DIAGONALISASI MATRIKS PERSEGI (*SQUARE MATRIX*)

MENGGUNAKAN DEKOMPOSISI SCHUR

(*SCHUR DECOMPOSITION*)

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh:

FITRI HANDAYANI
10654004472

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU

PEKANBARU

2011

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR LAMBANG

R	: Himpunan seluruh bilangan riil.
C	: Himpunan seluruh bilangan kompleks.
$\in$	: Elemen atau anggota dari
$R^{n\times n}$	: Himpunan seluruh matriks dengan entri-entrinya merupakan bilangan riil, memiliki sejumlah *m* baris dan sejumlah *m* kolom.
$C^{n\times n}$	: Himpunan seluruh matriks dengan entri-entrinya merupakan bilangan kompleks, memiliki sejumlah *m* baris dan sejumlah *n* kolom.
C^{n}	: Himpunan vektor dengan entri-entrinya merupakan bilangan kompleks, berbentuk *m* baris dan 1 kolom.
A^{t}	: Transpose dari suatu matriks $A \in C^{n\times m}$.
U^{*}	: Transpose konjugat dari suatu matriks $U \in C^{n\times n}$.
$\det(A)$	: Determinan matriks *A*.
$\|v\|$	: Norma vektor *v*.
$\langle u, v\rangle$	: Hasil kali dalam vektor *u* dan *v*.
$\overline{0}$	: vektor nol.

DIAGONALISASI MATRIKS PERSEGI (*SQUARE MATRIX*)

MENGGUNAKAN DEKOMPOSISI SCHUR

(*SCHUR DECOMPOSITION*)

FITRI HANDAYANI
NIM: 10654004472

Tanggal Sidang: 23 Februari 2011
Periode Wisuda: Juni 2011

Jurusan Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau

Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang diagonalisasi matriks persegi orde 3×3 menggunakan dekomposisi Schur. Dekomposisi Schur digunakan untuk mendiagonalisasi suatu matriks persegi yang tidak berbentuk matriks hermitian dengan tidak mengubah nilai karakteristik matriks asalnya. Bentuk dekomposisi Schur adalah $A = U^{*}TU$. Berdasarkan hasil penelitian, maka diperoleh bahwa matriks persegi yang didiagonalisasi menggunakan dekomposisi Schur akan menghasilkan matriks segitiga atas.

Kata kunci: *dekomposisi Schur*, *diagonalisasi*, *matriks segitiga atas*.

DIAGONALIZATION SQUARE MATRIX

USING SCHUR DECOMPOSITION

FITRI HANDAYANI
NIM: 10654004472

Date of Final Exam : February 23^{th}, 2011
Graduation Cermony Period : June, 2011

Department of Mathematics

Faculty of Science and Technology

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

HR. Soebrantas Street No 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This thesis discuss about diagonalization of square matrix order 3×3 *by using Schur decomposition. Schur decomposition is used to diagonalization of a square matrix which form not hermitian matrix without change the value of characteristic matrix of origin. Form Schur decomposition is* $A = U^*TU$ *Based on the result, then provided that the square matrix which diagonalizale by using Schur decomposition are upper triangular matrix.*

Keywords: *diagonalization, Schur decomposition, upper triangular matrix.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Nilai eigen merupakan salah satu bagian penting dalam aplikasi aljabar linier. Nilai eigen terdapat pada setiap getaran, yaitu frekuensi alami dari getaran tersebut. Nilai eigen bukan hanya digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah yang berhubungan dengan perhitungan matematika saja. Namun, digunakan juga pada beberapa bidang ilmu, seperti fisika dan teknik bangunan.

Masalah nilai eigen dalam fisika dapat ditinjau dari kasus suatu batang besi. Jika suatu gaya atau beban diberikan pada salah satu ujung batang tersebut, maka batang akan melengkung bila batang mencapai nilai kritis. Jika diteruskan menambah beban hingga melampaui nilai kritis, maka batang tersebut akan melengkung lagi ketika beban mencapai nilai kritis yang kedua, demikian seterusnya. Beban kritis yang terpenting adalah yang paling sesuai dengan nilai eigen terkecil, sebab batang tersebut akan patah jika beban ini dilampaui.

Tidak jauh berbeda dengan ilmu fisika, dalam bidang arsitektur atau teknik bangunan, aplikasi nilai eigen dapat ditinjau dari analisis benda pejal, seperti balok dan pelat. Benda pejal ini umumnya adalah struktur yang dapat dipakai untuk menahan beban serta pengaruh-pengaruh lain yang diberikan. Pemecahan masalah nilai eigen salah satunya digunakan untuk instabilitas linier serta getaran struktur balok dan pelat.

Salah satu permasalahan yang menggunakan nilai eigen pada ilmu matematika adalah diagonalisasi. Sebuah matriks dapat diubah menjadi matriks diagonal dengan tetap mempertahankan karakteristik (eigen) matriks asalnya. Proses perubahan itu disebut diagonalisasi.

Diagonalisasi yang selama ini digunakan dalam Aljabar Linier Elementer mensyaratkan bahwa matriks yang didiagonalisasi harus berbentuk matriks hermitian. Jika matriks tersebut tidak berbentuk matriks hermitian, proses diagonalisasi masih bisa terjadi asalkan matriks asalnya berbentuk matriks persegi (*square matrix*). Namun hasil akhirnya tidak menghasilkan matriks diagonal akan tetapi menghasilkan matriks segitiga atas (*upper triangular*) dengan tetap mempertahankan karakteristik matriks asalnya. Proses diagonalisasi ini dikenal dengan dekomposisi Schur.

Berdasarkan latar belakang tersebut maka penulis tertarik untuk mengangkat masalah yang berhubungan dengan nilai eigen di dalam penulisan skripsi yang mengambil judul "**Diagonalisasi Matriks Persegi (*Square Matrix*) dengan Menggunakan Dekomposisi Schur (*Schur Decomposition*)**".

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, maka dapat disimpulkan rumusan masalah yang akan dibahas dalam tugas akhir ini yaitu, "Bagaimana proses diagonalisasi dari suatu matriks yang tidak berbentuk matriks hermitian, dengan menggunakan dekomposisi Schur dengan tetap mempertahankan nilai eigen matriks asalnya?".

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penulisan tugas akhir ini akan dibatasi pada matriks 3×3.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah mendiagonalisasikan suatu matriks persegi menggunakan dekomposisi Schur yang akan menghasilkan matriks segitiga atas.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup lima bab, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini berisikan tentang materi penunjang yang memuat teori-teori dasar yang terkait dengan penelitian yang akan dibahas seperti materi tentang matriks dan operasi matriks, matriks hermitian, matriks uniter, matriks segitiga atas, transpose matriks, transpose konjugat, hasilkali dalam (*inner-product*), vektor normal, vektor ortogonal, himpunan ortonormal, nilai eigen, vektor eigen, dan diagonalisasi matriks.

Bab III Metodologi Penelitian

Bab ini berisi tentang langkah-langkah untuk memperoleh hasil dalam penelitian.

Bab IV Pembahasan

Bab ini menjabarkan tentang proses diagonalisasi matriks persegi menggunakan dekomposisi Schur.

Bab V Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Ambil matriks A berordo $n \times n$. Cari nilai eigen matriks A, misalkan $E = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ merupakan himpunan nilai eigennya.
2. Matriks A berukuran $n \times n$ maka terdapat sejumlah m nilai eigen dan n vektor eigen. Kemudian pilih sebarang tepat satu dari m vektor eigen tersebut, misalkan v_k.
3. Jika vektor eigen v_k bukan merupakan vektor normal, maka vektor eigen tersebut harus dinormalkan.
4. Bentuk himpunan ortonormal.
5. Bentuk matriks uniter $U_{k=}[v'_{nk}, w_1 w_{n-k}]$. Sehingga dapat dibentuk $U_k^* A U_k = T_k$.
6. Proses dekomposisi ini terus dilakukan sampai matriks T_k berbentuk matriks segitiga atas.
7. Terakhir bentuklah ke dalam dekomposisi Schur $A = U^* T U$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada bab IV, dapat disimpulkan bahwa diagonalisasi matriks persegi yang dikenal selama ini dalam mata kuliah Aljabar Linier Elementer mensyaratkan bahwa matriks yang akan didiagonalisasi harus berbentuk matriks hermitian. Sedangkan matriks persegi yang tidak memenuhi syarat hermitian masih dapat didiagonalisasi menggunakan dekomposisi Schur. Akan tetapi, tidak menghasilkan matriks diagonal melainkan matriks segitiga atas T. Bentuk matriks segitiga atas T adalah $T_n = \begin{bmatrix} \lambda_{K_1} & \bar{z}_1{}^{*} \\ \bar{0}_1 & K_1 \end{bmatrix}$ dengan entri-entri diagonalnya merupakan nilai eigen. Sehingga dengan membentuk matriks uniter, maka diagonalisasi matriks persegi menggunakan dekomposisi Schur ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$A = U^{*}TU$$

5.2 Saran

Tugas akhir ini membahas tentang proses diagonalisasi matriks persegi orde 3×3 menggunakan dekomposisi Schur. Penulis menyarankan untuk melakukan diagonalisasi menggunakan dekomposisi Schur ini dengan orde matriks yang lebih tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. *Aljabar Linier Elementer*, edisi kelima. Jakarta: Erlangga, 1987.

Anton, Howard, dan C. Rorres. *Aljabar Linear Elementer*, edisi kedelapan jilid 1. Jakarta: Erlangga, 2004.

Burden, Richard L dan Faires, J. Douglas. *Numerical Analysis*, fifth edition. Boston: PWS Publishing Company, 1993.

Leon, Steven J. *Aljabar Linier dan Aplikasinya*, edisi 5. Jakarta: Erlangga, 2001.

Lipschutz, Seymour, dan lipson Marc. *Aljabar Linier*, edisi ketiga. Jakarta: Erlangga, 2006.

Nicholson, Keith W., *Linear Algebra with Applications*, fourth edition. Singapore: McGraw-Hill, 2002.

Young, Peter. *Matrix Diagonalization*, 2004. Diakses tanggal 26 Desember 2010.