2,\cdots,n\}$ dikatakan terhubung kuat jika untuk setiap $i,j \in V$, $i \neq j$, terdapat suatu lintasan dari i ke j. Teorema berikut memberikan syarat perlu dan cukup matriks *irredusibel*

Teorema 2.3.1 (Rudhito, dkk. 2008) Diberikan matriks $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ *irredusibel* jika dan hanya jika $\left(A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes n-1}\right)_{ij} \neq \varepsilon$ untuk setiap i,j dengan $i \neq j$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$: jika $\boldsymbol{A}$ irredusibel maka $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}) = (V,E)$ dengan $V = \{1,2,\cdots,n\}$ terhubung kuat, yaitu untuk setiap $i,j \in V$, dengan $i \neq j$, terdapat suatu lintasan dari i ke j. Hal ini berarti untuk setiap $i,j \in V$, $i \neq j$ terdapat k dengan $1 \leq k \leq n-1$ sehingga $\left(\boldsymbol{A}^{\otimes k}\right)_{ij} \neq \varepsilon$. Akibatnya $\left(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{\otimes n-1}\right)_{ij} \neq \varepsilon$ untuk setiap i,j dengan $i \neq j$.

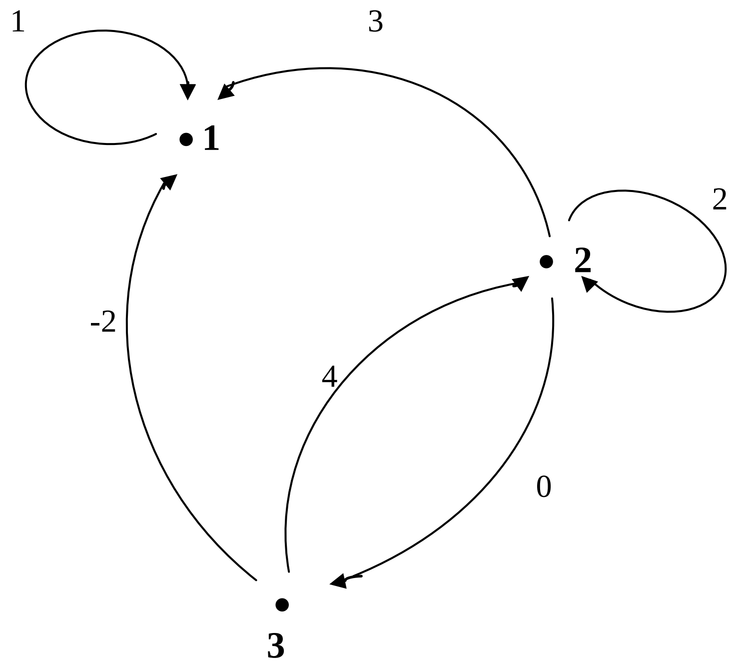
$(\Leftarrow)$: jika $\left(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{\otimes n-1}\right)_{ij} \neq \varepsilon$ untuk setiap i,j dengan $i \neq j$, maka terdapat k dengan $1 \leq k \leq n-1$ sehingga $\left(\boldsymbol{A}^{\otimes k}\right)_{ij} \neq \varepsilon$. Hal ini berarti dalam graf preseden $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}) = (V,E)$ dengan $V = \{1,2,\cdots,n\}$, untuk setiap $i,j \in V$ dengan $i \neq j$ terdapat suatu lintasan i ke j. Akibatnya $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A})$ terhubung kuat, yang berarti bahwa $\boldsymbol{A}$ *irredusibel*.

Untuk lebih memahami pembahasan mengenai graf berarah berbobot akan diberikan pada contoh berikut:

Contoh 2.3.1

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ \varepsilon & 2 & 4 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$.

Graf preseden dari A adalah graf berarah berbobot $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}) = (V,E)$ dengan $V = \{1,2,\cdots,n\}$ dan $E = \{(1,1),(2,1),(3,1),(2,2),(3,2),(2,3)\}$ yang disajikan dalam gambar berikut:



Gambar 2.1 Graf Berarah Berbobot $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$

Perhatikan sebaliknya bahwa untuk setiap graf berarah berbobot $\boldsymbol{G} = (V, E)$ selalu dapat didefinisikan suatu matriks $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ dengan

$$\boldsymbol{A_{ij}} = \begin{cases} w(j,i), & \text{jika } (j,i) \in \boldsymbol{A} \\ \varepsilon, & \text{jika } (j,i) \notin \boldsymbol{A}. \end{cases}$$

Jelas bahwa graf berarah berbobot tersebut merupakan graf preseden dari $\boldsymbol{A}$. Terlihat jelas bahwa graf berarah berbobot dalam Gambar 2.1 di atas bersesuaian dengan matriks $\boldsymbol{A}$ yang diberikan dalam contoh 2.3.

2.4 Aljabar *Max-plus* Interval dan Matriks Interval

Aljabar *max-plus* interval merupakan perluasan aljabar *max-plus* dari pembahasan sebelumnya. Interval tertutup dalam $\mathbf{R}_{\max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathbf{R}_{\max}$ yang berbentuk $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \mathbf{R}_{\max} \,|\, \underline{x} < x < \overline{x}\}$.

Definisi 2.4.1 (Rudhito. dkk. 2008)

Didefinisikan $\mathbf{I(R)}_\varepsilon = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] | \underline{x}, \overline{x} \in \mathbf{R}_{\max}, \varepsilon < \underline{x} < \overline{x}\} \cup \{\varepsilon\}$. pada $\mathbf{I(R)}_\varepsilon$ terdapat operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ yaitu:

$$\mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} \oplus \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}} \oplus \overline{\mathbf{y}}], \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{I(R)}_\varepsilon \quad (2.6)$$

dan

$$\mathbf{x} \overline{\otimes} \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}} \otimes \overline{\mathbf{y}}], \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{I(R)}_\varepsilon \quad (2.7)$$

dengan $\boldsymbol{x} = [\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}]$

$\boldsymbol{y} = [\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{y}}]$

$\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}$ = batas bawah dan batas atas vektor interval **x**

$\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{y}}$ = batas bawah dan batas atas vektor interval **y**

Selanjutnya $(\mathbf{I(R)}_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ disebut dengan aljabar *max-plus* yang cukup dituliskan $\mathbf{I(R)}_{\max}$. Operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ pada di atas dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{I(R)}_{\max}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$ seperti berikut:

Definisi 2.4.2 (Rudhito. dkk. 2008)

Didefinisikan $\mathbf{I(R)}_{\max}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}} = \{\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A})_{\boldsymbol{ij}} | \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{ij}}\}$ untuk $i = 1,2,\cdots,m,\ j = 1,2,\cdots,n$, matriks anggota $\mathbf{I(R)}_{\max}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$ disebut matriks interval.

Adapun bentuk umum matriks interval $\boldsymbol{A}$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [\underline{\alpha}_{11}, \overline{\alpha}_{11}] & [\underline{\alpha}_{12}, \overline{\alpha}_{12}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{1n}, \overline{\alpha}_{1n}] \\ [\underline{\alpha}_{21}, \overline{\alpha}_{21}] & [\underline{\alpha}_{22}, \overline{\alpha}_{22}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{2n}, \overline{\alpha}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{\alpha}_{n1}, \overline{\alpha}_{n1}] & [\underline{\alpha}_{n2}, \overline{\alpha}_{n2}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{nn}, \overline{\alpha}_{nn}] \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.4.3 (Rudhito. dkk. 2008)

1) Diketahui $\alpha \in \mathbf{I(R)}_{\max}$, $\boldsymbol{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{\boldsymbol{m\times n}}$. Didefinisikan operasi perkalian skalar $\overline{\otimes}$ dengan $\alpha \overline{\otimes} \boldsymbol{A}$ adalah matriks yang unsur ke-ij nya yaitu: $\left(\alpha \overline{\otimes} \boldsymbol{A}\right)_{ij} = \alpha \overline{\otimes} \boldsymbol{A_{ij}}$ (2.8)

   Dan operasi $\overline{\oplus}$ dengan $\boldsymbol{A} \overline{\oplus} \boldsymbol{B}$ adalah adalah matriks yang unsur ke-ij nya yaitu:

   $$\left(\boldsymbol{A} \overline{\oplus} \boldsymbol{B}\right)_{\boldsymbol{ij}} = \boldsymbol{A_{ij}} \overline{\oplus} \boldsymbol{B_{ij}} \text{ untuk } i = 1,2,\cdots,m,\ j = 1,2,\cdots,n \quad (2.9)$$

2) Diketahui $\boldsymbol{A} \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{\mathrm{m\times p}}$ dan $\boldsymbol{B} \in \mathbf{I(R)}_{max}^{p\times n}$. Didefinisikan operasi $\overline{\otimes}$ dengan $\boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{B}$ adalah matriks yang unsur ke-ij nya yaitu:

   $$\left(\boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{B}\right)_{ij} = \overline{\bigoplus}_{k=1}^{p} \boldsymbol{A}_{ik} \overline{\otimes} \boldsymbol{B}_{kj} \text{ untuk } i = 1,2,\cdots,m,\ j = 1,2,\cdots,n \quad (2.10)$$

Operasi pada definisi di atas prosesnya dapat dilakukan sebagai berikut:

1) Operasi pada $\left(\alpha \overline{\otimes} \boldsymbol{A}\right)_{ij}$ prosesnya dapat dilakukan seperti berikut:

   Dengan $\alpha = [\underline{a}, \overline{a}]$ dan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [\underline{\alpha}_{11}, \overline{\alpha}_{11}] & [\underline{\alpha}_{12}, \overline{\alpha}_{12}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{1n}, \overline{\alpha}_{1n}] \\ [\underline{\alpha}_{21}, \overline{\alpha}_{21}] & [\underline{\alpha}_{22}, \overline{\alpha}_{22}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{2n}, \overline{\alpha}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{\alpha}_{n1}, \overline{\alpha}_{n1}] & [\underline{\alpha}_{n2}, \overline{\alpha}_{n2}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{nn}, \overline{\alpha}_{nn}] \end{bmatrix}$.

   Maka $\left(\alpha \overline{\otimes} \boldsymbol{A}\right)_{ij}$ dapat dicari dengan melakukan proses sebagai berikut:

   $$\left(\alpha \overline{\otimes} \boldsymbol{A}\right)_{ij} = [\underline{a}, \overline{a}] \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [\underline{\alpha}_{11}, \overline{\alpha}_{11}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{1n}, \overline{\alpha}_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{\alpha}_{n1}, \overline{\alpha}_{n1}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{nn}, \overline{\alpha}_{nn}] \end{bmatrix}$$

   $$\left(\alpha \overline{\otimes} \boldsymbol{A}\right)_{ij} = \begin{bmatrix} [\underline{a}, \overline{a}] \overline{\otimes} [\underline{\alpha}_{11}, \overline{\alpha}_{11}] & \cdots & [\underline{a}, \overline{a}] \overline{\otimes} [\underline{\alpha}_{1n}, \overline{\alpha}_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}, \overline{a}] \overline{\otimes} [\underline{\alpha}_{n1}, \overline{\alpha}_{n1}] & \cdots & [\underline{a}, \overline{a}] \overline{\otimes} [\underline{\alpha}_{nn}, \overline{\alpha}_{nn}] \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (2.7) maka diperoleh:

$$\left(\alpha \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{A}\right)_{ij} = \begin{bmatrix} [\underline{a} \otimes \underline{\alpha}_{11}, \overline{a} \otimes \overline{\alpha}_{11}] & \cdots & [\underline{a} \otimes \underline{\alpha}_{1n}, \overline{a} \otimes \overline{\alpha}_{1\mathrm{n}}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a} \otimes \underline{\alpha}_{n1} \overline{a} \otimes, \overline{\alpha}_{\mathrm{n}1}] & \cdots & [\underline{a} \otimes \underline{\alpha}_{nn}, \overline{a} \otimes \overline{\alpha}_{\mathrm{nn}}] \end{bmatrix}$$

Maka untuk menyelesaikan penghitungan di atas dapat diselesaikan berdasarkan persamaan (2.1), sehingga diperoleh:

$$\left(\alpha \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{A}\right)_{ij} = \begin{bmatrix} [\underline{a} + \underline{\alpha}_{11}, \overline{a} + \overline{\alpha}_{11}] & \cdots & [\underline{a} + \underline{\alpha}_{1n}, \overline{a} + \overline{\alpha}_{1\mathrm{n}}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a} + \underline{\alpha}_{n1}, \overline{a} + \overline{\alpha}_{\mathrm{n}1}] & \cdots & [\underline{a} + \underline{\alpha}_{nn}, \overline{a} + \overline{\alpha}_{\mathrm{nn}}] \end{bmatrix}.$$

Kemudian untuk operasi pada $\boldsymbol{A} \,\overline{\oplus}\, \boldsymbol{B}$ prosesnya dapat dilakukan sebagai berikut:

Misalkan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [\underline{\alpha}_{11}, \overline{\alpha}_{11}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{1n}, \overline{\alpha}_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{\alpha}_{n1}, \overline{\alpha}_{n1}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{nn}, \overline{\alpha}_{nn}] \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} [\underline{b}_{11}, \overline{b}_{11}] & \cdots & [\underline{b}_{1n}, \overline{b}_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{b}_{n1}, \overline{b}_{n1}] & \cdots & [\underline{b}_{nn}, \overline{b}_{nn}] \end{bmatrix}$

Maka $\left(\boldsymbol{A} \,\overline{\oplus}\, \boldsymbol{B}\right)_{\boldsymbol{ij}}$ dapat dicari dengan melakukan proses berikut:

$$\left(\boldsymbol{A} \,\overline{\oplus}\, \boldsymbol{B}\right)_{\boldsymbol{ij}} = \begin{bmatrix} [\underline{\alpha}_{11}, \overline{\alpha}_{11}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{1n}, \overline{\alpha}_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{\alpha}_{n1}, \overline{\alpha}_{n1}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{nn}, \overline{\alpha}_{nn}] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [\underline{b}_{11}, \overline{b}_{11}] & \cdots & [\underline{b}_{1n}, \overline{b}_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{b}_{n1}, \overline{b}_{n1}] & \cdots & [\underline{b}_{nn}, \overline{b}_{nn}] \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.7) diperoleh:

$$\left(\boldsymbol{A} \,\overline{\oplus}\, \boldsymbol{B}\right)_{\boldsymbol{ij}} = \begin{bmatrix} [\underline{\alpha}_{11} \oplus \underline{b}_{11}, \overline{\alpha}_{11} \oplus \overline{b}_{11}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{1n} \oplus \underline{b}_{1n}, \overline{\alpha}_{1n} \oplus \overline{b}_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{\alpha}_{n1} \oplus \underline{b}_{n1}, \overline{\alpha}_{n1} \oplus \overline{b}_{n1}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{nn} \oplus \underline{b}_{nn}, \overline{\alpha}_{nn} \oplus \overline{b}_{nn}] \end{bmatrix}$$

Kemudian untuk menyelesaikan penghitungan dapat diselesaikan dengan persamaan (2.1), dan diperoleh:

$$\left(\boldsymbol{A} \,\overline{\oplus}\, \boldsymbol{B}\right)_{\boldsymbol{ij}} = \begin{bmatrix} [\underline{\alpha}_{11} + \underline{b}_{11}, \overline{\alpha}_{11} + \overline{b}_{11}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{1n} + \underline{b}_{1n}, \overline{\alpha}_{1n} + \overline{b}_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{\alpha}_{n1} + \underline{b}_{n1}, \overline{\alpha}_{n1} + \overline{b}_{n1}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{nn} + \underline{b}_{nn}, \overline{\alpha}_{nn} + \overline{b}_{nn}] \end{bmatrix}.$$

2) Operasi pada $(\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})_{ij}$ prosesnya dapat dilakukan sebagai berikut:

Misalkan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [\underline{\alpha}_{11}, \overline{\alpha}_{11}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{1p}, \overline{\alpha}_{1p}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{\alpha}_{m1}, \overline{\alpha}_{m1}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{mp}, \overline{\alpha}_{mp}] \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} [\underline{b}_{11}, \overline{b}_{11}] & \cdots & [\underline{b}_{1n}, \overline{b}_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{b}_{p1}, \overline{b}_{p1}] & \cdots & [\underline{b}_{pn}, \overline{b}_{pn}] \end{bmatrix}$

Maka $(\boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{B})_{ij}$ dapat dicari dengan proses berikut:

$$(\boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{B})_{ij} = \begin{bmatrix} [\underline{\alpha}_{11}, \overline{\alpha}_{11}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{1p}, \overline{\alpha}_{1\mathrm{p}}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{\alpha}_{m1}, \overline{\alpha}_{\mathrm{m}1}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{mp}, \overline{\alpha}_{\mathrm{mp}}] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [\underline{b}_{11}, \overline{b}_{11}] & \cdots & [\underline{b}_{1n}, \overline{b}_{1\mathrm{n}}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{b}_{p1}, \overline{b}_{\mathrm{p}1}] & \cdots & [\underline{b}_{pn}, \overline{b}_{\mathrm{pn}}] \end{bmatrix}$$

Misalkan $(\boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{B}) = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix}$

Maka masing-masing entri pada matriks $(\boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{B})$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$C_{11} = \max\left([\underline{\alpha}_{11}, \overline{\alpha}_{11}] \overline{\otimes} [\underline{b}_{11}, \overline{b}_{11}], \cdots, [\underline{\alpha}_{1p}, \overline{\alpha}_{1p}] \overline{\otimes} [\underline{b}_{p1}, \overline{b}_{p1}]\right)$$
$$\vdots$$
$$C_{1n} = \max\left([\underline{\alpha}_{11}, \overline{\alpha}_{11}] \overline{\otimes} [\underline{b}_{1n}, \overline{b}_{1n}], \cdots, [\underline{\alpha}_{1p}, \overline{\alpha}_{1p}] \overline{\otimes} [\underline{b}_{pn}, \overline{b}_{pn}]\right)$$
$$\vdots$$
$$C_{m1} = \max\left([\underline{\alpha}_{m1}, \overline{\alpha}_{m1}] \overline{\otimes} [\underline{b}_{11}, \overline{b}_{11}], \cdots, [\underline{\alpha}_{mp}, \overline{\alpha}_{mp}] \overline{\otimes} [\underline{b}_{p1}, \overline{b}_{p1}]\right)$$
$$\vdots$$
$$C_{mn} = \max\left([\underline{\alpha}_{m1}, \overline{\alpha}_{m1}] \overline{\otimes} [\underline{b}_{1n}, \overline{b}_{1n}], \cdots, [\underline{\alpha}_{mp}, \overline{\alpha}_{mp}] \overline{\otimes} [\underline{b}_{pn}, \overline{b}_{pn}]\right)$$

Maka untuk menyelesaikannya gunakan persamaan (2.7) diperoleh:

$$C_{11} = \max\left([\underline{\alpha}_{11} \otimes \underline{b}_{11}, \overline{\alpha}_{11} \otimes, \overline{b}_{11}], \cdots, [\underline{\alpha}_{1p} \otimes \underline{b}_{p1}, \overline{\alpha}_{1\mathrm{p}} \otimes \overline{b}_{\mathrm{p}1}]\right)$$
$$\vdots$$
$$C_{1n} = \max\left([\underline{\alpha}_{11} \otimes \underline{b}_{1n}, \overline{\alpha}_{11} \otimes, \overline{b}_{1n}], \cdots, [\underline{\alpha}_{1p} \otimes \underline{b}_{pn}, \overline{\alpha}_{1p} \otimes \overline{b}_{pn}]\right)$$
$$\vdots$$
$$C_{m1} = \max\left([\underline{\alpha}_{m1} \otimes \underline{b}_{11}, \overline{\alpha}_{m1} \otimes, \overline{b}_{11}], \cdots, [\underline{\alpha}_{mp} \otimes \underline{b}_{p1}, \overline{\alpha}_{mp} \otimes \overline{b}_{p1}]\right)$$
$$\vdots$$
$$C_{mn} = \max\left([\underline{\alpha}_{m1} \otimes \underline{b}_{1n}, \overline{\alpha}_{m1} \otimes, \overline{b}_{1n}], \cdots, [\underline{\alpha}_{mp} \otimes \underline{b}_{pn}, \overline{\alpha}_{mp} \otimes \overline{b}_{pn}]\right).$$

Untuk lebih memahami operasi-operasi aljabar *max-plus* interval , akan diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.4.1

Diberikan $\mathbf{x} = [-1,1]$ dan $\mathbf{y} = [1,3]$, maka tentukan $\mathbf{x}\ \overline{\oplus}\ \mathbf{y}$ dan $\mathbf{x}\ \overline{\otimes}\ \mathbf{y}$.
Berdasarkan persamaan (2.6) diperoleh:

$$\mathbf{x}\ \overline{\oplus}\ \mathbf{y} = [-1,1]\ \overline{\oplus}\ [1,3]$$

$$= [-1 \oplus 1, 1 \oplus 3]$$

Kemudian untuk menyelesaikannya dapat dilihat pada persamaan (2.1) yaitu

$$\mathbf{x}\ \overline{\oplus}\ \mathbf{y} = [\max(-1,1), \max(1,3)] = [1,3]$$

Maka diperoleh:

$$\mathbf{x}\ \overline{\oplus}\ \mathbf{y} = [1,3].$$

Selanjutnya untuk menyelesaikan $\mathbf{x}\ \overline{\otimes}\ \mathbf{y}$ digunakan persamaan (2.7), diperoleh:

$$\mathbf{x}\ \overline{\otimes}\ \mathbf{y} = [-1,1]\ \overline{\otimes}\ [1,3] = [-1 \otimes 1, 1 \otimes 3]$$

Kemudian untuk menyelesaikannya dapat dilihat pada persamaan (2.1) yaitu:

$$\mathbf{x}\ \overline{\otimes}\ \mathbf{y} = [-1 + 1, 1 + 3] = [0,4]$$

Sehingga diperoleh:

$$\mathbf{x}\ \overline{\otimes}\ \mathbf{y} = [0,4]$$

Contoh di atas menggunakan operasi-operasi aljabar *max-plus* interval, sedangkan operasi aljabar *max-plus* dapat dikembangkan menjadi operasi aljabar *max-plus* suatu matriks interval. Untuk lebih memahaminya akan diberikan pada contoh berikut:

Contoh 2.4.2

a) Diberikan $\alpha = [3,4]$ dan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [0,0] & [4,6] \\ [-1,1] & [\varepsilon,\varepsilon] \\ [0,1] & [-3,-2] \end{bmatrix}$, maka tentukan $\alpha \overline{\otimes}\ \boldsymbol{A}$.

Dengan menggunakan persamaan (2.8), diperoleh:

$$\alpha \overline{\otimes}\ \boldsymbol{A} = [3,4] \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] & [4,6] \\ [-1,1] & [\varepsilon,\varepsilon] \\ [0,1] & [-3,-2] \end{bmatrix}$$

Dan berdasarkan persamaan (2.7) diperoleh:

$$\alpha \overline{\otimes}\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [3,4] \overline{\otimes} [0,0] & [3,4] \overline{\otimes} [4,6] \\ [3,4] \overline{\otimes} [-1,1] & [3,4] \overline{\otimes} [\varepsilon,\varepsilon] \\ [3,4] \overline{\otimes} [0,1] & [3,4] \overline{\otimes} [-3,-2] \end{bmatrix}$$

$$\alpha \overline{\otimes}\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [3+0, 4+0] & [3+4, 4+6] \\ [3+-1, 4+1] & [3+\varepsilon, 4+\varepsilon] \\ [3+0, 4+1] & [3+-3, 4+-2] \end{bmatrix}$$

$$\alpha \overline{\otimes}\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [3,4] & [7,10] \\ [2,5] & [\varepsilon,\varepsilon] \\ [3,5] & [0,2] \end{bmatrix}$$

b) Diberikan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [1,3] & [2,3] \\ [\varepsilon,\varepsilon] & [-3,1] \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} [2,2] & [-5,-2] \\ [1,4] & [-1,0] \end{bmatrix}$, tentukan $\boldsymbol{A} \overline{\oplus} \boldsymbol{B}$.

Dengan menggunakan persamaan (2.9) diperoleh:

$$\boldsymbol{A} \overline{\oplus} \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} [1,3] & [2,3] \\ [\varepsilon,\varepsilon] & [-3,1] \end{bmatrix} \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [2,2] & [-5,-2] \\ [1,4] & [-1,0] \end{bmatrix}$$

Kemudian dengan memperhatikan persamaan (2.6), maka

$$\boldsymbol{A} \overline{\oplus} \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} [1,3] \overline{\oplus} [2,2] & [2,3] \overline{\oplus} [-5,-2] \\ [\varepsilon,\varepsilon] \overline{\oplus} [1,4] & [-3,1] \overline{\oplus} [-1,0] \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\,\overline{\oplus}\,\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} [1 \oplus 2, 3 \oplus 2] & [2 \oplus -5, 3 \oplus -2] \\ [\varepsilon \oplus 1, \varepsilon \oplus 4] & [-3 \oplus -1, 1 \oplus 0] \end{bmatrix}$$

Dan berdasarkan persamaan (2.1) diperoleh:

$$\boldsymbol{A}\,\overline{\oplus}\,\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} [\max(1,2), \max(3,2)] & [\max(2,-5), \max(3,-2)] \\ [\max(\varepsilon, 1), \max(\varepsilon, 4)] & [\max(-3,-1), \max(1,0)] \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat

$$\boldsymbol{A}\,\overline{\oplus}\,\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} [2,3] & [2,3] \\ [1,4] & [-1,1] \end{bmatrix}.$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang penulis gunakan adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan suatu matriks interval

$$A = \begin{bmatrix} [\underline{\alpha}_{11}, \overline{\alpha}_{11}] & [\underline{\alpha}_{12}, \overline{\alpha}_{12}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{1n}, \overline{\alpha}_{1n}] \\ [\underline{\alpha}_{21}, \overline{\alpha}_{21}] & [\underline{\alpha}_{22}, \overline{\alpha}_{22}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{2n}, \overline{\alpha}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{\alpha}_{n1}, \overline{\alpha}_{n1}] & [\underline{\alpha}_{n2}, \overline{\alpha}_{n2}] & \cdots & [\underline{\alpha}_{nn}, \overline{\alpha}_{nn}] \end{bmatrix}$$

2. Setelah mengetahui bentuk matriks interval maka akan ditentukan matriks batas bawah dan matriks batas atas matriks interval $\boldsymbol{A}$, yaitu $\underline{\boldsymbol{A}}$, dan $\overline{\boldsymbol{A}}$.
3. Kemudian melakukan proses aljabar *max-plus* interval $(\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes})$, yaitu menentukan $\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes k}$ dan $\overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes k}$ untuk $k = 1,2,\cdots,n$. Jika $\left(\underline{\boldsymbol{A}} \oplus \underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes n-1}\right)_{\boldsymbol{ij}} \neq \boldsymbol{\varepsilon}$ dan $\left(\overline{\boldsymbol{A}} \oplus \overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes n-1}\right)_{\boldsymbol{ij}} \neq \boldsymbol{\varepsilon}$ maka $\underline{\boldsymbol{A}}$ dan $\overline{\boldsymbol{A}}$ *irredusibel.*
4. Selanjutnya diteruskan dengan mencari nilai eigen matriks batas bawah dan batas atas matriks interval.
5. Kemudian menentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen matriks batas bawah dan nilai eigen matriks batas atas matriks interval, yaitu dengan cara membentuk matriks baru $\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{A}$.
6. Menunjukkan ketunggalan vektor eigen berdasarkan definisi 4.2.2

Langkah-langkah metodologi penelitian di atas dapat digambarkan dalam *flow chart* sebagai berikut:

Gambar 3.1 *Flow chart* Metodologi Penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN

Definisi graf berarah berbobot telah dijelaskan pada bab II, dimana bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam graf berarah memiliki hubungan yang erat dengan nilai eigen suatu matriks dalam aljabar *max-plus*. Hubungan tersebut akan dibahas dalam bab ini, hasil pembahasan menunjukan bahwa setiap matriks interval mempunyai nilai eigen, yaitu nilai eigen max-plus matriks interval dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen matriks tersebut.

4.1 Hubungan Graf berarah berbobot dengan Nilai eigen *Max-plus* matriks interval

Suatu graf berarah $\boldsymbol{G}$ didefinisikan sebagai suatu pasangan (V, E) dengan V adalah suatu himpunan tak kosong yang anggotanya disebut titik dan E adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik. Anggota E disebut busur. Untuk busur $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in E$. $\boldsymbol{v}$ disebut titik awal busur dan $\boldsymbol{w}$ disebut titik akhir busur.

Graf berarah $\boldsymbol{G}$ dikatakan berbobot jika setiap busur $(j, i) \in E$, dikawankan dengan suatu bilangan real $\boldsymbol{A}_{ij}$. Bilangan real $\boldsymbol{A}_{ij}$ disebut bobot busur (j, i), dinotasikan dengan $w(j, i)$.

Graf preseden dari matriks $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}_{max}^{n \times n}$ adalah graf berarah berbobot $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}) = (V, E)$ dengan $V = \{1,2, \cdots, n\}$, dan $E = \{(j, i) | w(i, j) = A_{ij} \neq \varepsilon\}$. Bobot maksimum dari semua sirkuit dengan panjang k dengan titik *i* sebagai titik awal dan titik akhir dalam $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A})$ dituliskan sebagai $(\boldsymbol{A}^{\otimes k})_{ii}$. Maksimum dari bobot maksimum semua sirkuit dengan panjang k dengan titik *i* sebagai titik awal dan titik akhir adalah $\bigoplus_{i=1}^{n} (\boldsymbol{A}^{\otimes k})_{ii}$, dan dapat juga dituliskan sebagai *trace* $(\boldsymbol{A}^{\otimes k})$ dengan rata-ratanya adalah $\frac{1}{k}$ *trace* $(\boldsymbol{A}^{\otimes k})$. Selanjutnya diambil maksimum atas sirkuit dengan panjang $k \leq n$, yaitu atas semua sirkuit elementer, diperoleh suatu rumus untuk bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A})$ (dinotasikan dengan $\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$) sebagai berikut (Rudhito. 2008):

$$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}) = \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\boldsymbol{A}^{\otimes k} \right)_{ii} \right) \tag{4.1}$$

Persamaan diatas dapat diselesaikan dengan proses berikut:

$$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}) = \bigoplus_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} \left\{ \max(A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{nn}), \cdots, \max\left(A_{11}^{\otimes k}, A_{22}^{\otimes k}, \cdots, A_{nn}^{\otimes k}\right) \right\} \right\}$$

$$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}) = \max \left\{ \frac{1}{1} (\max(A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{nn})), \cdots, \frac{1}{n} \left(\max\left(A_{11}^{\otimes k}, A_{22}^{\otimes k}, \cdots, A_{nn}^{\otimes k}\right) \right) \right\}.$$

4.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen *Max-plus* untuk Matriks Interval

Definisi 4.2.1 (Rudhito. dkk. 2008) Diberikan $\boldsymbol{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$. Skalar interval λ disebut nilai eigen *max-plus* interval matriks interval $\boldsymbol{A}$ jika terdapat suatu vektor interval $\mathbf{v} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n}$ dengan $\mathbf{v} \neq \boldsymbol{\varepsilon}_{n\times 1}$ sehingga $\boldsymbol{A} \overline{\otimes} \mathbf{v} = \lambda \overline{\otimes} \mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{v}$ disebut vektor eigen *max-plus* matriks interval $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan λ.

Berikut diberikan suatu teorema yang memberikan eksistensi nilai eigen interval *max-plus* suatu matriks interval.

Teorema 4.2.1 (Rudhito. dkk. 2008) Diberikan $\boldsymbol{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$ dengan $\boldsymbol{A} = [\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}]$. Skalar interval $\lambda(\boldsymbol{A}) = [\lambda(\underline{\boldsymbol{A}}), \lambda(\overline{\boldsymbol{A}})]$, merupakan suatu nilai eigen *max-plus* interval matriks interval $\boldsymbol{A}$. Vektor interval $\mathbf{v} = [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$, dimana $\underline{\mathbf{v}}$ dan $\overline{\mathbf{v}}$ berturut-turut adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda(\underline{\boldsymbol{A}})$ dan $\lambda(\overline{\boldsymbol{A}})$, sedemikian hingga $\underline{\mathbf{v}} < \overline{\mathbf{v}}$, merupakan vektor eigen *max-plus* matriks interval $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan $\lambda(\boldsymbol{A})$.

Bukti:

Untuk setiap matriks $\boldsymbol{A} \in [\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}]$, berlaku $\underline{\boldsymbol{A}} \leq \boldsymbol{A_{ij}} \leq \overline{\boldsymbol{A}}$. Karena sifat kekonsistenan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks terhadap urutan " $\leq_m$ ", maka berlaku $\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes k} \leq \boldsymbol{A}^{\otimes k} \leq \overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes k}$, untuk $k = 1,2,\cdots,n$, sehingga berlaku

$$\oplus_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\oplus_{k=1}^{n}\left(\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes k}\right)_{ii}\right)\leq\oplus_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\oplus_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{A}^{\otimes k}\right)_{ii}\right)\leq\oplus_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\oplus_{k=1}^{n}\left(\overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes k}\right)_{ii}\right)$$

dan berdasarkan persamaan (4.1) dapat juga ditulis

$$\lambda(\underline{\boldsymbol{A}}) \leq \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) \leq \lambda(\overline{\boldsymbol{A}}).$$

Jadi $[\lambda(\underline{\boldsymbol{A}}), \lambda(\overline{\boldsymbol{A}})]$ merupakan suatu interval.

Selanjutnya ambil $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) = [\lambda(\underline{\boldsymbol{A}}), \lambda(\overline{\boldsymbol{A}})]$, untuk $\underline{\boldsymbol{M}} = -\lambda(\underline{\boldsymbol{A}}) \otimes \underline{\boldsymbol{A}}$, jika $\underline{\boldsymbol{M}}_{ii}^{+} = \boldsymbol{0}$, maka kolom ke i matriks $\underline{\boldsymbol{M}}^{*}$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(\underline{\boldsymbol{A}})$, demikian juga analog untuk $\overline{\boldsymbol{M}}$. Ambil $\underline{\mathbf{v}}$ dan $\overline{\mathbf{v}}$, dimana berturut-turut adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda(\underline{\boldsymbol{A}})$ dan $\lambda(\overline{\boldsymbol{A}})$, sedemikian hingga $\underline{\mathbf{v}} \leq \overline{\mathbf{v}}$, jika diperlukan dapat dibentuk kombinasi linear vektor-vektor eigen fundamental yang terkait, sehingga diperoleh $\underline{\mathbf{v}} \leq \overline{\mathbf{v}}$.

Ambil vektor interval $\mathbf{v} = [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$, maka

$$[\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}] \,\overline{\otimes}\, [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}] = [\lambda(\underline{\boldsymbol{A}}), \lambda(\overline{\boldsymbol{A}})] \,\overline{\otimes}\, [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$$

yang berarti juga bahwa

$$\boldsymbol{A} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{v} = \boldsymbol{\lambda} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{v}$$

Jadi skalar interval $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) = [\lambda(\underline{\boldsymbol{A}}), \lambda(\overline{\boldsymbol{A}})]$, merupakan suatu nilai eigen *max-plus* interval matriks $\boldsymbol{A}$. ■

Berdasarkan teorema 4.1, akan dibahas mengenai matriks $\boldsymbol{M}$. Matriks $\boldsymbol{M}$ adalah matriks yang digunakan dalam menentukan vektor eigen suatu matriks. Berikut akan dibahas proses untuk menentukan matriks $\boldsymbol{M}$ yaitu:

$$\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{A} \tag{4.2}$$

Dimana $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A})$ diperoleh dengan menggunakan persamaan (4.1) dan matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$,

Maka proses menentukannya adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan persamaan (2.2) diperoleh

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) \otimes a_{11} & -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) \otimes a_{12} & \cdots & -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) \otimes a_{1n} \\ -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) \otimes a_{21} & -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) \otimes a_{22} & \cdots & -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) \otimes a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) \otimes a_{m1} & -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) \otimes a_{m2} & \cdots & -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) \otimes a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Atau dapat juga ditulis

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) + a_{11} & -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) + a_{12} & \cdots & -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) + a_{1n} \\ -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) + a_{21} & -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) + a_{22} & \cdots & -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) + a_{m1} & -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) + a_{m2} & \cdots & -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) + a_{mn} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya setelah didapat matriks $\boldsymbol{M}$, kemudian akan ditentukan matriks $\boldsymbol{M}^*$, yaitu:

$$\boldsymbol{M}^* = \boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{M}^{\otimes \boldsymbol{2}} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{M}^{\otimes \boldsymbol{n-1}} \tag{4.3}$$

Dengan $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}^{\otimes \boldsymbol{2}}, \cdots, \boldsymbol{M}^{\otimes \boldsymbol{n-1}}$ dapat ditentukan dengan cara seperti pada contoh 2.2(d), sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{M}^* = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} m_{11}^{\otimes 2} & m_{12}^{\otimes 2} & \cdots & m_{1n}^{\otimes 2} \\ m_{21}^{\otimes 2} & m_{22}^{\otimes 2} & \cdots & m_{2n}^{\otimes 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1}^{\otimes 2} & m_{2n}^{\otimes 2} & \cdots & m_{nn}^{\otimes 2} \end{bmatrix}$$

$$\oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} m_{11}^{\otimes n-1} & m_{12}^{\otimes n-1} & \cdots & m_{1n}^{\otimes n-1} \\ m_{21}^{\otimes n-1} & m_{22}^{\otimes n-1} & \cdots & m_{2n}^{\otimes n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1}^{\otimes n-1} & m_{2n}^{\otimes n-1} & \cdots & m_{nn}^{\otimes n-1} \end{bmatrix}.$$

Dengan memperhatikan persamaan (2.3), maka diperoleh matriks $\boldsymbol{M}^*$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \max(0, m_{11}, m_{11}^{\otimes 2}, \cdots, m_{11}^{\otimes n-1}) & \max(\varepsilon, m_{12}, m_{12}^{\otimes 2}, \cdots, m_{12}^{\otimes n-1}) & \cdots & \max(\varepsilon, m_{1n}, m_{1n}^{\otimes 2}, \cdots, m_{1n}^{\otimes n-1}) \\ \max(\varepsilon, m_{21}, m_{21}^{\otimes 2}, \cdots, m_{21}^{\otimes n-1}) & \max(0, m_{22}, m_{22}^{\otimes 2}, \cdots, m_{22}^{\otimes n-1}) & \cdots & \max(\varepsilon, m_{2n}, m_{2n}^{\otimes 2}, \cdots, m_{2n}^{\otimes n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(\varepsilon, m_{n1}, m_{n1}^{\otimes 2}, \cdots, m_{n1}^{\otimes n-1}) & \max(\varepsilon, m_{n2}, m_{n2}^{\otimes 2}, \cdots, m_{n2}^{\otimes n-1}) & \cdots & \max(0, m_{nn}, m_{nn}^{\otimes 2}, \cdots, m_{nn}^{\otimes n-1}) \end{bmatrix}$$

Kemudian seperti yang dibahas pada teorema 4.1, jika $\boldsymbol{M}_{ii}^+ = \boldsymbol{0}$, maka kolom ke i matriks $\boldsymbol{M}^*$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A})$, maka untuk menentukan matriks $\boldsymbol{M}_{ii}^+$ yaitu:

$$\boldsymbol{M}_{ii}^+ = \boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}^* \tag{4.4}$$

Dimana $\boldsymbol{M}$ dan $\boldsymbol{M}^*$ telah diketahui dari persamaan (4.2) dan (4.3), sehingga matriks $\boldsymbol{M}_{ii}^+$, dapat ditentukan berdasarkan proses sebagai berikut:

$$\boldsymbol{M}_{ii}^+ = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} m_{11}^* & m_{12}^* & \cdots & m_{1n}^* \\ m_{21}^* & m_{22}^* & \cdots & m_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1}^* & m_{2n}^* & \cdots & m_{nn}^* \end{bmatrix}$$

Dan seperti pada persamaan (2.4), akan diperoleh matriks $\boldsymbol{M}_{ii}^+$ yaitu:

$$\boldsymbol{M}_{ii}^+ = \begin{bmatrix} m_{11}^+ & m_{12}^+ & \cdots & m_{1n}^+ \\ m_{21}^+ & m_{22}^+ & \cdots & m_{2n}^+ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1}^+ & m_{2n}^+ & \cdots & m_{nn}^+ \end{bmatrix}.$$

Jika diperoleh entri-entri ke $-i$ pada $\boldsymbol{M}_{ii}^+ = 0$, maka kolom ke-$i$ matriks $\boldsymbol{M}^*$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A})$.

Untuk mendapat ketunggalan vektor eigen , akan digunakan definisi di bawah ini

Definisi 4.2.2 (Kasie G. Farlow 2009) Untuk $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{max}}^{\boldsymbol{n\times n}}$ vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ adalah tunggal jika untuk sebarang dua vektor eigen $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{max}}^{\boldsymbol{n}}$ $\mathbf{v_1} = \boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{v_2}$ untuk suatu $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{R}$.

Berikut akan diberikan suatu teorema yang memberikan ketunggalan nilai eigen *max-plus* interval suatu matriks interval. Sebelumnya akan diberikan definisi dan syarat cukup dan perlu *irredusibelitas* suatu matriks interval.

Definisi 4.2.3 (Rudhito. dkk. 2008) Suatu matriks interval $\boldsymbol{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$, dengan $\boldsymbol{A} = [\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}]$ dikatakan *irredusibel* jika setiap matriks $\boldsymbol{A} \in [\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}]$ *irredusibel.*

Teorema berikut memberikan syarat perlu dan cukup suatu matriks *irredusibel.*

Teorema 4.2.2(Rudhito, dkk. 2008) Suatu matriks interval $\boldsymbol{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$, dengan $\boldsymbol{A} = [\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}]$**,** jika dan hanya jika $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}_{\max}^{n\times n}$ *irredusibel.*

Bukti:

$(\Rightarrow)$: jelas berlaku bersarkan definisi 4.2.3 di atas.

$(\Leftarrow)$: Untuk setiap matriks $\boldsymbol{A} \in [\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}]$**,** berlaku $\underline{\boldsymbol{A}} \leq \boldsymbol{A} \leq \overline{\boldsymbol{A}}$**.** Karena sifat kekonsistenan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks terhadap urutan " $\leq_m$ ", maka berlaku

$$\left(\underline{\boldsymbol{A}} \oplus \underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes n-1}\right) \leq \left(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{\otimes n-1}\right)$$

$$\leq \left(\overline{\boldsymbol{A}} \oplus \overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes n-1}\right),$$

Yang berarti berlaku juga

$$\left(\underline{\boldsymbol{A}} \oplus \underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes n-1}\right)_{\boldsymbol{ij}} \leq \left(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{\otimes n-1}\right)_{\boldsymbol{ij}}$$

$$\leq \left(\overline{\boldsymbol{A}} \oplus \overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes n-1}\right)_{\boldsymbol{ij}}$$

Untuk setiap i dan j.

Karena $\underline{\boldsymbol{A}}$ *irredusibel*, maka

$\left(\underline{\boldsymbol{A}} \oplus \underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes n-1}\right)_{\boldsymbol{ij}} \neq \boldsymbol{\varepsilon}$ untuk setiap i dan j dengan $i \neq j$.

Dengan demikian untuk setiap matriks $\boldsymbol{A} \in \left[\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}\right]$ juga berlaku bahwa

$\left(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{\otimes n-1}\right)_{\boldsymbol{ij}} \neq \boldsymbol{\varepsilon}$ untuk setiap i dan j dengan $i \neq j$, sehingga menurut hasil pada bagian 2 di atas $\boldsymbol{A}$ *irredusibel*. Jadi terbukti bahwa matriks interval $\boldsymbol{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$ *irredusibel*. ∎

Keirredusibelan suatu matriks interval $\boldsymbol{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$ diperlukan dalam membuktikan bahwa $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) = \left[\lambda\left(\underline{\boldsymbol{A}}\right), \lambda\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)\right]$ merupakan nilai eigen *max-plus* tunggal pada matriks interval. Adapun pembahasannya akan diberikan pada akibat berikut :

Akibat 4.2.2(Rudhito, dkk. 2008) Diberikan $\boldsymbol{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$, dengan $\boldsymbol{A} = \left[\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}\right]$. jika matriks interval $\boldsymbol{A}$ *irredusibel*, maka $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) = \left[\lambda\left(\underline{\boldsymbol{A}}\right), \lambda\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)\right]$ merupakan nilai eigen *max-plus* tunggal matriks interval $\boldsymbol{A}$.

Bukti

Jika matriks interval $\boldsymbol{A}$ irredusibel, maka $\forall\ \boldsymbol{A} \in \left[\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}\right]$ *irredusibel*, sehingga $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A})$ merupakan nilai eigen *max-plus* tunggal matriks $\boldsymbol{A}$, dengan cara yang analog dengan pembuktian teorema 4.2.2 di atas dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) = \left[\lambda\left(\underline{\boldsymbol{A}}\right), \lambda\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)\right]$, merupakan nilai eigen *max-plus* tunggal matriks interval $\boldsymbol{A}$. ∎

Berdasarkan definisi dan teorema-teorema di atas, dapat kita tentukan langkah-langkah dalam menentukan nilai eigen dan vektor eigen *max-plus* matriks interval $\boldsymbol{A}$ yaitu:

Langkah ke-1 : Tentukan matriks bawah dan matriks atas matriks interval $\boldsymbol{A}$, yaitu $\underline{\boldsymbol{A}}$ dan $\overline{\boldsymbol{A}}$.

Langkah ke-2 : Tentukan $\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes \boldsymbol{k}}$ dan $\overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes \boldsymbol{k}}$ untuk $k = 1,2,\cdots,n$.

Langkah ke-3 : tentukan nilai eigen *max-plus* dari masing-masing matriks, yaitu nilai eigen *max-plus* matriks batas bawah dan nilai eigen *max-plus* matriks batas atas, yaitu sebagai berikut:

$$\lambda(\underline{\boldsymbol{A}}) = \oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \oplus_{k=1}^{n} \left(\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes k}\right)_{ii}\right)$$

Dan

$$\lambda(\overline{\boldsymbol{A}}) = \oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \oplus_{k=1}^{n} \left(\overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes k}\right)_{ii}\right)$$

Langkah ke-4 : Bentuk suatu matriks $\underline{\boldsymbol{M}}^{*} = \boldsymbol{E} \oplus \underline{\boldsymbol{M}} \oplus \underline{\boldsymbol{M}}^{\otimes \boldsymbol{2}} \oplus \cdots \oplus \underline{\boldsymbol{M}}^{\otimes \boldsymbol{n-1}}$ dengan $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ dan $\underline{\boldsymbol{M}} = -\boldsymbol{\lambda}(\underline{\boldsymbol{A}}) \otimes \underline{\boldsymbol{A}}$

Langkah ke-5 : Tentukan matriks $\underline{\boldsymbol{M}}^{+}$, dapat dilihat pada persamaan (4.4) yaitu $\underline{\boldsymbol{M}}_{ii}^{+} = \underline{\boldsymbol{M}} \otimes \underline{\boldsymbol{M}}^{*}$**.** Jika $\underline{\boldsymbol{M}}_{ii}^{+} = \boldsymbol{0}$, maka kolom ke-$i$ matriks $\underline{\boldsymbol{M}}^{*}$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\boldsymbol{\lambda}(\underline{\boldsymbol{A}})$**.**

Langkah ke-6 : Analog dengan langkah ke-4, yaitu untuk menentukan $\overline{\boldsymbol{M}}^{*} = \boldsymbol{E} \oplus \overline{\boldsymbol{M}} \oplus \overline{\boldsymbol{M}}^{\otimes \boldsymbol{2}} \oplus \cdots \oplus \overline{\boldsymbol{M}}^{\otimes \boldsymbol{n-1}}$, sehingga $\overline{\boldsymbol{M}}_{ii}^{+} = \boldsymbol{0}$, maka kolom ke-$i$ matriks $\overline{\boldsymbol{M}}^{*}$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\boldsymbol{\lambda}(\overline{\boldsymbol{A}})$**.**

Langkah ke-7 : Analog dengan langkah ke-5, yaitu untuk menentukan $\overline{\boldsymbol{M}}^{+}$**.** Jika $\overline{\boldsymbol{M}}_{ii}^{+} = \boldsymbol{0}$, maka kolom ke-$i$ matriks $\boldsymbol{M}^{*}$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\boldsymbol{\lambda}(\overline{\boldsymbol{A}})$**.**

Langkah ke -8 : menunjukkan ketunggalan vektor eigen berdasarkan definisi 4.2.2

Contoh 4.2.1

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen *max-plus* interval dari matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [-2,-1] & [3,4] & [1,2] \\ [1,2] & [1,1] & [\varepsilon,\varepsilon] \\ [\varepsilon,\varepsilon] & [2,4] & [-1,1] \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian :

Perhatikan bahwa $\boldsymbol{A} = [\underline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}]$, maka tentukan batas bawah dan batas atas dari matriks interval $\boldsymbol{A}$, yaitu:

$$\underline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dan

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen *max-plus* dari $\underline{\boldsymbol{A}}$ dan $\overline{\boldsymbol{A}}$, yaitu:

$\lambda(\underline{\boldsymbol{A}}) = \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes k} \right)_{ii} \right)$ dengan $k = 1,2,3$.

Dengan

$$\underline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dan berdasarkan persamaan (2.5) dapat diperoleh $\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes \mathbf{2}}$ dan $\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes \mathbf{3}}$ yaitu:

$$\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes \mathbf{2}} = \underline{\boldsymbol{A}} \otimes \underline{\boldsymbol{A}}$$

$$\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & \varepsilon\\ \varepsilon & 2 & -1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & \varepsilon\\ \varepsilon & 2 & -1\end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.4) dan dimisalkan hasil dari $\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2}$ yaitu:

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix},$$

Kemudian akan ditentukan $C_{11}, C_{12}, \cdots, C_{33}$ pada matriks $\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2}$ yaitu seperti berikut:

$C_{11} = \max(-2 \otimes -2, 3 \otimes 1, 1 \otimes \varepsilon)$

$C_{12} = \max(-2 \otimes 3, 3 \otimes 1, 1 \otimes 2)$

$C_{13} = \max(-2 \otimes 1, 3 \otimes \varepsilon, 1 \otimes -1)$

$C_{21} = \max(1 \otimes -2, 1 \otimes 1, \varepsilon \otimes \varepsilon)$

$C_{22} = \max(1 \otimes 3, 1 \otimes 1, \varepsilon \otimes 2)$

$C_{23} = \max(1 \otimes 1, 1 \otimes \varepsilon, \varepsilon \otimes -1)$

$C_{31} = \max(\varepsilon \otimes -2, 2 \otimes 1, -1 \otimes \varepsilon)$

$C_{32} = \max(\varepsilon \otimes 3, 2 \otimes 1, -1 \otimes 2)$

$C_{33} = \max(\varepsilon \otimes 1, 2 \otimes \varepsilon, -1 \otimes -1)$

Kemudian berdasarkan persamaan (2.1) maka diperoleh

$$\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2}=\begin{bmatrix}\max(-4,4,\varepsilon) & \max(1,4,3) & \max(-1,\varepsilon,0)\\ \max(-1,2,\varepsilon) & \max(4,2,\varepsilon) & \max(2,\varepsilon,\varepsilon)\\ \max(\varepsilon,3,\varepsilon) & \max(\varepsilon,3,1) & \max(\varepsilon,\varepsilon,-2)\end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2}=\begin{bmatrix}4 & 4 & 0\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

Kemudian akan dicari $\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 3}$

$$\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 3} = \underline{\boldsymbol{A}} \otimes \underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2}$$

$$\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Dan dengan cara yang sama pada $\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2}$, misalkan $\boldsymbol{C} = \underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 3}$ dengan

$$C_{11} = \max(-2 \otimes 4, 3 \otimes 2, 1 \otimes 3)$$

$$C_{12} = \max(-2 \otimes 4, 3 \otimes 4, 1 \otimes 0)$$

$$C_{13} = \max(-2 \otimes 0, 3 \otimes 2, 1 \otimes -2)$$

$$C_{21} = \max(1 \otimes 4, 1 \otimes 2, \varepsilon \otimes 3)$$

$$C_{22} = \max(1 \otimes 4, 1 \otimes 4, \varepsilon \otimes 3)$$

$$C_{23} = \max(1 \otimes 0, 1 \otimes 2, \varepsilon \otimes -2)$$

$$C_{31} = \max(\varepsilon \otimes 4, 2 \otimes 2, -1 \otimes 3)$$

$$C_{32} = \max(\varepsilon \otimes 4, 2 \otimes 4, -1 \otimes 3)$$

$$C_{33} = \max(\varepsilon \otimes 0, 2 \otimes 2, -1 \otimes -2)$$

Kemudian berdasarkan persamaan (2.1) maka diperoleh

$$\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} \max(2,5,\varepsilon) & \max(2,7,4) & \max(-2,5,-1) \\ \max(5,3,\varepsilon) & \max(5,5,\varepsilon) & \max(1,3,\varepsilon) \\ \max(\varepsilon,4,2) & \max(\varepsilon,6,2) & \max(\varepsilon,4,-3) \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$\underline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya tentukan $\boldsymbol{\lambda}(\underline{\boldsymbol{A}})$ yaitu:

$$\boldsymbol{\lambda}(\underline{\boldsymbol{A}}) = \bigoplus_{k=1}^{3} \left[\frac{1}{k}\max(\underline{A}_{11}, \underline{A}_{22}, \underline{A}_{33}), \frac{1}{k}\max(\underline{A}_{11}^{\otimes 2}, \underline{A}_{22}^{\otimes 2}, \underline{A}_{33}^{\otimes 2}), \frac{1}{k}\max(\underline{A}_{11}^{\otimes 3}, \underline{A}_{22}^{\otimes 3}, \underline{A}_{33}^{\otimes 3})\right]$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\underline{\boldsymbol{A}}) = \max\left(\frac{1}{1}\max(-2,1,-1), \frac{1}{2}\max(4,4,-2), \frac{1}{3}\max(5,5,4)\right)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\underline{\boldsymbol{A}}) = \max\left(\frac{1}{1}(1), \frac{1}{2}(4), \frac{1}{3}(5)\right)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\underline{\boldsymbol{A}}) = \frac{1}{2}(4)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\underline{\boldsymbol{A}}) = 2.$$

Kemudian akan dibentuk suatu matriks $\underline{\boldsymbol{M}}$ seperti berikut:

$$\underline{\boldsymbol{M}} = -\boldsymbol{\lambda}(\underline{\boldsymbol{A}}) \otimes \underline{\boldsymbol{A}}$$

$$\underline{\boldsymbol{M}} = -2 \otimes \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} -2 \otimes -2 & -2 \otimes 3 & -2 \otimes 1 \\ -2 \otimes 1 & -2 \otimes 1 & -2 \otimes \varepsilon \\ -2 \otimes \varepsilon & -2 \otimes 2 & -2 \otimes -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Kemudian hitung $\underline{\boldsymbol{M}}^{\otimes 2}$, yaitu:

$$\underline{\boldsymbol{M}}^{\otimes 2} = \underline{\boldsymbol{M}} \otimes \underline{\boldsymbol{M}}$$

$$\underline{\boldsymbol{M}}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.5) diperoleh

$$\underline{\boldsymbol{M}}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} \max(-8,0,\varepsilon) & \max(-3,0,-1) & \max(-5,\varepsilon,-4) \\ \max(-5,-2,\varepsilon) & \max(0,-2,\varepsilon) & \max(-2,\varepsilon,\varepsilon) \\ \max(\varepsilon,-1,\varepsilon) & \max(\varepsilon,-1,-3) & \max(\varepsilon,\varepsilon,-6) \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$\underline{\boldsymbol{M}}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya tentukan matriks $\underline{\boldsymbol{M}}^{*}$ yaitu:

$$\underline{\boldsymbol{M}}^{*} = \boldsymbol{E} \oplus \underline{\boldsymbol{M}} \oplus \underline{\boldsymbol{M}}^{\otimes 2}$$

$$\underline{\boldsymbol{M}}^{*} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{M}}^{*} = \begin{bmatrix} \max(0,-4,0) & \max(\varepsilon,1,0) & \max(\varepsilon,-1,-4) \\ \max(\varepsilon,-1,-2) & \max(0,-1,0) & \max(\varepsilon,\varepsilon,-2) \\ \max(\varepsilon,\varepsilon,-1) & \max(\varepsilon,0,-1) & \max(0,-3,-6) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{M}}^{*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) = 2$, maka tentukan dahulu matriks $\underline{\boldsymbol{M}}_{ii}^{+}$, yaitu:

$$\underline{\boldsymbol{M}}_{ii}^{+} = \underline{\boldsymbol{M}} \otimes \underline{\boldsymbol{M}}^{*}$$

$$\underline{\boldsymbol{M}}_{ii}^{+} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian dapat dilihat bahwa $\underline{\boldsymbol{M}}_{11}^{+} = \underline{\boldsymbol{M}}_{22}^{+} = 0$. Sehingga kolom ke-1 dan ke-2 pada $\underline{\boldsymbol{M}}^{*}$ merupakan vektor-vektor eigen fudamental yang bersesuaian dengan $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) = 2,$ yaitu $\underline{\mathbf{v}}_1 = [0,-1,-1]^T$ dan $\underline{\mathbf{v}}_2 = [1,0,0]^T$. dan berdasarkan definisi 4.2.2 untuk ketunggalan vektor eigen didapat

$$\underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{\alpha} \otimes \underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}$$

$$[0,-1,-1]^T = \boldsymbol{\alpha} \otimes [1,0,0]^T,\ \boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{1}$$

Sehingga

$$[0,-1,-1]^T = [0,-1,-1]^T$$

Dan $\underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) = 2.$

Kemudian untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada $\overline{\boldsymbol{A}}$ dilakukan dengan cara yang sama dengan $\underline{\boldsymbol{A}}$, sehingga diperoleh

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} \max(-2,6,\varepsilon) & \max(3,5,6) & \max(1,\varepsilon,3) \\ \max(1,3,\varepsilon) & \max(6,2,\varepsilon) & \max(4,\varepsilon,\varepsilon) \\ \max(\varepsilon,6,\varepsilon) & \max(\varepsilon,5,5) & \max(\varepsilon,\varepsilon,2) \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Dan

$$\overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} \max(5,7,8) & \max(5,10,7) & \max(2,8,4) \\ \max(8,4,\varepsilon) & \max(8,7,\varepsilon) & \max(5,5,\varepsilon) \\ \max(\varepsilon,7,7) & \max(\varepsilon,10,6) & \max(\varepsilon,8,\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 8 \\ 8 & 8 & 5 \\ 7 & 10 & 8 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai $\boldsymbol{\lambda}(\overline{\boldsymbol{A}})$, yaitu

$$\boldsymbol{\lambda}(\overline{\boldsymbol{A}}) = \oplus_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{3}} \left(\frac{1}{k} \max(\overline{A}_{11}, \overline{A}_{22}, \overline{A}_{33}), \frac{1}{k} \max\left(\overline{A}_{11}^{\otimes 2}, \overline{A}_{22}^{\otimes 2}, \overline{A}_{33}^{\otimes 2}\right), \frac{1}{k} \max\left(\overline{A}_{11}^{\otimes 3}, \overline{A}_{22}^{\otimes 3}, \overline{A}_{33}^{\otimes 3}\right) \right)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\overline{\boldsymbol{A}}) = \max \left[\frac{1}{1} \max(-1,1,1), \frac{1}{2} \max(6,6,2), \frac{1}{3} \max(8,8,8) \right]$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\overline{\boldsymbol{A}}) = \frac{1}{2}(6)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3.$$

Kemudian akan dibentuk suatu matriks $\overline{\boldsymbol{M}}$ seperti berikut

$$\overline{\boldsymbol{M}} = -\boldsymbol{\lambda}(\overline{\boldsymbol{A}}) \otimes \overline{\boldsymbol{A}}$$

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{-3} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

Selanjutnya diperoleh

$$\overline{\boldsymbol{M}}^{\otimes \boldsymbol{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{M}}^{*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{ii}}^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian dapat dilihat bahwa $\overline{\boldsymbol{M}}_{11}^{+} = \overline{\boldsymbol{M}}_{22}^{+} = 0$, sehingga kolom ke-1 dan ke-2 matriks $\overline{\boldsymbol{M}}^{*}$ adalah vektor-vektor eigen fundamental yang bersesuaian dengan $\boldsymbol{\lambda}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$, yaitu $\overline{\mathrm{v}}_1 = [0,-1,0]^T$ dan $\overline{\mathrm{v}}_2 = [1,0,1]^T$. Dan untuk ketunggalan vektor eigen $\overline{\boldsymbol{A}}$ diperoleh

$$\overline{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{\alpha} \otimes \overline{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}$$

$$[0,-1,0]^T = \alpha \otimes [1,0,1]^T,\ \alpha = -1$$

Sehingga didapat

$$[0,-1,0]^T = [0,-1,0]^T.$$

Jadi, vektor interval yang diperoleh yaitu:

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = [0,-1,-1]^T$$

Dan

$$\overline{\mathrm{v}}_1 = [0,-1,0]^T$$

Sehingga

$$\mathrm{v} = [\underline{\mathrm{v}}_1, \overline{\mathrm{v}}_1]$$

$$\mathrm{v} = [[0,0],[-1,-1],[-1,0]]^{\mathrm{T}}$$

Yang merupakan vektor-vektor eigen *max-plus* interval matriks $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) = [2,3]$.

Contoh 4.2.2

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks

$$B = \begin{bmatrix} [-2,-1] & [1,2] & [\varepsilon,\varepsilon] \\ [3,4] & [1,1] & [2,4] \\ [1,2] & [\varepsilon,\varepsilon] & [1,1] \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Pertama tentukan matriks batas bawah dan batas atas matriks interval B, yaitu:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & \varepsilon \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dari matriks $\underline{B}$,didapat

$$\underline{B}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Dan

$$\underline{B}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan dicari nilai eigen dari matriks $\underline{B}$

$$\boldsymbol{\lambda}(\underline{\boldsymbol{B}}) = \oplus_{k=1}^{3} \left[\frac{1}{k}\max(\underline{A}_{11}, \underline{A}_{22}, \underline{A}_{33}), \frac{1}{k}\max(\underline{A}_{11}^{\otimes 2}, \underline{A}_{22}^{\otimes 2}, \underline{A}_{33}^{\otimes 2}), \frac{1}{k}\max(\underline{A}_{11}^{\otimes 3}, \underline{A}_{22}^{\otimes 3}, \underline{A}_{33}^{\otimes 3})\right]$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\underline{\boldsymbol{B}}) = \max\left(\frac{1}{1}\max(-2,1,1), \frac{1}{2}\max(4,4,2), \frac{1}{3}\max(5,5,4)\right)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\underline{\boldsymbol{B}}) = \max\left(\frac{1}{1}(1), \frac{1}{2}(4), \frac{1}{3}(5)\right)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\underline{\boldsymbol{B}}) = \mathbf{2}$$

Kemudian akan ditentukan vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda(\underline{B}) = 2$

$$\underline{M} = -\lambda(\underline{B}) \otimes \underline{B}$$

$$\underline{M} = -2 \otimes \begin{bmatrix} -2 & 1 & \varepsilon \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & \varepsilon & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & \varepsilon \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \varepsilon & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & \varepsilon \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \varepsilon & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 & -1 & \varepsilon \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \varepsilon & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}^{*} = E \oplus \underline{M} \oplus \underline{M}^{\otimes 2}$$

$$\underline{M}^{*} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -4 & -1 & \varepsilon \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \varepsilon & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}^{*} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}^{+} = \underline{M} \otimes \underline{M}^{*}$$

$$\underline{M}^{+}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian dapat dilihat bahwa $\underline{M}^{+}_{11} = \underline{M}^{+}_{22} = 0$ sehingga kolom ke-1 dan ke-2 pada $\underline{M}^{*}$ merupakan vektor eigen fundamental pada yang bersesuaian dengan $\boldsymbol{\lambda(\underline{B}) = 2}$**.** Kemudian akan diuji ketunggalannya dengan

$$\underline{v}_1 = \alpha \otimes \underline{v}_2,\ \alpha = 1$$

$$\underline{v}_1 = 1 \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jadi $\underline{v}_1$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda(\underline{B}) = 2$.

Selanjutnya akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks $\overline{B}$ dengan cara yang sama pada $\underline{B}$ diperoleh:

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 7 \\ 10 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(\overline{B}) = 3$$

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{M}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\overline{M}^{*} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{M}_{ii}^{+} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat vektor eigen fundamental pada kolom ke-1 dan ke-2 pada matriks $\overline{M}^{*}$, untuk ketunggalan vektor eigen diperoleh dengan cara yang sama pada matriks ***B*** dan diperoleh $\overline{\mathrm{v}_1} = [0 \quad 1 \quad -1]^T$.

Jadi, dari matriks ***B*** diperoleh nilai eigen $\lambda = [2{,}3]$ dengan $\mathrm{v} = \left[[0{,}0], [1{,}1], [-1, -1]\right]^T$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda(B)$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab IV dapat ditarik kesimpulan bahwa:

a) Nilai dan vektor eigen matriks interval yang diperoleh hasilnya berbentuk interval, yaitu interval dari nilai eigen dan vektor eigen dari $\underline{\boldsymbol{A}}$ dan $\overline{\boldsymbol{A}}$. Nilai eigen matriks interval dapat ditulis :

$\lambda(\boldsymbol{A}) = [\lambda(\underline{\boldsymbol{A}}), \lambda(\overline{\boldsymbol{A}})]$

Dan vektor eigen matriks interval dapat ditulis :

$\mathbf{v} = [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$.

b) Jika matriks *irredusibel* maka nilai eigen matriks interval tersebut tunggal.

5.2 Saran

Tugas akhir ini membahas cara menentukan nilai eigen matriks interval dengan pendekatan aljabar *max-plus*. Bagi yang berminat untuk membahas lebih lanjut tentang matriks interval ini, dapat dicari permasalahan lain terkait matriks tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi kelima. Erlangga, Jakarta. 1995

Cechlarova, K. *Eigenvectors Of Interval Matrices Over Max-Plus Algebra*. Discrete Applied Mathematics. Vol.150, pp.2-15. 2005

Farlow, Kasie. *Max-Plus Algebra*. Master's Thesis submitted to the faculty of the Virginia Polytechnic and State University. Blacksburg, Virginia. 2009

Butkovic, peter *max-linear systems: Theory and Algorithms,* Spinger Monographs in Mathematics, Spinger-Verlag, doi:10. 1007/978-1-84996-299-5.2010 [online] Avaliable Http://dx.doi.org/10.1007%F978-1-84996-299-5. 28 Desember 2010.

Rudhito, M. Andy, Sri Wahyuni, Ari Suparwanto dan F. Susilo "Aljabar Max-plus Interval", *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika*, UGM. 2008

Rudhito, M. Andy, Sri Wahyuni, Ari Suparwanto dan F. Susilo "Matriks Aljabar Max-plus interval", *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika*, pp. 23-32, UGM. 2008

Rudhito, M. Andy, Sri Wahyuni, Ari Suparwanto dan F. Susilo "Aljabar Max-plus dan Teori Graf", *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika*, UGM. 2008

Rudhito, M. Andy, Sri Wahyuni, Ari Suparwanto dan F. Susilo "Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-plus Interval", *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika*, UGM. 2008