

# ANALISIS DINAMIK KESTABILAN MODEL SIR PADA WAKTU DISKRIT

## TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
pada Program Studi Matematika

Oleh:

**SYAFIRA AULIANI**  
**11654201376**



**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU**  
**PEKANBARU**  
**2021**

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
    - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
    - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
  2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

## LEMBAR PERSETUJUAN

### ANALISIS DINAMIK KESTABILAN MODEL SIR PADA WAKTU DISKRIT

#### TUGAS AKHIR

Oleh:

**SYAFIRA AULIANI**

**11654201376**

Telah diperiksa dan disetujui sebagai Laporan Tugas Akhir  
di Pekanbaru, pada tanggal 01 Februari 2021

**Ketua Program Studi**

**Ari Pani Desvina, M.Sc.**  
NIP. 19811225 200604 2 003

**Pembimbing**

**Irma Suryani, M.Sc.**  
NIK. 130 517 091

## LEMBAR PENGESAHAN

### ANALISIS DINAMIK KESTABILAN MODEL SIR PADA WAKTU DISKRIT

#### TUGAS AKHIR

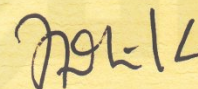
Oleh:

**SYAFIRA AULIANI**  
**11654201376**

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji  
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau  
di Pekanbaru, pada tanggal 01 Februari 2021

Pekanbaru, 01 Februari 2021  
Mengesahkan,

**Ketua Program Studi**



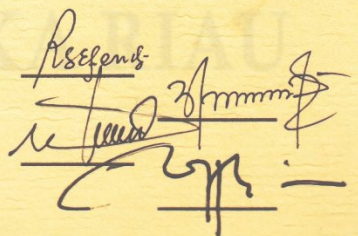
**Ari Pani Desvina, M.Sc.**  
**NIP. 19811225 200604 2 003**



**Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.**  
**NIP. 19660604 199203 1 004**

#### DEWAN PENGUJI:

**Ketua : Dr. Riswan Efendi, M.Sc**  
**Sekretaris : Irma Suryani, M.Sc.**  
**Anggota I : Mohammad Soleh, M.Sc.**  
**Anggota II : Wartono, M.Sc.**



- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
    - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
    - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
  2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebut sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjam Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 01 Februari 2021

Yang membuat pernyataan,

**SYAFIRA AULIANI**

**11654201376**

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang  
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Sembah sujud serta syukur tak henti-hentinya di panjatkan kepada Allah SWT karena hanya atas rahmat dan kuasanya studi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim ini akhirnya dapat terselesaikan. Salawat beserta salam juga selalu turunkan kepada Baginda Nabi Muhammad SAW dengan mengucapkan “allahummaa sholli’alaa syaidinaa muhammad wa’alaa aalii syaidinaa muhammad”.

Sebuah karya kecil, yang akhirnya dapat terselesaikan setelah melewati berbagai rintangan ini aku persembahkan secara kusus kepada dua malaikat tanpa sayap yang telah Tuhan kirimkan. Teruntuk Mama (Hj. Nani Asrul S.H.) dan Papa (Masmulyadi S.P.) terimakasih untuk setiap keringat yang jatuh dari tubuhmu demi memberikan kehidupan yang layak serta pendidikan yang tinggi untukku.

Sungguh, aku tak mampu untuk membalas perjuangan Mama dan Papa walau hanya setetes keringat saja. Terimakasih selalu memberikan kekuatan untukku disaat aku sudah tidak sanggup untuk melanjutkan perjuanganku. Untuk tidak pernah mundur barang selangkah pun, disaat tak seorangpun yang ingin berdiri untukku. Atas semua rasa percaya disaat banyak komentar yang tertuju padaku. Untuk selalu menjadi penerang disetiap gelapnya hidupku. Mama Papa, baru ini yang bisa Yaya berikan. Belum banyak yang bisa Yaya lakukan untuk membahagiakan Mama dan Papa. Tapi semoga, dengan selesainya pendidikanku ini dapat mengobati sedikit lelah yang telah Mama dan Papa rasakan selama ini. Terimakasih untuk segalanya Ma, Pa.

Untuk adik ku Maulana Auliadi, terimakasih untuk segala pertengkaran di antara kita. Terimakasih telah menjadi orang yang ku punya selain Mama dan Papa. Untuk selalu menyayangi dan melindungiku dengan caramu yang menyebarkan. Dan teruslah memasak makanan yang enak untuk ku disaat tengah dilanda kelaparan.

Dan untuk abang Yusri Amin Aziz, terimakasih juga sudah menghibur dengan segala perperangan di antara kita yang membantuku untuk tidak terlalu terfokus dan stress dalam menyelesaikan maha karya ini. Terimakasih sudah mendukung dan menemani dalam setiap urusan yang berhubungan dalam penulisan Tugas Akhir ini. Terimakasih juga sudah men-*support* asupan gizi serta ke-*fangirl*-an diriku terhadap EXO.

Terakhir untuk siapapun yang telah bertanya “Kapan Wisuda?” kepadaku, tolong setelah ini jangan lontarkan pertanyaan “Kapan Menikah?”. Karna setiap proses dalam hidup ini pasti ada waktunya. Owkey?

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
    - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
    - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
  2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

# ANALISIS DINAMIK KESTABILAN MODEL SIR PADA WAKTU DISKRIT

**SYAFIRA AULIANI**  
**11654201376**

Tanggal Sidang : 01 Februari 2021  
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau  
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

## ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas dinamika model SIR waktu diskrit pada model penyebaran penyakit secara umum. Titik ekuilibrium yang diperoleh kemudian ditentukan kestabilannya dengan menggunakan nilai eigen. Kemudian dilakukan simulasi terhadap model SIR pada waktu diskrit. Hasil yang diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0$  akan stabil asimtotik jika syarat terpenuhi, artinya penyakit akan menghilang dari populasi. Dan titik ekuilibrium endemik  $E_1$  akan stabil asimtotik jika syarat terpenuhi, artinya subpopulasi terinfeksi masih memungkinkan untuk menularkan penyakit kepada subpopulasi rentan sehingga penyakit masih ada di dalam populasi.

**Katakunci :** *Model SIR, Nilai Eigen, Waktu diskrit, Kestabilan.*

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
    - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
    - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
  2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang  
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:  
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.  
2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau  
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

## ***DYNAMIC ANALYSIS OF SIR MODEL STABILITY AT DISCRETE TIME***

**SYAFIRA AULIANI**  
**11654201376**

*Date of Final Exam* : 01 February 2021

*Date of Graduation* :

*Department of Mathematics  
Faculty of Science and Technology  
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau  
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru*

### ***ABSTRACT***

*This final project discusses the dynamics of a discrete time SIR model in a general disease spread model. The equilibrium point obtained is then determined for its stability using the eigenvalues. Then performed a simulation of the SIR model at discrete times. The results obtained that the disease-free equilibrium point  $E_0$  will be asymptotically stable if the conditions are met, meaning that the disease will disappear from the population. And the endemic equilibrium point  $E_1$  will be asymptotically stable if the conditions are met, meaning that the infected subpopulation is still possible to transmit the disease to a vulnerable subpopulation so that the disease remains in the population.*

**Keywords** : *Discrete Time, Eigen values, Stability, SIR Model*

UIN SUSKA RIAU



1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

*Alhamdulillahirabbil'alamiin.* Puji syukur kita panjatkan kehadiran Allah SWT, atas segala rahmat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul “**Analisis Dinamik Kestabilan Model SIR Pada Waktu Diskrit**”. Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, semoga kita semua mendapat syafaat-nya.

Penulisan tugas akhir ini diajukan untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis banyak mendapatkan bimbingan, arahan, dan masukan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih khususnya kepada kedua orang tua tercinta Ayahanda Masmulyadi S.P. dan Ibunda Hj. Nani Asrul S.H. yang telah memberikan segalanya serta selalu mendo'akan dan melimpahkan kasih sayangnya. Selain itu, dalam kesempatan ini izinkanlah penulis mengucapkan terimakasih setinggi-tingginya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Suyitno M.Ag., selaku Plt. Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Bapak Aprijon, S.Si, M.Ed., selaku Pembimbing Akademik yang senantiasa membimbing, memberi arahan serta nasehat kepada penulis dari awal perkuliahan.
5. Ibu Irma Suryani, M.Sc., selaku Pembimbing Tugas Akhir yang telah sangat banyak membantu penulis dan menyelesaikan Tugas Akhir ini.
6. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc. dan Bapak Wartono, M.Sc., selaku Penguji I dan Penguji II yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini.

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

7. Bapak dan Ibu di Fakultas Sains dan Teknologi, terkhusus untuk Dosen Program Studi Matematika, yang telah banyak menyalurkan ilmu pengetahuan kepada penulis.
8. Adik Maulana Auliadi dan Abang Yusri Amin Aziz, yang telah memberi warna untuk hari-hari penulis dengan perkelahian dan kasih sayang.
9. Kakak Anisa Wulandari, yang selalu memberikan semangat dan dukungannya walau sejauh apapun dia berada.
10. Aminah Utami dan Safitri Wahyuni, yang telah banyak membantu dalam menyelesaikan berbagai masalah dalam penulisan Tugas Akhir ini.
11. Sahabat-sahabat penulis, Cika Ahdya, Karina Shafira, Safitrah Wardah, Nadya Savira, Defrian, Riski AP, Wisti, Ayu Rika, Reza, Meme, dan Tuti Adawiyah yang telah setia mendengarkan segala keluh kesah penulis.
12. Park Chanyeol, Oh Sehun, seluruh member Exo serta Mardiah Munte dan Nurul Mufal selaku anggota grub EXO-L, yang telah menjadi penyemangat penulis dalam menyelesaikan perkuliahan ini.
13. Teman-teman angkatan 2016, dan teristimewa untuk Matematika Kelas C, yang telah banyak memberikan bantuan serta dukungan kepada penulis selama perkuliahan.

Semoga Allah Yang Maha Pemurah, memberikan pahala setimpal atas segala jasa-jasanya. Aamiin Ya Robbal Alamin. Akhirnya dari segenap kemampuan dan kerendahan hati, skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tugas Akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Untuk itu kritik dan saran dari semua pihak penulis nantikan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini dapat berguna dan bermanfaat bagi penulis dan bagi semua pihak yang membacanya.

Pekanbaru, 01 Februari 2021

Syafira Auliani

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>LEMBAR PERSETUJUAN</b> .....	ii
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL</b> .....	iv
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b> .....	v
<b>LEMBAR PERSEMBAHAN</b> .....	vi
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	viii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	ix
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xi
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xiii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiv
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xv
<b>DAFTAR SINGKATAN</b> .....	xvi
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xvii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Batasan Masalah .....	3
1.4 Tujuan Penelitian .....	4
1.5 Manfaat Penelitian .....	4
1.6 Sistematika Penulisan .....	4
<b>BAB II LANDASAN TEORI</b>	
2.1 Pemodelan Matemarika .....	6
2.2 Model Epidemologi SIR .....	8
2.3 Persamaan Diferensi .....	10
2.4 Persamaan Diferensi Linear Orde Satu .....	12

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.5	Linearisasi Sistem Persamaan Non Linear .....	15
2.6	Nilai Eigen dan Vektor Eigen .....	18
2.7	Bentuk Kuadratik .....	19
2.8	Titik Ekuilibrium Persamaan Diferensi .....	22
2.9	Kestabilan Sistem Diskrit .....	23

**BAB III METODOLOGI PENELITIAN**

3.1	Jenis Penelitian .....	26
3.2	Jenis dan Sumber Data .....	26
3.3	Teknik Analisis Data .....	27

**BAB IV PEMBAHASAN**

4.1	Pemodelan Matematika .....	28
4.2	Model Epidemologi SIR dengan Waktu Diskrit .....	29
4.3	Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit ( $E_0$ ) .....	29
4.4	Titik Ekuilibrium Endemik ( $E_1$ ) .....	31
4.5	Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium .....	34
4.5.1	Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit ( $E_0$ ) ....	36
4.5.2	Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik ( $E_1$ ) .....	37
4.6	Simulasi .....	40
4.6.1	Simulasi Kasus untuk Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit ( $E_0$ ) .....	41
4.6.2	Simulasi Kasus untuk Titik Ekuilibrium Endemik ( $E_1$ ) .....	43

**BAB V PENUTUP**

5.1	Kesimpulan .....	47
5.2	Saran .....	48

**DAFTAR PUSTAKA**

**LAMPIRAN**

**DAFTAR RIWAYAT HIDUP**

## DAFTAR SIMBOL

$n$	: Waktu diskrit
$S(n)$	: Jumlah individu yang rentan terhadap infeksi penyakit pada waktu diskrit
$I(n)$	: Jumlah individu yang terinfeksi penyakit pada waktu diskrit
$S(n)$	: Jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit pada waktu diskrit
$x_0$	: Nilai awal
$f^n(x_0)$	: Iterasi ke- $n$ dari $x_0$
$A$	: Matriks $n \times n$
$\lambda$	: Nilai eigen dari $A$
$b$	: Tingkat kelahiran
$\mu$	: Tingkat kematian
$\gamma$	: Tingkat pemulihan
$\beta$	: Rata-rata kontak yang terinfeksi per hari
$\alpha$	: Tingkat kematian karena infeksi penyakit
$!$	: Faktorial
$I$	: Interval
$\in$	: Anggota / elemen
$\subset$	: Subset
$\mathbb{Z}^+$	: Himpunan bilangan bulat positif
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar</b>	<b>Halaman</b>
2.1 Diagram Tahapan-Tahapan dalam Membangun Model Matematika .....	7
4.1 Grafik Simulasi Kasus Untuk Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit .....	42
4.2a Grafik Simulasi Populasi <i>Susceptible</i> / Rentan .....	44
4.2b Grafik Simulasi Populasi <i>Infected</i> / Terinfeksi .....	44
4.2c Grafik Simulasi Populasi <i>Recovered</i> / Sembuh .....	45

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel</b>	<b>Halaman</b>
2.1 Penjumlahan Pasti .....	14
3.1 Parameter yang Digunakan .....	26
4.1 Nilai Awal Parameter Bebas Penyakit .....	41
4.2 Nilai Awal Populasi Bebas Penyakit .....	41
4.3 Nilai Awal Populasi Endemik.....	43
4.4 Nilai Awal Populasi Endemik.....	43

## DAFTAR SINGKATAN

SIR	: <i>Susceptible, Infected, Recovered</i>
SARS	: <i>Severe Acute Respiratory Syndrome</i>
HIV	: <i>Human Immunodeficiency Virus</i>
AIDS	: <i>Acquired Immune Deficiency Syndrome</i>



### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran		Halaman
A.	Solusi Simulasi Kasus untuk Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit .....	A-1
B.	Solusi Simulasi Kasus untuk Titik Ekuilibrium Endemik.....	B-1



## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Sejak dahulu hingga sekarang kesehatan merupakan hal utama yang selalu diperhatikan oleh manusia. Dengan memiliki tubuh yang sehat manusia dapat melaksanakan berbagai aktifitas kehidupan dengan lancar. Sebaliknya jika tubuh sedang dalam keadaan yang tidak sehat, maka segala proses kehidupan yang dilalui manusia akan terganggu. Terutama pada zaman sekarang ini, dengan maraknya proses produksi yang menggunakan berbagai macam bahan kimia, pembakaran bahan bakar fosil, serta pola hidup yang tidak sehat membuat tubuh manusia menjadi rentan terhadap penyakit. Dimana penyakit-penyakit tersebut merupakan faktor terbesar yang dapat menghambat aktifitas kehidupan manusia.

Berdasarkan jenisnya, penyakit dibagi menjadi dua, yaitu penyakit menular dan penyakit tidak menular. Infeksi dari berbagai penyakit menular dapat menyebabkan epidemi, dimana hal tersebut merupakan beban besar bagi banyak negara. Epidemi sendiri merupakan suatu wabah penyakit yang menjangkiti sebagian besar populasi pada waktu tertentu dengan laju penyebaran yang melampaui laju “ekspektasi” (dugaan) yang didasarkan pada pengalaman mutakhir. Beberapa penyakit menular yang pernah terjadi hingga menyebabkan suatu pandemi diantaranya adalah influenza, malaria, SARS, HIV/AIDS dan cacar air. Sedangkan tekanan darah tinggi, serangan jantung, stroke, dan diabetes merupakan beberapa contoh dari penyakit yang tidak menular.

Para ahli dan peneliti di berbagai bidang, termasuk ekonomi, biologi dan terutama dalam bidang kesehatan acap kali menggunakan model matematika dalam menyelesaikan masalah yang tengah dihadapi. Dalam bidang kesehatan model matematika menyediakan kerangka kerja eksplisit dalam mengembangkan dan mengkomunikasikan pemahaman mengenai dinamika penularan penyakit menular. Sehingga dapat dipergunakan dalam memperkirakan serta mempelajari penyebaran suatu penyakit. Sedangkan pemodelan matematika dapat digunakan untuk menghitung berapa banyak individu-individu yang masih dalam keadaan

sehat, terinfeksi, banyaknya individu yang harus melakukan vaksinasi dan pengobatan, serta untuk menghitung kapan endemik akan terjadi.

Model epidemi *Susceptible Infected Recovered* (SIR) merupakan jenis model dinamis dari penyebaran suatu penyakit di dalam populasi tertentu. Model ini pertama kali diperkenalkan pada tahun 1927 oleh [17] yang kemudian dikembangkan kembali oleh banyak ahli. Model SIR membagi populasi menjadi 3 bagian, yaitu *Susceptible* (S) yang merupakan kelompok individu yang rentan terkena penyakit, *Infected* (I) yang merupakan kelompok individu yang terkena atau terinfeksi suatu penyakit serta dapat sembuh, dan *Recovered* (R) yang merupakan kelompok individu yang telah sembuh dan kebal terhadap penyakit.

Beberapa asumsi yang terdapat pada penelitian yang dilakukan oleh [17] adalah bahwa tidak terjadi kelahiran dan kematian di dalam populasi, penularan penyakit yang terjadi ditularkan melalui kontak langsung dengan individu yang terinfeksi penyakit, serta individu yang telah sembuh akan kebal terhadap penyakit sehingga tidak dapat terinfeksi lagi. Dalam penelitian ini diperoleh hasil suatu penyakit akan menghilang dari populasi apabila *Basic Reproduction Number* ( $R_0$ )  $< 1$ . Sedangkan penyakit tersebut akan tetap ada didalam populasi apabila *Basic Reproduction Number* ( $R_0$ )  $> 1$ .

Selain itu, terdapat juga beberapa penelitian lain yang membahas mengenai model SIR di antaranya adalah penelitian oleh [2] yang dilaksanakan pada tahun 2005 mengenai model SIR dan SIS penyebaran penyakit dengan hasil diperoleh beberapa tingkat vaksinasi untuk beberapa tingkat keadaan. Penelitian selanjutnya pada tahun 2013 yang dilakukan oleh [13] mengenai model epidemi SIR diskrit dengan tingkat insiden tidak monoton menggunakan metode Euler untuk menentukan perilaku dinamik dari model SIR epidemi diskrit tersebut. Pada penelitian ini ditemukan bahwa suatu model diskrit dapat konsisten secara dinamis dengan model kontinunya hanya untuk  $h$  yang relatif kecil. Sedangkan untuk  $h$  yang relatif besar, model akan menunjukkan perilaku dinamik yang kompleks seperti, bifurkasi dan fenomena chaos.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Pada tahun 2015 terdapat penelitian yang dilakukan oleh [11] mengenai kestabilan global model SIR epidemi diskrit dengan vaksinasi dan pengobatan. Penelitiannya menunjukkan bahwa dinamik global ditunjukkan oleh bilangan reproduksi dasar yang mana apabila bilangan reproduksi dasar bernilai kecil sama dengan satu, maka ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik, sedangkan jika bilangan reproduksi dasar bernilai besar dari satu, maka ekuilibrium endemik stabil asimtotik. Lebih lanjut pada tahun yang sama terdapat penelitian oleh [1] yang membahas mengenai perilaku dari model epidemi SIR menyatakan bahwa suatu penyakit akan terus menyebar disaat  $R_0 > 1$ , dan penyakit akan menghilang dari populasi tersebut disaat  $R_0 < 1$ . Jika  $R_0 < 1$ , maka titik ekuilibrium bebas penyakit pada model tersebut dapat dikatakan stabil.

Berdasarkan penjelasan dan pemaparan mengenai penelitian terdahulu maka penulis tertarik untuk mengulas kembali jurnal oleh [1] dengan judul “**Analisis Dinamik Kestabilan Model SIR Pada Waktu Diskrit**”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah di uraikan di atas maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis kestabilan titik ekuilibrium dari model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) yang diberikan?
2. Bagaimana analisis dinamik untuk kestabilan dari model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) yang diberikan?

## 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada Tugas Akhir ini adalah membahas mengenai penyakit menular yang hanya ditularkan melalui kontak langsung oleh penderita kepada individu yang rentan. Sedangkan untuk jenis penyakit yang akan dibahas merupakan penyakit umum dengan model SIR tanpa memfokuskan hanya pada satu jenis penyakit.

1. Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
2. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
3. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

#### 1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis mengenai bagaimana kestabilan dari titik ekuilibrium dari model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) yang telah diberikan.
2. Menganalisis mengenai bagaimana analisis dinamik untuk kestabilan dari model *Susceptible Infected Recovered* (SIR) yang telah diberikan.

#### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi peneliti  
Guna mempelajari tentang bagaimana pengembangan serta penerapan dari wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari dengan mengkaji mengenai bagaimana analisis dari suatu model *Susceptible Infected Recovered* (SIR).
2. Bagi pembaca  
Sebagai salah satu acuan dalam menambah wawasan mengenai bagaimana pemodelan model matematika *Susceptible Infected Recovered* (SIR) dalam bidang biologi.

#### 1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan Tugas Akhir ini mencakup lima bab, yaitu :

##### **BAB I                    Pendahuluan**

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

##### **BAB II                   Landasan Teori**

Bab ini berisi teori-teori dasar yang digunakan dalam proses penelitian.

##### **BAB III                Metodologi Penelitian**

Bab ini berisi tentang langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian pada tugas akhir ini.

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## **BAB IV**

### **Hasil dan Pembahasan**

Bab ini berisi tentang pembahasan dan pemaparan hasil penelitian yang didapat pada tugas akhir.

## **BAB V**

### **Penutup**

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran yang diperoleh dari penelitian yang telah dilakukan.



## BAB II

### LANDASAN TEORI

#### 2.1 Pemodelan Matematika

Model merupakan suatu representasi dari objek, benda, atau ide-ide dalam bentuk yang disederhanakan dari suatu fenomena alam. Suatu model memuat informasi-informasi mengenai suatu fenomena dengan tujuan untuk mempelajari fenomena yang sesungguhnya. Dalam matematika suatu model merupakan gambaran masalah dalam kehidupan sehari-hari yang diformulasikan secara sistematis. Dengan kata lain, pemodelan matematika merupakan suatu proses merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematika [16].

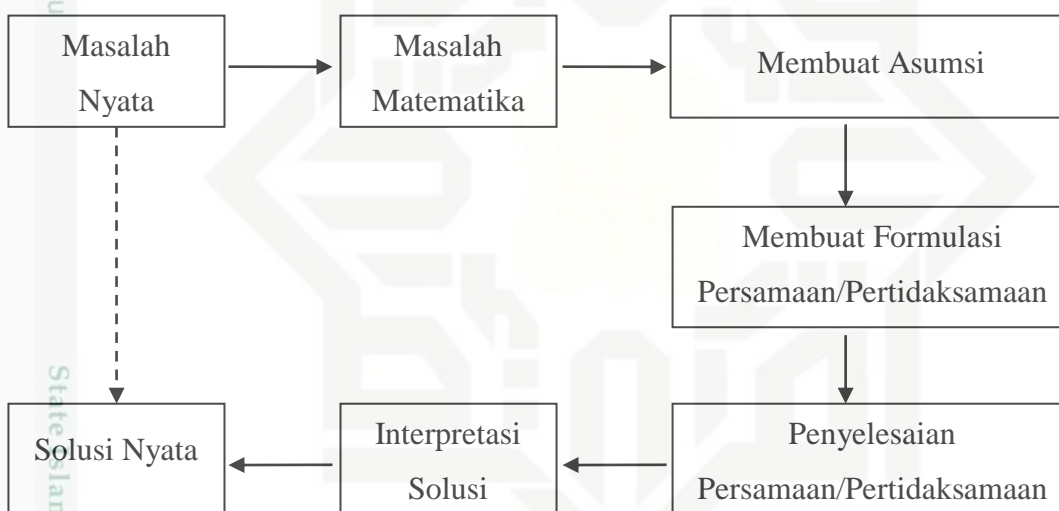
Selain digunakan dalam ilmu-ilmu alam atau teknik rekayasa seperti pada bidang fisika, biologi, dan ilmu-ilmu teknik rekayasa lainnya, model matematika juga dapat diterapkan dalam berbagai ilmu sosial seperti psikologi, ekonomi, ilmu politik, sosiologi dan bahkan dalam ilmu sejarah. Model matematika itu sendiri juga dapat diterapkan dalam penggunaan ilmu komputer yang digunakan dalam menstimulasi suatu jaringan komputer serta dalam ilmu mekanika dimana model matematika digunakan untuk menganalisis pergerakan model roket.

Proses penjabaran atau merepresentasikan ini disebut sebagai *modeling* atau pemodelan yang tidak lain merupakan proses berfikir melalui sekuen yang logis [15]. Sehingga dapat disimpulkan bahwa suatu model matematika dapat dikatakan sebagai suatu model yang baik apabila model matematika tersebut dapat mewakili dengan suatu permasalahan dunia nyata dalam bahasa matematika yang benar.

*Mathematical biosciences* merupakan suatu bidang ilmu yang mencakup penelitian mengenai penggunaan pemodelan matematika dalam *biosciences*. Dalam *Mathematical biosciences* terdapat suatu cabang ilmu yang dikenal dengan *mathematical epidemiology*, yang membahas mengenai penyebaran dan pengendalian penyakit serta mempelajari suatu model epidemi suatu penyakit.

*Epidemiology* itu sendiri merupakan ilmu dalam mempelajari pola kesehatan dan penyakit beserta faktor yang terkait dengan hal ini di dalam populasi.

Pemodelan matematika yang berdasarkan pada asumsi-asumsi tertentu, diharapkan dapat menjelaskan suatu fenomena serta memperkirakan tindakan antisipasi yang dapat diambil jika suatu epidemi sedang terjadi. Dalam model matematika dikenal berbagai istilah seperti *Susceptible (S)* untuk kelas populasi yang rentan, *Infectious (I)* untuk kelas populasi yang telah terinfeksi, dan *Recovered (R)* untuk kelas populasi yang telah sembuh. Dalam membangun sebuah model, diperlukan beberapa tahapan sebagai agar dapat menghasilkan suatu model yang realibel.



**Gambar 2.1 Tahapan-tahapan dalam membangun Model Matematika**

Menurut [16] berdasarkan Gambar 2.1 diperoleh beberapa tahapan dalam pemodelan matematika yakni sebagai berikut :

1. Menyatakan permasalahan nyata kedalam pengertian matematika

Pada tahap ini, pemahaman terhadap permasalahan yang tengah dihadapi sangat diperlukan sehingga dapat mengidentifikasi variabel-variabel dalam masalah tersebut serta guna membangun beberapa hubungan antar variabel yang telah diperoleh.

2. Menentukan asumsi yang akan digunakan

Asumsi yang digunakan dalam penentuan suatu model merupakan sebuah cerminan dari proses pola pemikiran manusia sehingga model dapat



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

berjalan. Oleh karenanya asumsi yang diterapkan oleh setiap individu dalam suatu masalah dapat berbeda-beda.

3. Membentuk formulasi dari persamaan/pertidaksamaan model matematika  
Formulasi suatu model dapat diciptakan dengan memahami tentang bagaimana hubungan yang tercipta antar variabel dan asumsi. Karena merupakan langkah terpenting serta memiliki tingkat kesulitan paling tinggi, tidak jarang harus dilakukan pengujian kembali terhadap asumsi-asumsi yang diperoleh guna menciptakan formulasi yang sesuai dan realistik.

4. Menyelidiki sifat dari solusi

Dalam beberapa kasus, terdapat kesulitan dalam menentukan hasil atau solusi dari formulasi yang telah dibuat. Sehingga pada tahap ini dilakukan analisis mengenai sifat atau perilaku dari solusi model matematika tersebut.

5. Menginterpretasikan solusi

Menginterpretasikan suatu solusi merupakan proses menghubungkan kembali formula matematika dengan permasalahan dalam kehidupan nyata. Interpretasi sangat penting untuk dilakukan dalam mengetahui apakah hasil yang telah diperoleh masuk akal atau tidak. Interpretasi sendiri dapat diwujudkan dalam bentuk grafik yang menggambarkan solusi yang diperoleh yang kemudian di interpretasikan dalam dunia nyata.

## 2.2 Model Epidemik SIR

Dalam sejarah perkembangannya model penyebaran penyakit pertama kali diperkenalkan pada tahun 1927 oleh [17], yang kemudian dikenal sebagai model epidemik SIR karena dalam model tersebut populasi total dibagi kembali menjadi tiga kelas, yaitu kelas *Susceptible* (S), kelas *Infected* (I), dan kelas *Recovered* (R). Model SIR pada awalnya dikembangkan untuk mengetahui laju penyebaran dan kepunahan suatu wabah penyakit dalam suatu populasi tertutup dan bersifat endemik [7].

Menurut [3], model epidemi SIR membagi kelompok suatu populasi menjadi tiga bagian, yaitu:

- a. *Susceptible* (S), merupakan kelompok individu yang sehat tapi rentan terinfeksi
- b. *Infected* (I), merupakan kelompok individu yang terinfeksi penyakit menular.
- c. *Recovered* (R), merupakan kelompok individu yang telah pulih dan memiliki kekebalan permanen untuk tidak tertular penyakit yang sama.

Suatu model epidemi SIR dapat dibangun berdasarkan asumsi-asumsi berikut ini [14] :

- a. Populasi bersifat konstan.
- b. Satu-satunya cara untuk dapat meninggalkan kelompok rentan adalah dengan terinfeksi penyakit, dan satu-satunya cara bagi individu yang terinfeksi penyakit untuk sembuh adalah dengan proses pemulihan. Setelah pulih dari penyakit, individu tersebut dapat dikatakan sembuh, dan memiliki kekebalan tubuh.
- c. Umur, seks, status sosial, dan ras tidak mempengaruhi untuk terkena infeksi.
- d. Tidak ada kekebalan tubuh yang turun temurun.
- e. Suku dari populasi campuran memiliki interaksi yang sama dengan orang lain pada tingkat yang sama.

Jumlah individu pada kelompok *Susceptible* (S), *Infected* (I), *Recovered* (R) pada waktu  $t$  masing-masing dinyatakan sebagai  $S(t)$ ,  $I(t)$  dan  $R(t)$ . Dimana jumlah populasi total, yakni  $N$  dianggap konstan karena pengaruh kelahiran, kematian serta imigrasi tidak diperhatikan. Karenanya  $S(t) + I(t) + R(t) = N$ .

Model matematika yang akan dibahas pada tugas akhir ini merupakan penelitian mengenai model epidemi SIR oleh [1] mengenai perilaku dari model epidemik SIR diskrit yang berjudul *Behavior of a Discrete SIR Epidemic Model*. Berdasarkan model yang telah diperoleh selanjutnya akan dicari solusi analitis beserta titik kesetimbangannya, yang kemudian akan diinterpretasikan kedalam permasalahan sesungguhnya di kehidupan nyata.

Dengan asumsi-asumsi yang telah dibangun, model epidemi SIR diskrit tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$S(n + 1) = b - \beta S(n)I(n) + (1 - \mu)S(n) \quad (2.1a)$$

$$I(n + 1) = \beta S(n)I(n) + [1 - (\gamma + \mu + \alpha)]I(n) \quad (2.1b)$$

$$R(n + 1) = \gamma I(n) + (1 - \mu)R(n) \quad (2.1c)$$

dengan  $A = \gamma + \mu + \alpha$  dan  $b, \beta, \gamma, \mu, \alpha > 0$  dengan kondisi awal  $S(0) > 0$ ,  $I(0) > 0$  dan  $R(0) > 0$ .

dimana :

$b$  = Tingkat kelahiran

$\mu$  = Tingkat kematian

$\gamma$  = Tingkat pemulihan

$\beta$  = Rata-rata kontak yang terinfeksi per hari

$\alpha$  = Tingkat kematian infeksi karena penyakit.

### 2.3 Persamaan Diferensi

Persamaan diferensi biasanya menggambarkan proses evolusi atau perubahan dari fenomena tertentu dalam jangka waktu tertentu. Misalkan, jika suatu populasi memiliki generasi diskrit, maka ukuran  $(n + 1)$  generasi ke  $x(n + 1)$  merupakan suatu fungsi generasi ke- $n$  dari  $x(n)$ . Hubungan ini dapat ditulis dalam bentuk *persamaan diferensi* sebagai berikut:

$$x(n + 1) = f(x(n)) \quad (2.2)$$

Kita mungkin ingin melihat hubungan tersebut dengan titik lainnya, untuk itu diambil  $x_0$  sebagai nilai awal maka diperoleh bentuk barisan

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

untuk memudahkan dalam penulisannya, maka dapat di notasikan sebagai

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), \quad f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \dots$$

$f(x_0)$  disebut sebagai *iterasi* pertama dari  $x_0$  terhadap  $f$ ;  $f^2(x_0)$  disebut sebagai *iterasi* kedua dari  $x_0$  terhadap  $f$ ; dan  $f^k(x_0)$  disebut sebagai *iterasi* ke- $k$  dari  $x_0$  terhadap  $f$ . Himpunan dari semua iterasi positif  $\{f^k(x_0) : k \geq 0\}$  dimana  $f^0(x_0) = f^k(x_0)$ , menurut disebut sebagai orbit (*positif*) dari  $x_0$  dan

dilambangkan dengan  $O(x_0)$ . Prosedur iterasi ini merupakan suatu tahapan dari sistem dinamik untuk waktu diskrit. Sebagai contoh diberikan suatu fungsi  $f(x) = x^2$  dengan nilai awal  $x_0 = 0.5$  maka akan diperoleh iterasi sebagai berikut

$$x(n + 1) = f(x(n))$$

$$x(0 + 1) = x(1) = f(x(0)) = (0.5)^2 = 0.25$$

$$x(1 + 1) = x(2) = f(x(1)) = (0.25)^2 = 0.0625$$

$$x(2 + 1) = x(3) = f(x(2)) = (0.0625)^2 = 0.00390625$$

⋮

Berdasarkan iterasi diatas diperoleh suatu deret  $0.5, 0.25, 0.0625, 0.00390625, \dots$  dimana deret tersebut dapat dikatakan semakin menuju 0 sehingga suatu fungsi  $f(x) = x^2$  dengan nilai awal  $x_0 = 0.5$  akan memperoleh nilai yang semakin menuju 0.

Selanjutnya jika fungsi  $f$  pada Persamaan (2.2) diganti dengan fungsi  $g$  yang memiliki dua variabel, dimana  $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dengan  $\mathbb{Z}^+$  merupakan himpunan bilangan bulat non-negatif dan  $\mathbb{R}$  merupakan himpunan nilangan real, diperoleh

$$x(n + 1) = g(n, x(n)). \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) disebut sebagai sistem *non-autonomous* atau *time-variant*, sedangkan Persamaan (2.2) disebut sebagai sistem *autonomous* atau *time-invariant*. Kajian mengenai Persamaan (2.3) jauh lebih lebih rumit dan tidak cocok dengan teori sistem dinamik diskrit untuk persamaan diferensi orde satu. Jika nilai awal  $x(n_0) = x_0$  diberikan, maka untuk  $n \geq n_0$  terdapat suatu solusi tunggal  $x(n) \equiv x(n, n_0, x_0)$  dari Persamaan (2.3) sedemikian sehingga  $x(n, n_0, x_0) = x_0$ . Hal ini dapat ditunjukkan dengan mudah melalui iterasi, yaitu

$$x(n_0 + 1, n_0, x_0) = g(n_0, x(n_0)) = g(n_0, x_0),$$

$$x(n_0 + 2, n_0, x_0) = g(n_0 + 1, x(n_0 + 1)) = g(n_0 + 1, g(n_0, x_0)),$$

$$x(n_0 + 3, n_0, x_0) = g(n_0 + 2, x(n_0 + 2)) = g[n_0 + 2, g(n_0 + 1, g(n_0, x_0))].$$

Secara induktif diperoleh  $x(n, n_0, x_0) = g[n - 1, x(n - 1, n_0, x_0)]$  [12].

## 2.4 Persamaan Diferensi Linear Orde Satu

Pada bagian ini kita akan mempelajari mengenai kasus khusus yang paling sederhana dari Persamaan (2.2) dan (2.3) yaitu, persamaan linear. Diberikan persamaan linear homogen orde satu sebagai berikut

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \quad (2.4)$$

dan diberikan persamaan non-homogen terkait sebagai berikut

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \quad (2.5)$$

dimana dalam kedua persamaan diasumsikan bahwa  $a(n) \neq 0$ , dimana  $a(n)$  dan  $g(n)$  merupakan fungsi bilangan real yang didefinisikan untuk  $n \geq n_0 \geq 0$ .

Melalui proses iterasi sederhana, dapat diperoleh solusi dari Persamaan (2.4) sebagai berikut:

$$x(n_0 + 1) = a(n_0)x(n_0) = a(n_0)x_0,$$

$$x(n_0 + 2) = a(n_0 + 1)x(n_0 + 1) = a(n_0 + 1)a(n_0)x_0,$$

$$x(n_0 + 3) = a(n_0 + 2)x(n_0 + 2) = a(n_0 + 2)a(n_0 + 1)a(n_0)x_0.$$

Dan secara induktif, dapat dilihat bahwa

$$x(n) = x(n_0 + n - n_0)$$

$$= a(n-1)a(n-2) \cdots a(n_0)x_0,$$

$$x(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0 \quad (2.6)$$

Untuk Persamaan (2.5) diperoleh suatu solusi tunggal dari persamaan non-homogen dengan iterasi sebagai berikut:

$$y(n_0 + 1) = a(n_0)y_0 + g(n_0),$$

$$y(n_0 + 2) = a(n_0 + 1)y(n_0 + 1) + g(n_0 + 1)$$

$$= a(n_0 + 1)a(n_0)y_0 + a(n_0 + 1)g(n_0) + g(n_0 + 1).$$

Menggunakan induksi matematika untuk menunjukkan bahwa untuk semua  $n \in \mathbb{Z}^+$  berlaku:

$$y(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[ \prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r). \quad (2.7)$$

Dalam penetapan ini, di asumsikan bahwa rumus (2.7) berlaku untuk  $n = k$ .

Kemudian dari Persamaan (2.5),  $y(k + 1) = a(k)y(k) + g(k)$ , yang dengan Persamaan (2.7) menghasilkan

$$\begin{aligned} y(k + 1) &= a(k) \left[ \prod_{i=n_0}^{k-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[ a(k) \prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r) + g(k) \\ &= \left[ \prod_{i=n_0}^k a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[ \prod_{i=r+1}^k a(i) \right] g(r) + \left( \left[ \prod_{i=k+1}^k a(i) \right] \right) g(k)^1 \\ &= \left[ \prod_{i=n_0}^k a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^k \left[ \prod_{i=r+1}^k a(i) \right] g(r) \end{aligned}$$

Berdasarkan pada pembuktian diatas dapat disimpulkan bahwa Persamaan (2.7) berlaku untuk semua  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Selain itu juga terdapat dua kasus khusus dari Persamaan (2.5) yang sangat penting dalam berbagai penerapannya. Persamaan pertama dinyatakan sebagai berikut,

$$y(n + 1) = ay(n) + g(n), \quad y(0) = y_0. \quad (2.8)$$

Menggunakan Persamaan (2.7) ditetapkan bahwa

$$y(n) = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k) \quad (2.9)$$

Persamaan kedua diberikan sebagai berikut,

$$y(n + 1) = ay(n) + b, \quad y(0) = y_0. \quad (2.10)$$

Menggunakan rumus dari Persamaan (2.9) diperoleh

$$y(n) = \begin{cases} a^n y_0 + b \left[ \frac{a^n - 1}{a - 1} \right] & \text{jika } a \neq 1 \\ y_0 + bn & \text{jika } a = 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

Lebih lanjut, perhatikan bahwa solusi dari persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = ax(t), \quad x(0) = x_0$$

<sup>1</sup> Perhatikan bahwa di asumsikan notasi  $\prod_{i=k+1}^k a(i) = 1$  dan  $\sum_{i=k+1}^k a(i) = 0$ .

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

diberikan oleh

$$x(t) = e^{at}x_0,$$

sedangkan solusi dari persamaan diferensial non-homogen

$$\frac{dy}{dt} = ay(t) + g(t), \quad y(0) = y_0,$$

diberikan oleh

$$y(t) = e^{at}y_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}g(s) ds.$$

Disini, eksponensial  $e^{at}$  pada persamaan diferensial koresponden dengan eksponensial  $e^a$  pada persamaan diferensi dan integral  $\int_0^t e^{a(t-s)}g(s) ds$  koresponden dengan penjumlahan  $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}g(k)$ . Dengan demikian, solusi pada persamaan diferensi dapat diselesaikan dengan koresponden tersebut [12]. Agar mempermudah dalam memahami penjelasan di atas, maka diberikan contoh untuk mempraktikkan rumus tersebut.

**Tabel 2.1 Penjumlahan Pasti**

Jumlah	Penjumlahan	Penjumlahan Pasti
1	$\sum_{k=1}^n k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
2	$\sum_{k=1}^n k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3	$\sum_{k=1}^n k^3$	$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
4	$\sum_{k=1}^n k^4$	$\frac{n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{30}$
5	$\sum_{k=0}^{n-1} a^k$	$\begin{cases} \frac{a^n - 1}{a - 1} & \text{jika } a \neq 1 \\ n & \text{jika } a = 1 \end{cases}$
6	$\sum_{k=1}^{n-1} a^k$	$\begin{cases} \frac{a^n - a}{a - 1} & \text{jika } a \neq 1 \\ n - 1 & \text{jika } a = 1 \end{cases}$
7	$\sum_{k=1}^n ka^k, a \neq 1$	$\frac{(a-1)(n+1)a^{n+1} - a^{n+2} + a}{(a-1)^2}$

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:  
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**Contoh 2.1** Selesaikanlah persamaan berikut ini.

$$y(n + 1) = \frac{1}{2}y(n) + 2, \quad y(0) = c$$

**Penyelesaian**

Dengan menggunakan rumus pada Persamaan (2.7) diperoleh

$$\begin{aligned} y(n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n c + \sum_{r=0}^{n-1} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n c + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \sum_{r=0}^{n-1} 2^r \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n c + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n [c + 4(2^n - 1)] \end{aligned}$$

**Contoh 2.2** Carilah solusi dari persamaan berikut.

$$x(n + 1) = 2x(n) + 3^n, \quad x(1) = 0.5.$$

**Penyelesaian**

Berdasarkan pada Persamaan (2.9), diperoleh

$$\begin{aligned} x(n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{n-k-1} 3^k \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \frac{3}{2} \left( \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \right) \\ &= 3^n - 5 \cdot 2^{n-2}. \end{aligned}$$

## 2.5 Linearisasi Sistem Persamaan Non Linear

Definisi stabil dan tidak stabil terlalu sulit digunakan untuk menentukan kestabilan suatu sistem yang non linear. Suatu sistem non linear memiliki cara yang berbeda dalam menentukan solusi masalahnya. Tidak semudah menentukan solusi masalah suatu sistem linear, dalam penyelesaian suatu sistem non linear



dibutuhkan suatu proses hampiran persamaan diferensial non linear dengan persamaan diferensial linear yang dikenal dengan proses linearisasi guna menganalisis serta menggambarkan perilaku sistem disekitar titik ekuilibriumnya.

Metode linearisasi merupakan metode tertua dalam teori stabilitas. Para ahli dan insinyur sering menggunakan metode ini dalam dalam menganalisis suatu sistem kontrol. Ahli matematika Lyapunov dan Perron memulai metode linearisasi masing-masing dengan pendekatan uniknya tersendiri, dalam menyelesaikan teori stabilitas untuk persamaan diferensial. Pada bagian ini akan di adaptasi pendekatan dari Perronu untuk menentukan linearisasi pada sistem persamaan diferensi non linear

$$y(n + 1) = A(n)y(n) + g(n, y(n)) \quad (2.12)$$

dengan menggunakan komponen linear nya

$$z(n + 1) = A(n)z(n) \quad (2.13)$$

dimana  $A(n)$  merupakan matriks  $k \times k$  untuk setiap  $n \in \mathbb{Z}^+$  dan  $g: \mathbb{Z}^+ \times G \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $G \subset \mathbb{R}^k$  merupakan suatu fungsi kontinu. Seseorang mungkin melihat sistem pada Persamaan (2.12) sebagai gangguan dari sistem pada Persamaan (2.13). Fungsi  $g(n, y(n))$  pada Persamaan (2.12) melambangkan adanya gangguan karena ketidakakuratan dalam pengukuran atau gangguan terhadap lain terhadap sistem. Sistem pada persamaan (2.12) dibangun dari linearisasi persamaan non linear,

$$x(n + 1) = f(n, x(n)) \quad (2.14)$$

dimana  $f: \mathbb{Z}^+ \times G \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $G \subset \mathbb{R}^k$ , secara terus-menerus terdeferensiasi pada suatu titik ekuilibrium  $y^*$  ( yaitu,  $\frac{\partial f}{\partial y_i} \Big|_{y^*}$  ada dan bersifat kontinu disekitar  $y^*$  untuk  $1 \leq i \leq k$ ). Selanjutnya akan dijelaskan mengenai metode linearisasi yang diterapkan pada Sistem (2.14). Tuliskan  $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)^T$ , maka

$$\frac{\partial f(n, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial f(n, 0)}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(n, 0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(n, 0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1(n, 0)}{\partial y_k} \\ \frac{\partial f_2(n, 0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(n, 0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2(n, 0)}{\partial y_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k(n, 0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_k(n, 0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_k(n, 0)}{\partial y_k} \end{pmatrix}$$

Untuk menyederhanakan dalam penulisan,  $\frac{\partial f(n, x^*)}{\partial y}$  dapat dilambangkan dengan  $Df(n, x^*)$ . Dimana  $Df(n, x^*)$  merupakan matriks Jacobian dari fungsi  $f: \mathbb{Z}^+ \times G \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $G \subset \mathbb{R}^k$  [12]. Matrik Jacobian dapat juga dinotasikan dengan  $Jf(x_0)$ . Untuk memudahkan dalam memahami mengenai Matriks Jacobian diberikan contoh sebagai berikut,

### Contoh 2.3

Misalkan  $S(n)$  dan  $I(n)$  jumlah individu rentan dan terinfeksi, masing-masing dari suatu populasi pada waktu  $n$ . Misalkan  $d > 0$  merupakan rata-rata kematian dari populasi dan  $\alpha \geq 0$  merupakan darata-rata kematian karena infeksi penyakit. Dimana  $\beta SI$  menunjukkan laju penyebaran penyakit dengan  $\beta > 0$  dan  $\gamma \geq 0$  merupakan rata-rata individu yang sembuh dari penyakit, diperoleh suatu model penyebaran penyakit sebagai berikut

$$\begin{aligned} S(n+1) &= \frac{S(n) + A + \gamma I(n)}{1 + \beta I(n) + dh}, \\ I(n+1) &= \frac{I(n) + \beta S(n)I(N)}{1 + (d + \gamma + \alpha)}, \\ S(0), I(0) &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Diasumsikan bahwa

$$\omega = \beta A - d(d + \gamma + \alpha) > 0 \tag{2.16}$$

Berdasarkan pada Asumsi (2.16), Persamaan (2.15) memiliki dua titik ekuilibrium

$$X_1^* = \left( \frac{A}{d}, 0 \right) \text{ dan } X_2^* = \left( \frac{d+\gamma+\alpha}{\beta}, \frac{\beta A - d(d+\gamma+\alpha)}{(d+\alpha)\beta} \right).$$

Linearisasi dari (2.15) untuk titik ekuilibrium  $X_2^* = (S^*, I^*)$  menghasilkan matriks Jacobian

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \beta I^* + d} & \frac{\gamma + d\gamma - S^*\beta - A\beta}{(1 + \beta I^* + d)^2} \\ \beta I^* & 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan diberikan hasil linearisasi dari (2.15) untuk titik ekuilibrium

$X_1^* = \left(\frac{A}{d}, 0\right)$  menghasilkan matriks Jacobian

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+d} & \frac{\gamma + d\gamma - \frac{A}{d}\beta - A\beta}{(1+d)^2} \\ 0 & \frac{1 + \beta\frac{A}{d}}{1+d+\gamma+\alpha} \end{pmatrix}$$

## 2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Penentuan nilai eigen dan vektor eigen sangat diperlukan untuk mencari solusi dari suatu sistem dinamik linear. Nilai eigen dan vektor eigen juga diperlukan dalam menentukan sifat kestabilan dari suatu sistem dinamik.

**Definisi 2.1 Definisi Nilai Eigen dan Vektor Eigen** [5] Misal  $A$  adalah matriks  $n \times n$ , maka vektor  $\mathbf{x} \in C^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  disebut sebagai vektor eigen dari  $A$  jika  $A\mathbf{x}$  adalah kelipatan skalar dari  $\mathbf{x}$  yaitu,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (2.17)$$

untuk suatu skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  disebut sebagai nilai eigen dari  $A$  dan  $\mathbf{x}$  dikatakan sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda$ .

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks  $A_{n \times n}$ , dapat dituliskan kembali sebagai

$$A\mathbf{x} = I\lambda\mathbf{x} \quad (2.18)$$

atau secara ekuivalen

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0 \quad (2.19)$$

dengan  $I$  adalah matriks identitas.

Agar  $\lambda$  dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu penyelesaian tak nol dari persamaan ini. Persamaan tersebut memiliki penyelesaian tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Matriks  $A$  dengan  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$  dapat ditulis dalam bentuk

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} - \lambda_n \end{vmatrix} = 0$$

Persamaan ini disebut sebagai persamaan karakteristik matriks  $A$ , skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen dari  $A$ . Apabila diperluas lagi,  $\det(A - \lambda I) = 0$  adalah sebuah polinomial dalam variable  $\lambda$  berderajat  $n$  yang disebut sebagai polinomial karakteristik matriks [6].

## 2.7 Bentuk Kuadrat

Diberikan suatu bentuk kuadrat yang terdiri atas  $n$  variabel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dengan  $i \leq j, j \leq n$  dan  $c_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  yaitu:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \tag{2.20}$$

dengan matriks  $A$  merupakan matriks simetri yang memiliki entri  $c_{ij} = c_{ji}$  untuk semua  $i$  dan  $j$  kemudian untuk  $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ , maka Persamaan (2.20) dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} &= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_n + c_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_i x_j \end{aligned}$$

Untuk memudahkan dalam memahami bentuk kuadrat di atas, maka diberikan contoh sebagai berikut:

### Contoh 2.4:

Jabarkanlah notasi sigma yang diberikan kedalam bentuk kuadrat:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 c_{ij}x_i x_j$$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 c_{ij}x_i x_j &= \sum_{i=1}^2 \{c_{i1}x_i x_1 + c_{i2}x_i x_2\} \\ &= c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2 \\ &= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2^2 \\ &= (x_1c_{11} + x_2c_{21})x_1 + (x_1c_{12} + x_2c_{22})x_2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1c_{11} + x_2c_{21} & x_1c_{12} + x_2c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Setelah memahami mengenai penjabaran notasi sigma untuk suatu bentuk kuadrat, selanjutnya akan dijelaskan mengenai sifat definit dari persamaan kuadrat pada Persamaan (2.26) dengan menghitung nilai eigen dari matriks  $A$ . Hal ini dijelaskan oleh [4] yaitu jika matriks  $A$  merupakan matriks simetri yang berukuran  $n \times n$  dan terdapat  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  yang merupakan nilai eigen dari matriks  $A$ , maka bentuk kuadrat  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  memenuhi:

1. Matriks  $A$  dikatakan definit positif apabila semua  $\lambda_i > 0$
2. Matriks  $A$  dikatakan semi definit positif apabila semua  $\lambda_i \geq 0, \exists \lambda_i = 0$
3. Matriks  $A$  dikatakan definit negatif apabila semua  $\lambda_i < 0$
4. Matriks  $A$  dikatakan semi definit negatif apabila semua  $\lambda_i \leq 0, \exists \lambda_i = 0$ .

Jika pada kondisi matriks  $A$  tidak memenuhi salah satu dari keempat syarat di atas, maka bentuk kuadrat  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  dapat dikatakan *undefinite*. Untuk memahami penjelasan di atas diberikan beberapa contoh sebagai berikut:

**Contoh 2.5**

Ubahlah bentuk sigma berikut kedalam bentuk kuadrat dan kemudian tentukanlah sifat definit dari matriks  $A$ .

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 -5x_i x_j$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang  
 1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:  
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.  
 2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

**Penyelesaian :**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 -5x_i x_j &= -5x_1 x_1 - 5x_1 x_2 - 5x_2 x_1 - 5x_2 x_2 \\ &= -5x_1^2 - 5x_1 x_2 - 5x_2 x_1 - 5x_2^2 \\ &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sifat definit dari soal diatas dapat diperoleh dengan mencari nilai eigen dari matriks  $A$  dengan,  $A = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= 0 \\ \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \det \left( \begin{bmatrix} \lambda + 5 & 5 \\ 5 & \lambda + 5 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ (\lambda + 5)(\lambda + 5) - (5^2) &= 0 \\ \lambda^2 + 10\lambda + 25 - 25 &= 0 \\ \lambda^2 + 10\lambda &= 0 \\ \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -10 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil di atas diperoleh  $\lambda_1 = 0$  dan  $\lambda_2 = -10$ , karena terdapat nilai  $\lambda < 0$  dan  $\lambda = 0$  dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadrat diatas bersifat semi definit negatif.

**Contoh 2.6**

Diberikan suatu matriks  $A = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ , tentukan lah sifat definit dari matriks  $A$ .

**Penyelesaian :**

Dalam menentukan sifat definit terhadap matriks  $A$ , terlebih dahulu akan dicari nilai eigen untuk matriks tersebut sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= 0 \\ \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \right) &= 0 \end{aligned}$$



Selain itu juga terdapat suatu keadaan unik didalam persamaan diferensi yang tidak mungkin terjadi pada persamaan diferensial. Dimana pada persamaan diferensi suatu solusi mungkin saja bukan merupakan titik ekuilibrium tetapi dapat mencapai keadaan setimbang setelah beberapa kali iterasi.

## 2.9 Kestabilan Sistem Diskrit

Tujuan dalam mempelajari sistem dinamik adalah untuk mempelajari dan menganalisis sifat kestabilan dari solusi yang telah diperoleh disekitar titik ekuilibrium. Dimana hal ini merupakan suatu kajian mengenai teori stabilitas. Sebelum masuk kedalam Untuk memahami hal tersebut, selanjutnya akan diperkenalkan suatu definisi mengenai stabilitas itu sendiri.

### Definisi 2.11 Stabilitas Titik Ekuilibrium [12]

- (a) Titik ekuilibrium  $x^*$  dari Persamaan (2.2) dikatakan stabil jika terdapat dikatakan stabil jika diberikan untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian hingga untuk  $|x_0 - x^*| < \delta$  maka berlaku  $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$  untuk setiap  $n > 0$ . Apabila hal ini tidak terpenuhi maka  $x^*$  dikatakan tidak stabil.
- (b) Titik  $x^*$  disebut sebagai titik ekuilibrium penarik jika terdapat  $\eta > 0$  sedemikian hingga untuk  $|x(0) - x^*| < \eta$  maka berlaku  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$ . Jika  $\eta = \infty$ , maka  $x^*$  disebut sebagai titik ekuilibrium penarik global.
- (c) Titik  $x^*$  dikatakan stabil asimtotik jika titik ekuilibrium tersebut stabil dan juga merupakan titik ekuilibrium penarik.

Kemudian diberikan tereorema untuk kasus kestabilan waktu diskrit sebagai berikut.

**Teorema 2.2 Kestabilan Sistem pada Waktu Diskrit [9]** Diberikan sistem persamaan waktu diskrit

$$x(k + 1) = Ax(k), \quad (2.21)$$

dengan  $x(k)$  merupakan vektor *state* dan  $A$  adalah matris non singular berukuran  $n \times n$ , maka untuk titik ekuilibrium  $\bar{x}(k) = 0$  dikatakan stabil asimtotik jika



terdapat matriks  $S(k)$  simetri dan positif definit yang memenuhi:

$$A^T S(k) A - S(k) = -Q \quad (2.22)$$

dimana  $Q$  merupakan matriks simetri yang bersifat definit positif. Selanjutnya untuk memudahkan dalam memahami teorema di atas diberikan contoh sebagai berikut.

### Contoh 2.7

Tentukanlah kestabilan dari persamaan sistem waktu diskrit berikut:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

### Penyelesaian:

Agar memudahkan dalam menentukan kestabilan dari sistem waktu diskrit diatas, misalkan  $Q$  merupakan matriks identitas sehingga,

$$A^T S(k) A - S(k) = -Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2s_{12} & -2s_{12} \\ s_{11} + 2s_{12} & s_{12} + 2s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4s_{22} & -2s_{12} - 4s_{22} \\ -2s_{12} - 4s_{22} & s_{11} + 4s_{12} + 4s_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4s_{22} - s_{11} & -3s_{12} - 4s_{22} \\ -3s_{12} - 4s_{22} & s_{11} + 4s_{12} + 4s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dari matriks di atas diperoleh 3 persamaan sebagai berikut:

$$4s_{22} - s_{11} = -1$$

$$-3s_{12} - 4s_{22} = 0$$

$$s_{11} + 4s_{12} + 3s_{22} = -1$$

dengan menggunakan metode substitusi, didapatkan nilai  $s_{11} = 5$ ,  $s_{12} = 2$  dan  $s_{22} = -\frac{3}{2}$  yang kemudian dapat dibentuk kedalam bentuk matriks  $S$  sebagai berikut:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$S = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Kemudian akan dibuktikan bahwa matriks  $S$  merupakan matriks definit positif,

$$\det(\lambda I - S) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda + \frac{3}{2} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left( (\lambda - 5) \left( \lambda + \frac{3}{2} \right) \right) - ((-2)(-2)) = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda - \frac{23}{2} = 0$$

$$2\lambda^2 - 7\lambda - 23 = 0$$

$$(\lambda - 2.64)(\lambda - 0.86) = 0$$

$$\lambda_1 = 2.64, \quad \lambda_2 = 0.86$$

Berdasarkan hasil pencarian di atas diperoleh  $\lambda_1 = 2.64$  dan  $\lambda_2 = 0.86$ , karena nilai  $\lambda_{1,2} > 0$  maka dapat disimpulkan bahwa matriks tersebut bersifat definit positif dan stabil asimtotik.

**Teorema 2.3 Stabilitas Nilai Eigen Imaginer [8]**

Titik tetap dari  $x(n+1) = Ax(n) + B$  dengan  $A$  mempunyai  $k/2$  pasang  $\{\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_{k/2}, \bar{\mu}_{k/2}\}$  nilai eigen imaginer yang berbeda, dimana  $\mu_j \equiv \alpha_j + i\beta_j$  dan  $\bar{\mu}_j \equiv \alpha_j - i\beta_j$  stabil asimtotik jika dan hanya jika

$$r_j \equiv (\alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\frac{1}{2}} < 1, \forall j = 1, 2, \dots, k/2.$$

## BAB III METODOLOGI PENELITIAN

### 3.1 Jenis Penelitian

Pada penelitian ini penulis menggunakan pendekatan kuantitatif sebagai metode penelitian. Pendekatan kuantitatif itu sendiri merupakan suatu metode penelitian ilmiah yang menekankan analisisnya pada data-data *numerical* (angka), mulai dari pengumpulan data, penafsiran terhadap data, serta menampilkan hasil dari data tersebut. Selain itu studi literatur dalam mengkaji serta mempelajari buku-buku serta berbagai jurnal mengenai model epidemi SIR juga dilakukan dalam memecahkan masalah yang telah terlebih dahulu telah dibentuk kedalam suatu model matematika. Dimana model matematika tersebut dibentuk berdasarkan pada hubungan antara variabel dan asumsi-asumsi yang telah diperoleh. Kemudian, interpretasi dari hasil penelitian yang didapatkan dari analisis kajian teori ini akan ditampilkan dalam suatu bentuk simulasi.

### 3.2 Jenis dan Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang diperoleh dari jurnal yang ditulis oleh [1] mengenai perilaku dari model epidemik SIR diskrit yang berjudul *Behavior of a Discrete SIR Epidemic Model*. Adapun parameter serta variabel yang digunakan dalam model pada jurnal tersebut adalah sebagai berikut:

**Tabel 3.1 Parameter yang digunakan**

No.	Parameter dan variabel	Keterangan
1.	$b$	Tingkat kelahiran
2.	$\mu$	Tingkat kematian
3.	$\gamma$	Tingkat pemulihan
4.	$\beta$	Rata-rata kontak yang terinfeksi per hari
5.	$\alpha$	Tingkat kematian infeksi karena penyakit.

### 3.3 Teknik Analisis Data

Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan penulis dalam menganalisis penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi parameter dan variabel yang digunakan dalam model.
2. Menentukan titik ekuilibrium dari model yang telah diberikan pada Persamaan (2.2) yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Dimana titik ekuilibrium bebas penyakit memberikan asumsi bahwa tidak ada individu lagi yang terserang penyakit. Sedangkan titik ekuilibrium endemik memberikan asumsi terdapat individu yang terinfeksi penyakit. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dibahas mengenai titik ekuilibrium endemik penyakit.
3. Melakukan linearisasi pada model epidemi SIR diskrit yang diberikan pada Persamaan (2.2).
4. Menganalisa kestabilan dari titik ekuilibrium penyakit berdasarkan pada nilai eigen ( $\lambda$ ) yang dihasilkan oleh Jacobian dari hasil linearisasi model epidemi SIR diskrit pada Persamaan (2.2).
5. Melakukan simulasi numerik dengan menggunakan *software Maple* dan *Microsoft Excel*.
6. Membuat kesimpulan terhadap hasil yang diperoleh dari model.

1. Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
2. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dan analisis pada Bab IV yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika yang digunakan dalam Analisis Dinamik Kestabilan Model SIR Pada Waktu Diskrit pada Tugas Akhir ini terdiri dari tiga persamaan yaitu:

$$S(n + 1) = b - \beta S(n)I(n) + (1 - \mu)S(n)$$

$$I(n + 1) = \beta S(n)I(n) + [1 - (\gamma + \mu + \alpha)]I(n)$$

$$R(n + 1) = \gamma I(n) + (1 - \mu)R(n)$$

2. Model SIR pada waktu diskrit memiliki dua jenis titik ekuilibrium yaitu, titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Untuk titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh  $E_0 = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0\right)$  sedangkan untuk titik

ekuilibrium endemik penyakit diperoleh  $E_1 = (S^*(n), I^*(n), R^*(n))$  dengan  $S^*(n) = \frac{A}{\beta}$ ,  $I^*(n) = \left(\frac{b}{A} - \frac{\mu}{\beta}\right)$ ,  $R^*(n) = \gamma \left(\frac{b}{A\mu} - \frac{1}{\beta}\right)$ .

3. Ketabilan dari titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0$  adalah stabil asimtotik jika  $\frac{\beta b}{\mu(A-1)} > 1$  dan  $\mu < 1$ . Untuk kestabilan titik ekuilibrium endemik  $E_1$

akan bersifat stabil asimtotik jika  $\mu < 1$  dan  $\frac{\beta b}{2A} \pm \frac{\sqrt{4A^3\mu - 4\beta bA^2 + \beta b^2}}{2A} < 1$ .

4. Terdapat dua hasil analisis menggunakan grafik yang diperoleh dari Microsoft Excel dengan nilai awal parameter dan nilai awal populasi yang berbeda, dengan hasil titik ekuilibrium bebas penyakit bersifat stabil asimtotik sehingga penyakit akan menghilang dari populasi dan simulasi untuk titik ekuilibrium endemik juga bersifat stabil asimtotik sehingga subpopulasi terinfeksi masih memungkinkan untuk menularkan penyakit kepada subpopulasi rentan sehingga penyakit masih menetap didalam populasi.

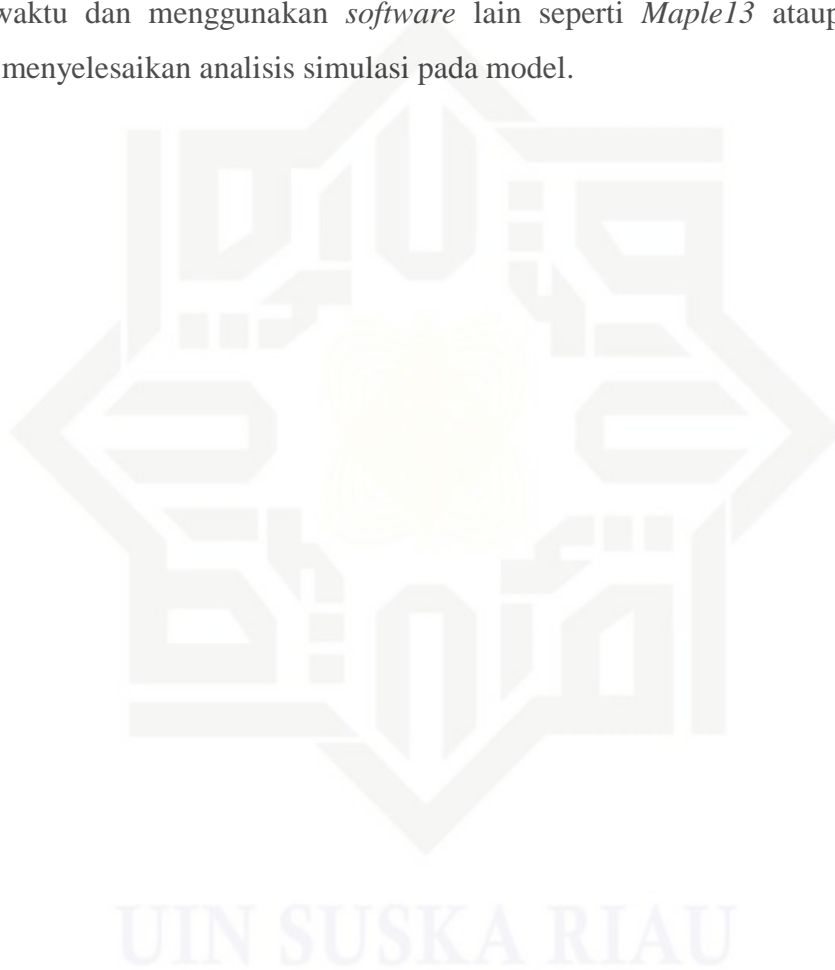
## 5.2

### Saran

Tugas akhir ini hanya membahas mengenai model SIR pada waktu diskrit tanpa penambahan faktor kontrol dan hanya melakukan simulasi menggunakan *Microsoft Excel*, maka untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk menambahkan beberapa faktor kontrol lainnya seperti dengan penambahan perlambatan waktu dan menggunakan *software* lain seperti *Maple13* ataupun *Matlab* dalam menyelesaikan analisis simulasi pada model.

#### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



## DAFTAR PUSTAKA

- [1] A. G. R. Selvam, R. Janagaraj, dan D. J. Praveen, *Behavior of a Discrete SIR Epidemic Model. American International Journal of Research in Science, Technology, Engineering & Mathematics*, halaman 284-287, 2015
- [2] A. K. Supriatna, B. N. Ruchjana, F. Sukono, dan A. Sholahudin, *Pembuatan Model Matematika dan Software untuk Penghitungan Tingkat Vaksinasi pada Penyebaran Penyakit Menular*, UNPAD, Bandung, 2005.
- [3] D. Luknanto, *Model Matematika*, UGM Yogyakarta, 2003.
- [4] F. L. Lewis, *“Optimal Control”*, Toronto : Jhon Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [5] H. Anton, *Aljabar Linear Elementer* Terjemahan oleh Pantur Silaban & I. Nyoman Susila, Jakarta: Erlangga, 1995.
- [6] H. Anton, *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*, Ed. 8, Erlangga: Jakarta, 2004.
- [7] H. Tamrin, M. Z. Riyanto, dan A.A Akhid, *Model SIR Penyakit Tidak Fatal*, Yogyakarta: Jurusan Matematika FMIPA UGM, 2007.
- [8] I. Riana. C, K. Madu. B, dan Solehan, Sistem Dinamik Diskret, [Online] Available <http://wmuharini.lecture.ub.ac.id/files/2015/02/SistemDinamikDiskret.pdf>, diakses 22 Januari 2021.
- [9] K. Ogatta, *“Discrete-Time Control System”*, New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1995.
- [10] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical System*, Ed.3, New York: Springer, 2001.
- [11] Q. Cui, *Global Stability of a Discrete SIR Epidemic Model with Vaccination and treatment*, *Journal of Difference Equation and Applications*, Vol. 21 (2), halaman 111-117, 2015.
- [12] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equation*, Ed. 3, New York: Springer Science, 2005.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
    - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
    - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
  2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

- [13] T. Fayeldi, *Dynamical Behaviors of a Discrete SIR Epidemic Model with Nonmonotone Incidence Rate*. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, Vol. 47 (17), halaman 416-423, 2013.
- [14] T. Johnson, *Mathematical Modeling of Diseases : SIR Model*, University of Minnesota, Morris, 2009.
- [15] U. Pagalay, *Mathematical Modelling*. Malang: UIN Press, 2009.
- [16] Widowati dan Sutimin, *Pemodelan Matematika*, Semarang: Fakultas MIPA Universitas Diponegoro, 2007.
- [17] W. O. Kermack, dan A. G. McKendrik, *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*. *Mathematical and Physical Character*, Vol. 115 (772), halaman 700-721, 1927.



## Lampiran A

### Solusi Simulasi Kasus untuk Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Iterasi	S(n)	I(n)	R(n)	S(n+1)	I(n+1)	R(n+1)
0	2.540000	0.525000	0.000000	1.308240	0.610260	0.404250
1	1.308240	0.610260	0.404250	0.684095	0.288418	0.773088
2	0.684095	0.288418	0.773088	0.552580	0.035502	0.801897
3	0.552580	0.035502	0.801897	0.553449	0.001755	0.628760
4	0.553449	0.001755	0.628760	0.564543	0.000088	0.472921
5	0.564543	0.000088	0.472921	0.573379	0.000005	0.354759
6	0.573379	0.000005	0.354759	0.580033	0.000000	0.266073
7	0.580033	0.000000	0.266073	0.585025	0.000000	0.199555
8	0.585025	0.000000	0.199555	0.588768	0.000000	0.149666
9	0.588768	0.000000	0.149666	0.591576	0.000000	0.112250
10	0.591576	0.000000	0.112250	0.593682	0.000000	0.084187
11	0.593682	0.000000	0.084187	0.595262	0.000000	0.063140
12	0.595262	0.000000	0.063140	0.596446	0.000000	0.047355
13	0.596446	0.000000	0.047355	0.597335	0.000000	0.035516
14	0.597335	0.000000	0.035516	0.598001	0.000000	0.026637
15	0.598001	0.000000	0.026637	0.598501	0.000000	0.019978
16	0.598501	0.000000	0.019978	0.598876	0.000000	0.014984
17	0.598876	0.000000	0.014984	0.599157	0.000000	0.011238
18	0.599157	0.000000	0.011238	0.599368	0.000000	0.008428
19	0.599368	0.000000	0.008428	0.599526	0.000000	0.006321
20	0.599526	0.000000	0.006321	0.599644	0.000000	0.004741
21	0.599644	0.000000	0.004741	0.599733	0.000000	0.003556
22	0.599733	0.000000	0.003556	0.599800	0.000000	0.002667
23	0.599800	0.000000	0.002667	0.599850	0.000000	0.002000
24	0.599850	0.000000	0.002000	0.599887	0.000000	0.001500
25	0.599887	0.000000	0.001500	0.599916	0.000000	0.001125
26	0.599916	0.000000	0.001125	0.599937	0.000000	0.000844
27	0.599937	0.000000	0.000844	0.599953	0.000000	0.000633
28	0.599953	0.000000	0.000633	0.599964	0.000000	0.000475
29	0.599964	0.000000	0.000475	0.599973	0.000000	0.000356
30	0.599973	0.000000	0.000356	0.599980	0.000000	0.000267
31	0.599980	0.000000	0.000267	0.599985	0.000000	0.000200

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

32	0.599985	0.000000	0.000200	0.599989	0.000000	0.000150
33	0.599989	0.000000	0.000150	0.599992	0.000000	0.000113
34	0.599992	0.000000	0.000113	0.599994	0.000000	0.000084
35	0.599994	0.000000	0.000084	0.599995	0.000000	0.000063
36	0.599995	0.000000	0.000063	0.599996	0.000000	0.000048
37	0.599996	0.000000	0.000048	0.599997	0.000000	0.000036
38	0.599997	0.000000	0.000036	0.599998	0.000000	0.000027
39	0.599998	0.000000	0.000027	0.599998	0.000000	0.000020
40	0.599998	0.000000	0.000020	0.599999	0.000000	0.000015
41	0.599999	0.000000	0.000015	0.599999	0.000000	0.000011
42	0.599999	0.000000	0.000011	0.599999	0.000000	0.000008
43	0.599999	0.000000	0.000008	0.600000	0.000000	0.000006
44	0.600000	0.000000	0.000006	0.600000	0.000000	0.000005
45	0.600000	0.000000	0.000005	0.600000	0.000000	0.000004
46	0.600000	0.000000	0.000004	0.600000	0.000000	0.000003
47	0.600000	0.000000	0.000003	0.600000	0.000000	0.000002
48	0.600000	0.000000	0.000002	0.600000	0.000000	0.000002
49	0.600000	0.000000	0.000002	0.600000	0.000000	0.000001
50	0.600000	0.000000	0.000001	0.600000	0.000000	0.000001
51	0.600000	0.000000	0.000001	0.600000	0.000000	0.000001
52	0.600000	0.000000	0.000001	0.600000	0.000000	0.000000
53	0.600000	0.000000	0.000000	0.600000	0.000000	0.000000
54	0.600000	0.000000	0.000000	0.600000	0.000000	0.000000
55	0.600000	0.000000	0.000000	0.600000	0.000000	0.000000

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## Lampiran B

### Solusi Simulasi Kasus untuk Titik Ekuilibrium Endemik

Iterasi	S(n)	I(n)	R(n)	S(n+1)	I(n+1)	R(n+1)
0	0.50000	0.60000	0.40000	0.37300	0.45102	0.47598
1	0.37300	0.45102	0.47598	0.48139	0.24223	0.51556
2	0.48139	0.24223	0.51556	0.66619	0.17447	0.51083
3	0.66619	0.17447	0.51083	0.83314	0.18015	0.49347
4	0.83314	0.18015	0.49347	0.92618	0.23684	0.47895
5	0.92618	0.23684	0.47895	0.89285	0.34862	0.47683
6	0.89285	0.34862	0.47683	0.70753	0.49351	0.49654
7	0.70753	0.49351	0.49654	0.47668	0.54406	0.54228
8	0.47668	0.54406	0.54228	0.42072	0.38752	0.59322
9	0.42072	0.38752	0.59322	0.53311	0.23938	0.60880
10	0.53311	0.23938	0.60880	0.69413	0.19334	0.59420
11	0.69413	0.19334	0.59420	0.82791	0.20876	0.57215
12	0.82791	0.20876	0.57215	0.88302	0.27262	0.55529
13	0.88302	0.27262	0.55529	0.81789	0.38140	0.55246
14	0.81789	0.38140	0.55246	0.63892	0.49159	0.57094
15	0.63892	0.49159	0.57094	0.47422	0.48495	0.60887
16	0.47422	0.48495	0.60887	0.46815	0.34340	0.64172
17	0.46815	0.34340	0.64172	0.57964	0.23965	0.64393
18	0.57964	0.23965	0.64393	0.71692	0.21240	0.62586
19	0.71692	0.21240	0.62586	0.81788	0.23753	0.60433
20	0.81788	0.23753	0.60433	0.83778	0.30615	0.58981
21	0.83778	0.30615	0.58981	0.75054	0.40490	0.59001
22	0.75054	0.40490	0.59001	0.59190	0.47580	0.60928
23	0.59190	0.47580	0.60928	0.48676	0.43156	0.64032
24	0.48676	0.43156	0.64032	0.51307	0.31475	0.65971
25	0.51307	0.31475	0.65971	0.61885	0.24355	0.65458
26	0.61885	0.24355	0.65458	0.73225	0.23199	0.63620
27	0.73225	0.23199	0.63620	0.80193	0.26545	0.61742
28	0.80193	0.26545	0.61742	0.79199	0.33498	0.60699
29	0.79199	0.33498	0.60699	0.69443	0.41711	0.61105
30	0.69443	0.41711	0.61105	0.56547	0.45060	0.63057
31	0.56547	0.45060	0.63057	0.50831	0.38857	0.65461
32	0.50831	0.38857	0.65461	0.55368	0.29755	0.66426
33	0.55368	0.29755	0.66426	0.64989	0.25066	0.65535
34	0.64989	0.25066	0.65535	0.73960	0.25192	0.63827
35	0.73960	0.25192	0.63827	0.78076	0.29137	0.62314
36	0.78076	0.29137	0.62314	0.74822	0.35728	0.61715

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang  
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

37	0.74822	0.35728	0.61715	0.65162	0.41844	0.62449
38	0.65162	0.41844	0.62449	0.55566	0.42177	0.64293
39	0.55566	0.42177	0.64293	0.53403	0.35671	0.66016
40	0.53403	0.35671	0.66016	0.58869	0.28865	0.66310
41	0.58869	0.28865	0.66310	0.67264	0.26025	0.65259
42	0.67264	0.26025	0.65259	0.73954	0.27156	0.63763
43	0.73954	0.27156	0.63763	0.75619	0.31406	0.62636
44	0.75619	0.31406	0.62636	0.70921	0.37206	0.62443
45	0.70921	0.37206	0.62443	0.62235	0.41122	0.63391
46	0.62235	0.41122	0.63391	0.55761	0.39415	0.65001
47	0.55761	0.39415	0.65001	0.56042	0.33465	0.66119
48	0.56042	0.33465	0.66119	0.61743	0.28573	0.65976
49	0.61743	0.28573	0.65976	0.68754	0.27149	0.64902
50	0.68754	0.27149	0.64902	0.73334	0.29012	0.63659
51	0.73334	0.29012	0.63659	0.73044	0.33249	0.62902
52	0.73044	0.33249	0.62902	0.67696	0.37942	0.63038
53	0.67696	0.37942	0.63038	0.60518	0.39868	0.64069
54	0.60518	0.39868	0.64069	0.56691	0.37056	0.65368
55	0.56691	0.37056	0.65368	0.58520	0.32045	0.65994
56	0.58520	0.32045	0.65994	0.63976	0.28702	0.65589
57	0.63976	0.28702	0.65589	0.69546	0.28355	0.64578
58	0.69546	0.28355	0.64578	0.72265	0.30680	0.63602
59	0.72265	0.30680	0.63602	0.70569	0.34607	0.63172
60	0.70569	0.34607	0.63172	0.65239	0.38044	0.63544
61	0.65239	0.38044	0.63544	0.59770	0.38396	0.64544
62	0.59770	0.38396	0.64544	0.58009	0.35202	0.65511
63	0.58009	0.35202	0.65511	0.60698	0.31226	0.65765
64	0.60698	0.31226	0.65765	0.65597	0.29118	0.65224
65	0.65597	0.29118	0.65224	0.69758	0.29563	0.64330
66	0.69758	0.29563	0.64330	0.70930	0.32094	0.63612
67	0.70930	0.32094	0.63612	0.68366	0.35477	0.63454
68	0.68366	0.35477	0.63454	0.63540	0.37679	0.63966
69	0.63540	0.37679	0.63966	0.59725	0.36946	0.64853
70	0.59725	0.36946	0.64853	0.59461	0.33844	0.65509
71	0.59461	0.33844	0.65509	0.62505	0.30852	0.65501
72	0.62505	0.30852	0.65501	0.66664	0.29712	0.64914
73	0.66664	0.29712	0.64914	0.69524	0.30702	0.64166
74	0.69524	0.30702	0.64166	0.69498	0.33209	0.63684
75	0.69498	0.33209	0.63684	0.66544	0.35906	0.63735
76	0.66544	0.35906	0.63735	0.62510	0.37029	0.64302
77	0.62510	0.37029	0.64302	0.60140	0.35664	0.65030

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

78	0.60140	0.35664	0.65030	0.60879	0.32920	0.65421
79	0.60879	0.32920	0.65421	0.63921	0.30798	0.65242
80	0.63921	0.30798	0.65242	0.67258	0.30397	0.64671
81	0.67258	0.30397	0.64671	0.68981	0.31715	0.64080
82	0.68981	0.31715	0.64080	0.68110	0.34014	0.63802
83	0.68110	0.34014	0.63802	0.65147	0.35979	0.63997
84	0.65147	0.35979	0.63997	0.62020	0.36255	0.64552
85	0.62020	0.36255	0.64552	0.60818	0.34618	0.65105
86	0.60818	0.34618	0.65105	0.62155	0.32351	0.65286
87	0.62155	0.32351	0.65286	0.64957	0.30964	0.65011
88	0.64957	0.30964	0.65011	0.67470	0.31103	0.64495
89	0.67470	0.31103	0.64495	0.68259	0.32563	0.64058
90	0.68259	0.32563	0.64058	0.66869	0.34525	0.63946
91	0.66869	0.34525	0.63946	0.64166	0.35795	0.64225
92	0.64166	0.35795	0.64225	0.61933	0.35477	0.64722
93	0.61933	0.35477	0.64722	0.61607	0.33822	0.65108
94	0.61607	0.33822	0.65108	0.63232	0.32059	0.65135
95	0.63232	0.32059	0.65135	0.65650	0.31268	0.64818
96	0.65650	0.31268	0.64818	0.67394	0.31774	0.64380
97	0.67394	0.31774	0.64380	0.67466	0.33225	0.64084
98	0.67466	0.33225	0.64084	0.65838	0.34782	0.64098
99	0.65838	0.34782	0.64098	0.63554	0.35455	0.64412
100	0.63554	0.35455	0.64412	0.62118	0.34773	0.64824
101	0.62118	0.34773	0.64824	0.62402	0.33260	0.65063
102	0.62402	0.33260	0.65063	0.64086	0.31972	0.64986
103	0.64086	0.31972	0.64986	0.66050	0.31645	0.64668
104	0.66050	0.31645	0.64668	0.67122	0.32371	0.64318
105	0.67122	0.32371	0.64318	0.66689	0.33700	0.64143
106	0.66689	0.33700	0.64143	0.65039	0.34837	0.64243
107	0.65039	0.34837	0.64243	0.63243	0.35041	0.64553
108	0.63243	0.35041	0.64553	0.62466	0.34183	0.64871
109	0.62466	0.34183	0.64871	0.63133	0.32897	0.64992
110	0.63133	0.32897	0.64992	0.64720	0.32031	0.64851
111	0.64720	0.32031	0.64851	0.66214	0.32045	0.64558
112	0.66214	0.32045	0.64558	0.66733	0.32869	0.64296
113	0.66733	0.32869	0.64296	0.65990	0.34003	0.64220
114	0.65990	0.34003	0.64220	0.64470	0.34749	0.64371
115	0.64470	0.34749	0.64371	0.63162	0.34618	0.64651
116	0.63162	0.34618	0.64651	0.62893	0.33723	0.64878
117	0.62893	0.33723	0.64878	0.63760	0.32698	0.64909
118	0.63760	0.32698	0.64909	0.65151	0.32182	0.64738

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

119	0.65151	0.32182	0.64738	0.66201	0.32432	0.64485
120	0.66201	0.32432	0.64485	0.66296	0.33259	0.64306
121	0.66296	0.33259	0.64306	0.65403	0.34160	0.64304
122	0.65403	0.34160	0.64304	0.64105	0.34571	0.64477
123	0.64105	0.34571	0.64477	0.63241	0.34228	0.64712
124	0.63241	0.34228	0.64712	0.63335	0.33388	0.64857
125	0.63335	0.33388	0.64857	0.64264	0.32623	0.64825
126	0.64264	0.32623	0.64825	0.65407	0.32387	0.64649
127	0.65407	0.32387	0.64649	0.66067	0.32778	0.64444
128	0.66067	0.32778	0.64444	0.65863	0.33539	0.64336
129	0.65863	0.33539	0.64336	0.64944	0.34203	0.64385
130	0.64944	0.34203	0.64385	0.63910	0.34349	0.64558
131	0.63910	0.34349	0.64558	0.63420	0.33895	0.64742
132	0.63420	0.33895	0.64742	0.63750	0.33166	0.64819
133	0.63750	0.33166	0.64819	0.64643	0.32637	0.64748
134	0.64643	0.32637	0.64748	0.65523	0.32610	0.64582
135	0.65523	0.32610	0.64582	0.65860	0.33068	0.64428
136	0.65860	0.33068	0.64428	0.65468	0.33721	0.64377
137	0.65468	0.33721	0.64377	0.64612	0.34163	0.64458
138	0.64612	0.34163	0.64458	0.63847	0.34117	0.64616
139	0.63847	0.34117	0.64616	0.63650	0.33629	0.64749
140	0.63650	0.33629	0.64749	0.64111	0.33037	0.64774
141	0.64111	0.33037	0.64774	0.64905	0.32712	0.64683
142	0.64905	0.32712	0.64683	0.65533	0.32830	0.64538
143	0.65533	0.32830	0.64538	0.65621	0.33296	0.64430
144	0.65621	0.33296	0.64430	0.65133	0.33819	0.64423
145	0.65133	0.33819	0.64423	0.64394	0.34071	0.64518
146	0.64394	0.34071	0.64518	0.63877	0.33899	0.64652
147	0.63877	0.33899	0.64652	0.63895	0.33432	0.64740
148	0.63895	0.33432	0.64740	0.64405	0.32981	0.64728
149	0.64405	0.32981	0.64728	0.65066	0.32821	0.64630
150	0.65066	0.32821	0.64630	0.65469	0.33028	0.64512
151	0.65469	0.33028	0.64512	0.65379	0.33462	0.64445
152	0.65379	0.33462	0.64445	0.64869	0.33850	0.64469
153	0.64869	0.33850	0.64469	0.64273	0.33951	0.64565
154	0.64273	0.33951	0.64565	0.63967	0.33710	0.64671
155	0.63967	0.33710	0.64671	0.64128	0.33297	0.64720
156	0.64128	0.33297	0.64720	0.64629	0.32980	0.64685
157	0.64629	0.32980	0.64685	0.65144	0.32945	0.64591
158	0.65144	0.32945	0.64591	0.65360	0.33196	0.64500
159	0.65360	0.33196	0.64500	0.65156	0.33571	0.64467

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

160	0.65156	0.33571	0.64467	0.64674	0.33834	0.64510
161	0.64674	0.33834	0.64510	0.64227	0.33824	0.64599
162	0.64227	0.33824	0.64599	0.64091	0.33557	0.64677
163	0.64091	0.33557	0.64677	0.64335	0.33216	0.64696
164	0.64335	0.33216	0.64696	0.64787	0.33015	0.64647
165	0.64787	0.33015	0.64647	0.65160	0.33068	0.64564
166	0.65160	0.33068	0.64564	0.65229	0.33329	0.64500
167	0.65229	0.33329	0.64500	0.64965	0.33632	0.64492
168	0.64965	0.33632	0.64492	0.64544	0.33787	0.64544
169	0.64544	0.33787	0.64544	0.64235	0.33702	0.64621
170	0.64235	0.33702	0.64621	0.64226	0.33442	0.64673
171	0.64226	0.33442	0.64673	0.64505	0.33178	0.64670
172	0.64505	0.33178	0.64670	0.64886	0.33073	0.64616
173	0.64886	0.33073	0.64616	0.65130	0.33181	0.64548
174	0.65130	0.33181	0.64548	0.65095	0.33427	0.64507
175	0.65095	0.33427	0.64507	0.64812	0.33654	0.64518
176	0.64812	0.33654	0.64518	0.64469	0.33722	0.64571
177	0.64469	0.33722	0.64571	0.64281	0.33595	0.64633
178	0.64281	0.33595	0.64633	0.64357	0.33361	0.64663
179	0.64357	0.33361	0.64663	0.64636	0.33172	0.64646
180	0.64636	0.33172	0.64646	0.64937	0.33141	0.64593
181	0.64937	0.33141	0.64593	0.65073	0.33278	0.64540
182	0.65073	0.33278	0.64540	0.64969	0.33492	0.64519
183	0.64969	0.33492	0.64519	0.64698	0.33649	0.64541
184	0.64698	0.33649	0.64541	0.64437	0.33652	0.64591
185	0.64437	0.33652	0.64591	0.64346	0.33507	0.64637
186	0.64346	0.33507	0.64637	0.64474	0.33311	0.64650
187	0.64474	0.33311	0.64650	0.64731	0.33188	0.64624
188	0.64731	0.33188	0.64624	0.64951	0.33210	0.64577
189	0.64951	0.33210	0.64577	0.65002	0.33355	0.64539
190	0.65002	0.33355	0.64539	0.64860	0.33530	0.64533
191	0.64860	0.33530	0.64533	0.64621	0.33625	0.64561
192	0.64621	0.33625	0.64561	0.64437	0.33584	0.64604
193	0.64437	0.33584	0.64604	0.64420	0.33440	0.64636
194	0.64420	0.33440	0.64636	0.64573	0.33286	0.64636
195	0.64573	0.33286	0.64636	0.64791	0.33219	0.64607
196	0.64791	0.33219	0.64607	0.64939	0.33274	0.64567
197	0.64939	0.33274	0.64567	0.64928	0.33413	0.64542
198	0.64928	0.33413	0.64542	0.64772	0.33546	0.64547
199	0.64772	0.33546	0.64547	0.64574	0.33591	0.64576
200	0.64574	0.33591	0.64576	0.64459	0.33524	0.64612

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

201	0.64459	0.33524	0.64612	0.64494	0.33392	0.64631
202	0.64494	0.33392	0.64631	0.64649	0.33280	0.64622
203	0.64649	0.33280	0.64622	0.64824	0.33255	0.64593
204	0.64824	0.33255	0.64593	0.64909	0.33330	0.64562
205	0.64909	0.33330	0.64562	0.64857	0.33452	0.64548
206	0.64857	0.33452	0.64548	0.64705	0.33545	0.64560
207	0.64705	0.33545	0.64560	0.64553	0.33552	0.64588
208	0.64553	0.33552	0.64588	0.64494	0.33473	0.64615
209	0.64494	0.33473	0.64615	0.64560	0.33361	0.64624
210	0.64560	0.33361	0.64624	0.64705	0.33287	0.64610
211	0.64705	0.33287	0.64610	0.64835	0.33294	0.64583
212	0.64835	0.33294	0.64583	0.64871	0.33374	0.64561
213	0.64871	0.33374	0.64561	0.64795	0.33475	0.64556
214	0.64795	0.33475	0.64556	0.64659	0.33533	0.64571
215	0.64659	0.33533	0.64571	0.64550	0.33514	0.64596
216	0.64550	0.33514	0.64596	0.64534	0.33434	0.64615
217	0.64534	0.33434	0.64615	0.64617	0.33345	0.64616
218	0.64617	0.33345	0.64616	0.64742	0.33302	0.64600
219	0.64742	0.33302	0.64600	0.64831	0.33330	0.64577
220	0.64831	0.33330	0.64577	0.64830	0.33408	0.64562
221	0.64830	0.33408	0.64562	0.64744	0.33486	0.64564
222	0.64744	0.33486	0.64564	0.64630	0.33515	0.64580
223	0.64630	0.33515	0.64580	0.64560	0.33480	0.64601
224	0.64560	0.33480	0.64601	0.64575	0.33405	0.64612
225	0.64575	0.33405	0.64612	0.64662	0.33339	0.64608
226	0.64662	0.33339	0.64608	0.64763	0.33322	0.64592
227	0.64763	0.33322	0.64592	0.64816	0.33362	0.64574
228	0.64816	0.33362	0.64574	0.64790	0.33431	0.64565
229	0.64790	0.33431	0.64565	0.64705	0.33487	0.64571
230	0.64705	0.33487	0.64571	0.64616	0.33494	0.64587
231	0.64616	0.33494	0.64587	0.64579	0.33451	0.64603
232	0.64579	0.33451	0.64603	0.64613	0.33387	0.64609
233	0.64613	0.33387	0.64609	0.64695	0.33342	0.64601
234	0.64695	0.33342	0.64601	0.64771	0.33343	0.64586
235	0.64771	0.33343	0.64586	0.64795	0.33388	0.64573
236	0.64795	0.33388	0.64573	0.64755	0.33446	0.64569
237	0.64755	0.33446	0.64569	0.64678	0.33481	0.64578
238	0.64678	0.33481	0.64578	0.64613	0.33473	0.64592
239	0.64613	0.33473	0.64592	0.64601	0.33428	0.64603
240	0.64601	0.33428	0.64603	0.64645	0.33376	0.64604
241	0.64645	0.33376	0.64604	0.64717	0.33350	0.64595

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



242	0.64717	0.33350	0.64595	0.64770	0.33364	0.64582
243	0.64770	0.33364	0.64582	0.64772	0.33407	0.64573
244	0.64772	0.33407	0.64573	0.64726	0.33453	0.64574
245	0.64726	0.33453	0.64574	0.64660	0.33472	0.64583
246	0.64660	0.33472	0.64583	0.64618	0.33453	0.64595
247	0.64618	0.33453	0.64595	0.64624	0.33411	0.64602
248	0.64624	0.33411	0.64602	0.64671	0.33373	0.64600
249	0.64671	0.33373	0.64600	0.64730	0.33361	0.64591
250	0.64730	0.33361	0.64591	0.64762	0.33382	0.64580
251	0.64762	0.33382	0.64580	0.64750	0.33421	0.64575
252	0.64750	0.33421	0.64575	0.64703	0.33454	0.64578
253	0.64703	0.33454	0.64578	0.64651	0.33460	0.64587
254	0.64651	0.33460	0.64587	0.64627	0.33437	0.64596
255	0.64627	0.33437	0.64596	0.64645	0.33400	0.64600
256	0.64645	0.33400	0.64600	0.64691	0.33373	0.64596
257	0.64691	0.33373	0.64596	0.64735	0.33373	0.64587
258	0.64735	0.33373	0.64587	0.64751	0.33397	0.64580
259	0.64751	0.33397	0.64580	0.64730	0.33430	0.64577
260	0.64730	0.33430	0.64577	0.64687	0.33452	0.64582
261	0.64687	0.33452	0.64582	0.64649	0.33448	0.64590
262	0.64649	0.33448	0.64590	0.64639	0.33424	0.64596
263	0.64639	0.33424	0.64596	0.64663	0.33394	0.64597
264	0.64663	0.33394	0.64597	0.64704	0.33377	0.64593
265	0.64704	0.33377	0.64593	0.64736	0.33384	0.64585
266	0.64736	0.33384	0.64585	0.64739	0.33408	0.64580
267	0.64739	0.33408	0.64580	0.64713	0.33435	0.64580
268	0.64713	0.33435	0.64580	0.64676	0.33447	0.64585
269	0.64676	0.33447	0.64585	0.64651	0.33437	0.64591
270	0.64651	0.33437	0.64591	0.64652	0.33414	0.64596
271	0.64652	0.33414	0.64596	0.64678	0.33391	0.64595
272	0.64678	0.33391	0.64595	0.64712	0.33383	0.64590
273	0.64712	0.33383	0.64590	0.64732	0.33394	0.64584
274	0.64732	0.33394	0.64584	0.64726	0.33417	0.64581
275	0.64726	0.33417	0.64581	0.64700	0.33436	0.64582
276	0.64700	0.33436	0.64582	0.64670	0.33440	0.64587
277	0.64670	0.33440	0.64587	0.64655	0.33428	0.64592
278	0.64655	0.33428	0.64592	0.64664	0.33407	0.64595
279	0.64664	0.33407	0.64595	0.64690	0.33391	0.64593
280	0.64690	0.33391	0.64593	0.64716	0.33390	0.64588
281	0.64716	0.33390	0.64588	0.64726	0.33403	0.64583
282	0.64726	0.33403	0.64583	0.64715	0.33422	0.64582

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

283	0.64715	0.33422	0.64582	0.64691	0.33435	0.64584
284	0.64691	0.33435	0.64584	0.64668	0.33434	0.64589
285	0.64668	0.33434	0.64589	0.64662	0.33420	0.64593
286	0.64662	0.33420	0.64593	0.64675	0.33403	0.64593
287	0.64675	0.33403	0.64593	0.64698	0.33393	0.64591
288	0.64698	0.33393	0.64591	0.64716	0.33396	0.64587
289	0.64716	0.33396	0.64587	0.64719	0.33410	0.64583
290	0.64719	0.33410	0.64583	0.64705	0.33425	0.64583
291	0.64705	0.33425	0.64583	0.64684	0.33432	0.64586
292	0.64684	0.33432	0.64586	0.64669	0.33428	0.64590
293	0.64669	0.33428	0.64590	0.64669	0.33414	0.64592
294	0.64669	0.33414	0.64592	0.64683	0.33401	0.64592
295	0.64683	0.33401	0.64592	0.64703	0.33396	0.64589
296	0.64703	0.33396	0.64589	0.64715	0.33402	0.64586
297	0.64715	0.33402	0.64586	0.64712	0.33414	0.64584
298	0.64712	0.33414	0.64584	0.64698	0.33426	0.64584
299	0.64698	0.33426	0.64584	0.64681	0.33429	0.64587
300	0.64681	0.33429	0.64587	0.64671	0.33422	0.64590
301	0.64671	0.33422	0.64590	0.64676	0.33410	0.64592
302	0.64676	0.33410	0.64592	0.64690	0.33401	0.64591
303	0.64690	0.33401	0.64591	0.64705	0.33400	0.64588
304	0.64705	0.33400	0.64588	0.64712	0.33407	0.64585
305	0.64712	0.33407	0.64585	0.64706	0.33418	0.64584
306	0.64706	0.33418	0.64584	0.64692	0.33425	0.64586
307	0.64692	0.33425	0.64586	0.64679	0.33425	0.64588
308	0.64679	0.33425	0.64588	0.64675	0.33418	0.64590
309	0.64675	0.33418	0.64590	0.64682	0.33408	0.64591
310	0.64682	0.33408	0.64591	0.64695	0.33402	0.64590
311	0.64695	0.33402	0.64590	0.64706	0.33403	0.64587
312	0.64706	0.33403	0.64587	0.64708	0.33411	0.64585
313	0.64708	0.33411	0.64585	0.64700	0.33419	0.64585
314	0.64700	0.33419	0.64585	0.64688	0.33424	0.64587
315	0.64688	0.33424	0.64587	0.64679	0.33422	0.64589
316	0.64679	0.33422	0.64589	0.64679	0.33414	0.64590
317	0.64679	0.33414	0.64590	0.64687	0.33407	0.64590
318	0.64687	0.33407	0.64590	0.64698	0.33403	0.64589
319	0.64698	0.33403	0.64589	0.64705	0.33406	0.64587
320	0.64705	0.33406	0.64587	0.64704	0.33414	0.64586
321	0.64704	0.33414	0.64586	0.64696	0.33420	0.64586
322	0.64696	0.33420	0.64586	0.64686	0.33422	0.64587
323	0.64686	0.33422	0.64587	0.64680	0.33419	0.64589

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

324	0.64680	0.33419	0.64589	0.64682	0.33412	0.64590
325	0.64682	0.33412	0.64590	0.64690	0.33406	0.64590
326	0.64690	0.33406	0.64590	0.64699	0.33405	0.64588
327	0.64699	0.33405	0.64588	0.64703	0.33409	0.64587
328	0.64703	0.33409	0.64587	0.64700	0.33415	0.64586
329	0.64700	0.33415	0.64586	0.64693	0.33420	0.64587
330	0.64693	0.33420	0.64587	0.64685	0.33420	0.64588
331	0.64685	0.33420	0.64588	0.64682	0.33416	0.64589
332	0.64682	0.33416	0.64589	0.64686	0.33411	0.64590
333	0.64686	0.33411	0.64590	0.64693	0.33407	0.64589
334	0.64693	0.33407	0.64589	0.64700	0.33407	0.64588
335	0.64700	0.33407	0.64588	0.64701	0.33411	0.64587
336	0.64701	0.33411	0.64587	0.64697	0.33417	0.64586
337	0.64697	0.33417	0.64586	0.64690	0.33419	0.64587
338	0.64690	0.33419	0.64587	0.64685	0.33418	0.64588
339	0.64685	0.33418	0.64588	0.64684	0.33414	0.64589
340	0.64684	0.33414	0.64589	0.64689	0.33410	0.64589
341	0.64689	0.33410	0.64589	0.64695	0.33408	0.64589
342	0.64695	0.33408	0.64589	0.64699	0.33409	0.64587
343	0.64699	0.33409	0.64587	0.64699	0.33413	0.64587
344	0.64699	0.33413	0.64587	0.64695	0.33417	0.64587
345	0.64695	0.33417	0.64587	0.64689	0.33418	0.64588
346	0.64689	0.33418	0.64588	0.64686	0.33417	0.64589
347	0.64686	0.33417	0.64589	0.64686	0.33413	0.64589
348	0.64686	0.33413	0.64589	0.64691	0.33409	0.64589
349	0.64691	0.33409	0.64589	0.64696	0.33409	0.64588
350	0.64696	0.33409	0.64588	0.64699	0.33411	0.64587
351	0.64699	0.33411	0.64587	0.64697	0.33414	0.64587
352	0.64697	0.33414	0.64587	0.64693	0.33417	0.64587
353	0.64693	0.33417	0.64587	0.64688	0.33417	0.64588
354	0.64688	0.33417	0.64588	0.64687	0.33415	0.64589
355	0.64687	0.33415	0.64589	0.64688	0.33412	0.64589
356	0.64688	0.33412	0.64589	0.64693	0.33410	0.64589
357	0.64693	0.33410	0.64589	0.64696	0.33410	0.64588
358	0.64696	0.33410	0.64588	0.64698	0.33412	0.64587
359	0.64698	0.33412	0.64587	0.64695	0.33415	0.64587
360	0.64695	0.33415	0.64587	0.64691	0.33417	0.64587
361	0.64691	0.33417	0.64587	0.64688	0.33416	0.64588
362	0.64688	0.33416	0.64588	0.64688	0.33414	0.64589
363	0.64688	0.33414	0.64589	0.64690	0.33411	0.64589
364	0.64690	0.33411	0.64589	0.64694	0.33410	0.64588

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

365	0.64694	0.33410	0.64588	0.64696	0.33411	0.64588
366	0.64696	0.33411	0.64588	0.64696	0.33413	0.64587
367	0.64696	0.33413	0.64587	0.64694	0.33415	0.64587
368	0.64694	0.33415	0.64587	0.64691	0.33416	0.64588
369	0.64691	0.33416	0.64588	0.64689	0.33415	0.64588
370	0.64689	0.33415	0.64588	0.64689	0.33413	0.64589
371	0.64689	0.33413	0.64589	0.64691	0.33411	0.64589
372	0.64691	0.33411	0.64589	0.64694	0.33411	0.64588
373	0.64694	0.33411	0.64588	0.64696	0.33412	0.64588
374	0.64696	0.33412	0.64588	0.64695	0.33414	0.64587
375	0.64695	0.33414	0.64587	0.64693	0.33415	0.64587
376	0.64693	0.33415	0.64587	0.64690	0.33416	0.64588
377	0.64690	0.33416	0.64588	0.64689	0.33414	0.64588
378	0.64689	0.33414	0.64588	0.64690	0.33413	0.64589
379	0.64690	0.33413	0.64589	0.64692	0.33411	0.64588
380	0.64692	0.33411	0.64588	0.64695	0.33411	0.64588
381	0.64695	0.33411	0.64588	0.64695	0.33413	0.64587
382	0.64695	0.33413	0.64587	0.64694	0.33414	0.64587
383	0.64694	0.33414	0.64587	0.64692	0.33415	0.64588
384	0.64692	0.33415	0.64588	0.64690	0.33415	0.64588
385	0.64690	0.33415	0.64588	0.64690	0.33414	0.64588
386	0.64690	0.33414	0.64588	0.64691	0.33412	0.64588
387	0.64691	0.33412	0.64588	0.64693	0.33411	0.64588
388	0.64693	0.33411	0.64588	0.64695	0.33412	0.64588
389	0.64695	0.33412	0.64588	0.64695	0.33413	0.64588
390	0.64695	0.33413	0.64588	0.64693	0.33414	0.64588
391	0.64693	0.33414	0.64588	0.64691	0.33415	0.64588
392	0.64691	0.33415	0.64588	0.64690	0.33415	0.64588
393	0.64690	0.33415	0.64588	0.64690	0.33413	0.64588
394	0.64690	0.33413	0.64588	0.64692	0.33412	0.64588
395	0.64692	0.33412	0.64588	0.64693	0.33412	0.64588
396	0.64693	0.33412	0.64588	0.64694	0.33412	0.64588
397	0.64694	0.33412	0.64588	0.64694	0.33414	0.64588
398	0.64694	0.33414	0.64588	0.64693	0.33414	0.64588
399	0.64693	0.33414	0.64588	0.64691	0.33415	0.64588
400	0.64691	0.33415	0.64588	0.64690	0.33414	0.64588
401	0.64690	0.33414	0.64588	0.64691	0.33413	0.64588
402	0.64691	0.33413	0.64588	0.64692	0.33412	0.64588
403	0.64692	0.33412	0.64588	0.64694	0.33412	0.64588
404	0.64694	0.33412	0.64588	0.64694	0.33413	0.64588
405	0.64694	0.33413	0.64588	0.64693	0.33414	0.64588

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

406	0.64693	0.33414	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
407	0.64692	0.33414	0.64588	0.64691	0.33414	0.64588
408	0.64691	0.33414	0.64588	0.64691	0.33414	0.64588
409	0.64691	0.33414	0.64588	0.64691	0.33413	0.64588
410	0.64691	0.33413	0.64588	0.64693	0.33412	0.64588
411	0.64693	0.33412	0.64588	0.64694	0.33412	0.64588
412	0.64694	0.33412	0.64588	0.64694	0.33413	0.64588
413	0.64694	0.33413	0.64588	0.64693	0.33414	0.64588
414	0.64693	0.33414	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
415	0.64692	0.33414	0.64588	0.64691	0.33414	0.64588
416	0.64691	0.33414	0.64588	0.64691	0.33413	0.64588
417	0.64691	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
418	0.64692	0.33413	0.64588	0.64693	0.33412	0.64588
419	0.64693	0.33412	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
420	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
421	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33414	0.64588
422	0.64693	0.33414	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
423	0.64692	0.33414	0.64588	0.64691	0.33414	0.64588
424	0.64691	0.33414	0.64588	0.64691	0.33413	0.64588
425	0.64691	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
426	0.64692	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
427	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
428	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33414	0.64588
429	0.64693	0.33414	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
430	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
431	0.64692	0.33414	0.64588	0.64691	0.33414	0.64588
432	0.64691	0.33414	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
433	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
434	0.64692	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
435	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
436	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33414	0.64588
437	0.64693	0.33414	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
438	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
439	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
440	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
441	0.64692	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
442	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
443	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
444	0.64693	0.33413	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
445	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
446	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

447	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
448	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
449	0.64692	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
450	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
451	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
452	0.64693	0.33413	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
453	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
454	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
455	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
456	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
457	0.64692	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
458	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
459	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
460	0.64693	0.33413	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
461	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
462	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
463	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
464	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
465	0.64692	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
466	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
467	0.64693	0.33413	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
468	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
469	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
470	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
471	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
472	0.64692	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
473	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
474	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
475	0.64693	0.33413	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
476	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33414	0.64588
477	0.64692	0.33414	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
478	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
479	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
480	0.64692	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
481	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
482	0.64693	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
483	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
484	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
485	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
486	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
487	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

488	0.64692	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
489	0.64693	0.33413	0.64588	0.64693	0.33413	0.64588
490	0.64693	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
491	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
492	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
493	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
494	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
495	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
496	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
497	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
498	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
499	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588
500	0.64692	0.33413	0.64588	0.64692	0.33413	0.64588

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## DAFTAR RIWAYAT HIDUP



**Syafira Auliani** dilahirkan di Kota Pekanbaru, Riau pada tanggal 24 Juni 1998 sebagai anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Masmulyadi, S.P. dan Ibu Hj. Nani Asrul, S.H.. Penulis menyelesaikan pendidikan formal Sekolah Dasar di SD Negeri 006, Pekanbaru pada tahun 2010. Pada tahun yang sama, penulis melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 1 Pekanbaru dan menyelesaikan pendidikan pada tahun 2013. Pada tahun 2016 penulis menyelesaikan pendidikan menengah atas di SMA Negeri 5 Pekanbaru dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) dan melanjutkan pendidikan ke perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Fakultas Sains dan Teknologi, dengan Program Studi Matematika. Pada tahun 2018, penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Unit Pelaksana Teknis Metrologi Legal Dinas Perdagangan dan Perindustrian Kota Pekanbaru dari tanggal 21 Januari hingga 21 Februari 2018 dan menghasilkan laporan Kerja Praktek dengan judul **“Deskriptif Jumlah Pelayanan Tera dan Tera Ulang Timbangan Tahun 2018 (Studi Kasus: Unit Pelaksana Teknis Metrologi Legal Dinas Perdagangan dan Perindustrian Kota Pekanbaru)”** yang dibimbing oleh Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc..

Pada Juli 2019, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Lubuk Bendahara, Rokan IV Koto, Rokan Hulu. Pada Februari 2021 penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul tugas akhir **“Analisis Dinamik Kestabilan Model SIR Pada Waktu Diskrit”** di bawah bimbingan Ibu Irma Suryani, M.Sc