Kestabilan Titik Ekuilibrium Model SEIR Terhadap Virus Komputer

Tugas Akhir

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

DIANA INDRAYANI
11354201609

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2021

LEMBAR PERSETUJUAN

Kestabilan Titik Ekuilibrium Model SEIR TerhadapVirus Komputer

TUGAS AKHIR

Oleh:

DIANA INDRAYANI
11354201609

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 03 Februari 2021

Ketua Jurusan	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M. Sc.	**Irma Suryani, M.Sc**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIK. 130 517 091**

LEMBAR PENGESAHAN

KESTABILAN TITIK EKUILIBRIUM MODEL SEIR TERHADAP VIRUS KOMPUTER

TUGAS AKHIR

Oleh:

DIANA INDRAYANI
11354201609

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 03 Februari 2021

Pekanbaru, 03 Februari 2021
Mengesahkan,

Dekan	Ketua Jurusan
Dr.Drs.Ahmad Darmawi,M.Ag	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua : Rahmadeni, M.Si

Sekretaris : Irma Suryani, M.Sc

Anggota I : Mohammad Soleh, M.Sc

Anggota II : Wartono, M.Sc

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebut sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjam Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 2021

Yang membuat pernyataan,

DIANA INDRAYANI

NIM. 11354201609

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin

Puji syukur kepada Allah *Subhanahu Wata'ala*, atas segala nikmat hidup dan kesempatan dalam mengenggam ilmu, sehingga karya ini dapat penulis selesaikan. ***Shalawat dan salam selalu terlimpahkan keharibaan Rasulullah Shallalahu Alaihi Wassalam.***

Tugas akhir ini saya persembahkan untuk orang-orang yang saya sayangi:

Bapak dan Ibu saya: (Syafrudin dan Nur Asma), yang telah memberi dukungan moril maupun materi serta do'a yang tiada henti untuk kesuksesan saya, karena tiada kata seindah lantunan do'a yang terucap dari orang tua. Ucapan terima kasih saja takkan pernah cukup untuk membalas kebaikan orang tua, untuk itu terimalah persembahan bakti dan cintaku untuk kalian.

Saudara saya: (Asmidar, yuslizar, samsir, zul hernis, rosna wilis, dan dewi mulyanis), yang senantiasa memberikan dukungan, semangat, senyum dan do'anya untuk keberhasilan ini.

Pembimbing saya: (Ibu Irma Suryani, M.Sc), yang telah memberikan arahan dan motivasi serta meluangkan banyak waktu untuk saya dalam pembuatan Skripsi ini.

Bapak dan Ibu dosen penguji dan pengajar: yang selama ini telah tulus dan ikhlas meluangkan waktunya untuk menuntun dan mengarahkan saya, agar saya menjadi lebih baik. Terimakasih jasa kalian akan selalu tersimpan di hati.

Sahabat sekaligus orang tersayang: (Abdul Salam), yang telah memberikan semangat, dukungan, serta do'anya untuk saya selama mengerjakan skripsi ini.

Sahabat dan Teman: (Fifi, Asni, dan wiska). Terimakasih untuk canda tawa dan perjuangan yang kita lewati bersama dan terimakasih untuk kenangan manis yang telah kalian ukir selama ini.

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang model matematika tentang kestabilan titik ekuilibrium endemik terhadap virus komputer pada model SEIR. Di dalam virus komputer terdapat 2 titik, yaitu titik ekuilibrium bebas virus dan titik ekuilibrium endemik virus yang dapat di lihat dengan cara subtitusikan atau manipulasi aljabar terhadap asumsi-asumsi pada model SEIR virus komputer. Selanjutnya, kestabilan endemik dinyatakan stabil asimtotik dapat di uji menggunakan matriks jacobian dengan syarat R_0 terpenuhi. Kemudian, model SEIR virus komputer, di analisis dengan simulasi numerik menggunakan *sofware Maple 13* dengan hasil untuk kestabilan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik jika $R_0 > 1$ dan hasil simulasi numerik pada model SEIR virus komputer menjelaskan bahwa subpopulasi terinfeksi akan memungkinkan menginfeksi atau menularkan virus kepada subpopulasi rentan. Artinya, virus masih ada dalam populasi.

Kata kunci: *Matriks Jacobian, model SEIR, simulasi numerik,stabil asimtotik, titik ekuilibrium endemik.*

ABSTRACT

The final project discusses a mathematical model about the stability of the endemic equilibrium point againts computer viruses in the seir model. In a computer virus there are two points, namenaly, the virus –free equilibrium point and the enedemic virus equilibrium point.which can be seen by subtantiating or algebraic manipulation of the assumption in the computer virus seir model.furthermore endemic stability is stated as asympotically stable can be tested using a jacobian matrix with R_0 condition met, then the computer virus seir model was analyzed by numerical simulation using maple 13 sofware with the result for the asymptotically stable endemic equilibrium poin if $R_0 > 1$. And the results of numerical simulations on the computer virus seir model explain that the infected subpopulation will likely infect or transmit the virus to the vurnerable subpopulatio. The meaning, the virus is still in the population.

Keyword : *Jacobian Matrix, SEIR model, simulation numeric ,asymptotically stable, endemic equilibrium point.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabil'alamin. Segala puji bagi ALLAH *Subhanahu Wata'ala* yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul **"** Kestabilan Titik Ekuilibrium Model Seir Terhadap Virus Komputer**"**. Selanjutnya shalawat dan salam senantiasa kita hadiahkan kepada nabi Muhammad *Shallallahu Alaihi Wassalam* yang telah memberikan petujuk bagi seluruh umat manusia. Semoga dengan senantiasa bersholawat kita mendapatkan syafa'atnya. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Sastra 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis banyak mendapat bimbingan, nasehat, masukan, arahan, dan hal lainnya dari berbagai pihak. Terutama kepada kedua Orang Tua saya yakni: Ayah (Syafrudin) dan Ibu (Nur Asma) yang selalu mendo'akan saya, memberikan semangat, motivasi, dan kasih sayang yang tak tehingga. Kemudian terima kasih juga kepada kakak - kakak saya. Ucapan terima kasih selanjutnya penulis ucapkan kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Akhmad Mujahidin, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Nawawi, M.Ag, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
4. Ibu Irma Suryani, M.Sc selaku Pembimbing yang telah banyak meluangkan waktu untuk memberikan arahan, penjelasan serta petunjuk kepada penulis dari awal hingga selesai.
5. Ibu Rahmadeni, M.Si selaku ketua sidang yang telah memberikan kritikan dan saran dalam penulisan tugas akhir ini.

6. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc selaku Penguji I yang telah memberikan masukan, dukungan serta arahan dalam penulisan tugas akhir ini.
7. Bapak Wartono, M.Sc selaku Penguji II yang telah memberikan masukan, dukungan serta arahan dalam penulisan tugas akhir ini.
8. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau.
9. Ibu Irma Suryani, M.Sc selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan dukungan, arahan selama masa perkuliahan.
10. Bapak dan Ibu Dosen lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi khususnya Jurusan Matematika.
11. Teman-teman angkatan Matematika’13 terkhusus kelas A serta kepada para senior dan junior Matematika yang telah memberi pelajaran maupun pengajaran, arahan, serta motivasi.
12. Sahabat-sahabatku (Dedy, Suryadi, Wisnu, Redho, Arief, Defli, Imul, Asni, Fifi, Fitri Amalia (ponakan) dan Rahmi). Yang selalu nanya kapan wisuda dan selalu memberikan semangat kepada penulis.
13. Teman-teman KKN UIN-SUSKA desa Kota Pelalawan yang pernah susah dan senang bersama.
14. Teman-teman seperjuangan dari SMA (Dina Gustina, Weni Riska, Mawaddah Vennita, Yulfiariza Nursalbi)
15. Semua pihak yang tidak dapat saya sebutkan semua namanya yang telah membantu dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Akhir kata saya ucapkan terimakasih.

Pekanbaru, 2021

Diana Indrayani

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada zaman ini teknologi sudah berkembang dengan sangat pesat. Untuk mengikuti perkembangan zaman semua orang membutuhkan teknologi seperti komputer, handphone, dan lain-lain yang sering digunakan kehidupan sehari-hari. Dalam teknologi yang sekarang ini menggunakan jaringan komputer yang menghubungkan masing-masing komputer, dan jaringan ini terkoneksi ke internet demi kemudahan akses dan transfer data milik perusahaan. teknologi pada jaringan komputer ini memiliki dampak ancaman seperti virus komputer.

Virus komputer muncul pada tahun 1980-an dalam bentuk program yang mampu merusak operasi pada mesin. Seiring perkembangan zaman kemajuan teknologi komputer dan telekomunikasi, serta di kembangkan nya teknologi *sofware, hardware,* dan jaringan komputer yang semakin canggih menjadikan komputer alat penting bagi seluruh umat manusia sebagai keperluan dalam kehidupan sehari-hari. Di sisi lain, dengan berkembangnya teknologi komputer yang semakin canggih perkembangan nya virus komputer pun menjadi semakin canggih dalam perusakan dan penyebaran nya (Piquera, 2009).

Salah satu cara untuk melawan serangan dari virus komputer adalah menggunakan antivirus. Antivirus adalah perangkat lunak /program komputer yang berguna untuk mendeteksi keberadaan virus dan juga menghapus virus komputer. Tetapi penggunaan antivirus juga memiliki kelemahan, karna antivirus membutuhkan pembaharuan file secara periodik agar dapat bekerja optimal. Pada kenyataan nya, pengaruh dari manusia memainkan peran penting dalam memperlambat penyebaran virus komputer. Model propaganda pada *cloud environment*. Pada penelitian ini, mereka memaparkan tentang model HSIR dimana modifikasi H (*Health*) pada SIR model merupakan kelompok komputer yang bebas virus, S (*Susceptible*) adalah komputer yang bebas virus tetapi komputer tetangga yang berhubungan langsung terkena virus (Fan, 2013).

Dengan timbul nya kesadaran terhadap bahaya dari virus di dalam jaringan komputer, beberapa peneliti melakukan tentang virus dalam jaringan komputer. Mereka meneliti tentang epidemik virus komputer dalam jaringan komputer dengan menggunakan model SIR yang di modifikasi pada bagian kelompok I(*infected*) dimana kelompok yang terinfeksi terbagi menjadi beberapa kelompok dalam satu kelompok memiliki tingkat infeksi yang sama, tetapi individu dari kelompok berbeda memiliki t ingkat infeksi yang berbeda (Mishra dan Ansari 2012).

Pada jurnal mathematical model on computer viruses (Mishra dan Saini) di peroleh bahwa model matematika membantu untuk menemukan sisitem yang terinfeksi virus pada komputer dan juga model. Model dapat berguna dalam merancang pertahanan terhadap serangan virus komputer yang tidak berbahaya dan ganas yang sangat penting dalam konteks. Saat ini model ini akan membantu dalam melakukan analisis sensitivitas dan dapat di verifikasi dengan simulasi.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk membahas ekuilibrium model SEIR pada virus komputer. Oleh karna itu, Penulis tertarik mengkajinya dengan judul “***Kestabilan Titik Ekuilibrium Model SEIR Terhadap Virus Komputer”.***

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana model matematika penyebaran virus komputer pada populasi komputer?
2. Bagaimana kestabilan model SEIR terhadap virus komputer?

1.3 Batasan Masalah

Dalam hal ini di fokuskan pada kestabilan titik ekuilibrium endemik model SEIR terhadap virus komputer. Dalam penelitian ini penulis akan membatasi masalah hanya membahas mengenai model matematika penyebaran virus komputer pada jurnal Mishra dan Saini.

1.4 Tujuan Penelitian

1. Menganalisa model penyebaran pada virus komputer pada populasi komputer
2. Menganalisa kestabilan model SEIR terhadap virus komputer

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah memberikan tambahan pengetahuan tentang model penyebaran virus komputer dan titik kestabilan penyebaran virus komputer tipe SEIR sebagai alternatif penyelesaian permasalahan yang berkaitan dengan teknologi komputer.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan proposal ini, penulis menggunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I **PENDAHULUAN**

Berisi tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II **LANDASAN TEORI**

Bab ini menjelaskan tentang teori-teori yang mendukung untuk bagian pembahasan.

BAB III **METODOLOGI PENELITIAN**

Berisi tentang studi pustaka atau literatur, yaitu dengan membaca buku-buku, jurnal,tugas akhir dan sumber-sumber lainnya yang mendukung pembahasan.

BAB IV **PEMBAHASAN**

Berisikan tentang pemaparan cara-cara dengan teoritis dalam memperoleh hasil yang diinginkan.

BAB V **PENUTUP**

Berisikan tentang penjelasan kesimpulan dan saran dari pembahasan.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Virus Komputer

Virus komputer adalah program komputer yang biasanya berukuran kecil yang dapat menyebabkan gangguan atau kerusakan pada sistem komputer dan memiliki beberapa kemampuan dasar, dianatara nya adalah kemampuan untuk memperbanyak diri, yaitu kemampuan untuk membuat duplikat dirinya pada *file-file* atau disk –disk yang belum di tularinya, sehingga lama-kelamaan wilayah penyebaran nya semakin luas (Adi, 2006)

Virus juga mempunyai kemampuan untuk menyembunyikan diri , yaitu kemampuan untuk menyembunyikan dirinya dari perhatian user, antara lain dengan cara menghadang keluaran kelayar selama virus bekerja, sehingga pekerjaan virus tak tampak oleh user, atau program virus di tempatkan di luar *track* yang di buat *DOS (* misalkan *track 41),* dan visa juga dengan cara ukuran virus di buat sekecil mungkin sehingga tidak menarik kecurigaan (Adi, 2006)

Selain itu virus juga mempunyai kemampuan untuk mengadakan manipulasi. Sebenarnya rutin manipulasi tak terlalu penting. Tetapi inilah yang sering mengganggu. Biasanya rutin ini di buat untuk membuat tampilan atau pesan yang mengganggu pada layar monitor, mengganti *volume label* disket, merusak struktur disk, menghapus *file-file* serta untuk mengacaukan kerja alat-alat I/O , seperti keyboard dan printer. Virus komputer juga mampu mendapatkan informasi tentang struktur media penyimpanan seperti letak *boot record* asli, letak tabel partisi, letak *FAT3,* posisi suatu *file,* dan sebagainya serta mampu untuk memeriksa keberadaan dirinya dalam *file* itu dengan mencari ID (tanda pengenal) dirinya di dalam *file* itu. File yang belum tertular suatu virus tentunya tidak mengandung ID dari virus yang bersangkutan kemampuan ini mencegah penyusupan yang berkali-kali pada suatu *file* yang sama (Adi, 2006)

2.2 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan proses perubahan antara dunia nyata dan matematika secara dua arah. Hal ini mengisyaratkan proses pemodelan tidak hanya memodelkan dunia nyata kedalam model matematika saja akan tetapi juga bagaimana representasi matematika dalam dunia nyata. Diantara kedua proses tersebut terdapat proses analisis matematis. Proses pemodelan di awali dengan mengkonsepkan beberapa situasi masalah. Dilanjutkan dengan penyederhanaan, penstrukuralan, dan membuat situasi menjadi lebih tepat sesuai dengan pengetahuan, tujuan dan minat pemecah masalah yang kemudian mengarah pada spesifikasi masalah. Pengumpulan data juga dapat dilakukan ketika dibutuhkan.

Melalui proses matematisasi, objek yang relevan, data, relasi, kondisi dan asumsi dari domain di luar matematika diubah kedalam matematika. Proses ini menghasilkan model matematika dari masalah yang diidentifikasi. Metode matematis kemudian digunakan untuk memperoleh solusi matematis dari masalah. Proses tidak berhenti setelah diperoleh solusi. Solusi tersebut perlu untuk diterjemahkan kembali dalam domain di luar matematika atau sesuai dengan konteksnya (Sari, 2015).

2.3 Model SEIR

Pada model SEIR, *populasi* dibagi menjadi 4 kelas yaitu, *Susceptible (S)*, kelas populasi terjangkit *Exposed (E)*, kelas populasi terinfeksi *infected (I)*, dan yang terakhir kelas *recovered (R)* yakni kelas yang sembuh terhadap virus yang dibicarakan. Pada model SEIR, individu hanya mengalami kekebalan sementara, dengan kata lain setelah individu memasuki kelas *recovered (R)* ia akan masuk kembali ke kelas rentan atau kelas *susceptible (S)* (Mishra dan Saini 2012).

2.4 Sistem Persamaan Differensial

Persamaan differensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan sistem persamaan differensial terdiri dari beberapa persamaan differensial linear dan nonlinear.

Apabila terdapat beberapa persamaan differensial, maka akan terbentuk suatu sistem persamaan differensial. Bentuk umum dari suatu sistem persamaan differensial orde pertama adalah sebagai berikut (Perko, 2001):

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

(2.1)

Persamaan differensial (2.1) dapat di tulis sebagai persamaan vektor dengan vektor kolom $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^2$ dan $f = [f_1, f_2, \cdots, f_n]^2$. Sistem persamaan diferensial (2.1) dapat ditulis sebagai berikut:

$$x = \boldsymbol{f}(x, t)$$

(2.2)

Sistem persamaan (2.1) adalah sistem linear jika fungsi linear dalam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3 + \cdots + a_{1n}(t)x_n$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3 + \cdots + a_{2n}(t)x_n$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + a_{n3}(t)x_3 + \cdots + a_{nn}(t)x_n$$

(2.3)

Persamaan (2.3) dapat ditulis menjadi:

$$x = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{g}$$

(2.4)

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}.$$

Sistem disebut homogeny jika $g = 0$, sehingga:

$$x = \boldsymbol{Ax}.$$

(2.5)

Jika $g \neq 0$, maka Sistem (2.4) disebut non homogen.

2.5 Titik Ekuilibrium dan Analisis Kestabilan

Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan setimbang jika sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu (konstan). Dalam model ini, terdapat dua titik ekuilibrium pada model matematika penyebaran virus komputer, yaitu titik ekuilibrium bebas virus dan titik ekuilibrium endemik virust. Titik ekuilibrium bebas virus adalah dimana kondisi tidak ada lagi virus yang menyerang, dengan kata lain tidak ada lagi tuan rumah yang terserang virus komputer. Dan titik ekuilibrium endemik virus adalah keadaan dimana virus selalu ada di dalam tuan rumah dengan kata lain akan selalu ada anggota tuan rumah yang terserang virus komputer.

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui informasi yang menggambarkan perilaku sistem pada titik ekulibrium. Keadaan setimbang tersebut dikatakan stabil jika semua solusi yang dekat dengan titik ekuilibrium menuju titik ekuilibrium tersebut. Berikut ini diberikan definisi tentang titik ekuilibrium dan kestabilan:

Definisi 2.1 (Perko, 1991) Titik $\overline{\boldsymbol{x}} \epsilon R^n$ disebuk titik ekuilibrium jika $f(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$

Contoh 2.1

Diberikan sistem persamaan diferensial yaitu:

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1x_2 + x_1 \\ {x_1}^2 + x_2 \end{pmatrix}$$

Tentukan titik ekuilibrium dari sistem persamaan diferensial tersebut.

Penyelesaian. Titik ekuilibrium dapat diperoleh jika $f(\boldsymbol{x}) = 0$, sehingga sistem tersebut menjadi

$$x_1x_2 + x_1 = 0$$

atau dapat ditulis menjadi

$$x_1(x_2 + 1) = 0$$

Berdasarkan persamaan tersebut diperoleh $\bar{x}_1 = 0$ atau $\bar{x}_2 = -1$,
Jika $\bar{x}_1 = 0$ dan menurut persamaan

$$x_1{}^2 + x_2 = 0,$$

Maka di peroleh $\bar{x}_2 = 0$ sehingga di dapat titik ekuilibrium $E_1 = (0,0)^T$.
Jika $\bar{x}_2 = -1$ dan menurut persamaan

$$x_1{}^2 + x_2 = 0,$$

Maka di peroleh $\bar{x}_1 = 1$ sehingga di dapat titik ekuilibrium $E_2 = (1,-1)^T$.

Selanjutnya akan di berikan definisi kestabilan di titik ekuilibrium.

Definisi 2.2 (Widodo, 2007) Titik ekuilibrium x yang memenuhi $f(x) = 0$ dikatakan:

1. Stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \delta$ yang berakibat $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$, untuk setiap $t \geq 0$
2. Stabil asimtotik jika $\bar{x}$ stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$, sehingga $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \delta_1$ yang berakibat $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$
3. Tidak stabil jika titik ekuilibrium tidak memenuhi (1).

Kestabilan titik ekuilibrium x dapat di tentukan dengan memperhatikan nilai-nilai eigen, yaitu $\lambda_i = 1,2,\cdots,n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik.

Definisi 2.3 (Strogatz, 1994) Misalkan di berikan SPD linier sebagai berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = Ax \tag{2.6}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Maka persamaan karakteristik SPD pada Persamaan (2.6), yaitu $(A - \lambda I)x = 0$, dapat di tulis menjadi:

$$a\lambda^2 - b\lambda + c = 0\,, \tag{2.7}$$

Maka dari Persamaan (2.7) diperoleh nilai-nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.8}$$

Kestabilan dari titik ekuilibrium dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian. Kriteria kestabilan titik ekuilibrium dapat disajikan pada teorema berikut:

Teorema 2.1 (Subiono, 2010) Diberikan persamaan diferensial $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$ memiliki k nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

dengan $k \leq n$.

a. Titik ekuilibrium $\dot{x}$ dikatakan stabil asimtotik, jika dan hanya jika $R_e\,(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1,2,\cdots,k$.

b. Titik ekuilibrium $\dot{x}$ dikatakan stabil, jika dan hanya jika $R_e\,(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1,2,\cdots,k$.

c. Titik ekuilibrium $\dot{x}$ dikatakan tidak stabil, jika dan hanya jika $R_e(\,\lambda_i) > 0$ untuk setiap $i = 1,2,\cdots,k$.

Contoh 2.2

Di berikan persamaan differensial sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 3x_2$$

Carilah titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekuilibriumnya!

Penyelesaian:

Dari Soal Contoh 2.2 diperoleh titik ekuilibrium: $({x_1}^*, {x_2}^*) = (0,0)$. Selanjutnya, Jacobian matriksnya,

$$Jf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

dengan $f_1(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2$ dan $f_2(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2$, kemudian ditentukan terlebih dahulu turunan dari masing-masing fungsi terhadap variabelnya, sehingga di peroleh:

$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -2$$

$$\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 2$$

$$\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -3$$

Turunan yang telah diperoleh kemudian di bentuk ke dalam matriks jacobian sebagai berikut:

$$Jf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan di cari nilai eigen,

$$det(\lambda I - Jf_1(x_1,x_2)) = 0$$

$$\det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\begin{bmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ -2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga didapatkan persamaan karakteristiknya sebagai berikut:

$$(\lambda + 2)(\lambda + 3) - (-2)(-1) = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 3) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2\lambda + 6 - 2 = 0$$

$$(\lambda + 4)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = -1$$

Dapat dilihat nilai eigen $[\lambda_1, \lambda_2]$ dari matrik jacobian $Jf(x_1,x_2)$ mempunyai bagian real negative. Berdasarkan Teorema 2.1 maka titik ekuilibrium $(x_1{}^*, x_2{}^*) = (0{,}0)$ adalah stabil asimtotik.

2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Secara formal, definisi nilai eigen dan vektor eigen adalah sebagai berikut:

Definisi 2.4 (Anton, 1987) Misalkan A adalah matriks $n \times n$, maka vektor x yang tidak nol di R disebut vektor eigen *(eigen vector)* dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yaitu:

$$Ax = \lambda x \tag{2.9}$$

untuk λ suatu skalar. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigen value)* dari A.

Persamaan (2.9) dapat di tulis sebagai berikut,

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda)x = 0$$

(2.10)

Persamaan (2.10) memiliki pecahan jika dan hanya jika $\det(A - \lambda) = 0$.

Contoh 2.3

Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Tentukan vektor-vektor eigen dari matriks A.

Penyelesaian:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$, maka

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 6 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$6x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{3} x_2$$

Misal $x_2 = t$, maka $x_1 = \frac{1}{3}t$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah $x_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = -1$

$$det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 6x_1 = 0 \end{cases}$$

maka $x_1 = 0$, misal $x_2 = t$

$$x = \begin{bmatrix} 0t \\ 1t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -1$ adalah $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.7 Matrik Jacobian

Diberikan sistem sebagai berikut,

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.11}$$

Jika Persamaan (2.11) mempunyai titik ekuilibrium $\bar{x}$ maka Persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai:

$$\dot{x} = Df(\bar{x})x + \varphi(x) \tag{2.12}$$

Bentuk $\varphi(x)$ disebut sebagai bagian nonlinier dari Persamaan (2.11) dan $Df(\bar{x})$ disebut sebagai bagian linier dari Persamaan (2.11), dengan $Df(\bar{x})$ disebut sebagai matriks Jacobian dari Persamaan (2.11) pada titik ekuilibrium x.

Definisi 2.5 (Clark, 1999) Matriks yang berhubungan dengan sebuah fungsi $f{:}R^n \to R^n$ yang memiliki koordinat fungsi $f_1, f_2, \cdots, f_m$ dengan entri (i,j) dari $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$, turunan parsial pertama dari atas daerah asal fungsi f.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Jika $Df(\overline{x})$ tidak mempunya nilai eigen dengan $R_e\{\lambda_j\} = 0$ maka sifat kestabilan Persamaan (2.11) dapat di lihat dari persamaan

$$\dot{x} = Df(\overline{x})x \tag{2.14}$$

2.8 Kriteria Routh - Hurwitz

Berdasarkan teorema 2.1 untuk menguji sifat kestabilan diperlukan perhitungan untuk menentukan nilai-nilai eigen dari matriks jacobian di titik ekulibrium. Kriteria Routh-Hurwitz merupakan salah satu alternatif untuk menentukan nilai eigen tersebut.

Diberikan suatu sistem persamaan karakteristik dalam bentuk polinomial sebagai berikut:

$$f(s) = a_0 + a_1 S(n-1) + a_0 S^n + \ldots + a_{n-1} S + a_n \tag{2.15}$$

jika persamaan (2.15) mempunyai bagian real negatif maka

$$\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0, \ldots \frac{a_n}{a_0} > 0 \tag{2.16}$$

(Hanh, 1967)

Definisi 2.9

Diberikan polinomial (2.15) dengan a_0 positif dan a_k bilangan real, k= 1,2,3, . .n. Matriks Hurwitz untuk persamaaan (2.15) di defenisikan sebagai matriks bujur sangkar berukuran n x n yang berbentuk sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

(2.17)

Determinan Hurwitz tingkat ke-k,dinotasikan dengan $\Delta k; k = 1,2, \dots n$ yang dibentuk dari matriks Hurwitz (2.17) , di definisikan sebagai berikut:

$$\Delta_1 = \lfloor a_1 \rfloor$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

Teorema 2.2 (Gantmacher,1959)

Pembuat nol polinomial (2.15) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika pertidaksamaan (2.16) di penuhi dan $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots \Delta_n > 0$ (2.18)

Dengan demikian titik kesetimbangan $\bar{x}$ stabil jika dan hanya jika det $Hj > 0$ untuk setiap i = 1.2 . . . n untuk n = 3 dan n= 4 Kriteria Routh- Hurwitz di berikan sebagai berikut:

n= 3; a_1> 0, a_2> 0 a_3> 0, a_1. a_2 -a_3 >0

n= 4; a_1 > 0, a_2 >0, a_3>0, a_1. a_2 -a_3 >0, a_4>0 a_1. a_2 -a_3 >0 dan

a_3 (a_1. a_2 -a_3)– a_1 . a_4>0

(Edelstein - Keshet, 1988)

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang digunakan penulis pada penelitian ini adalah studi literatur, yaitu mempelajari buku-buku atau jurnal-jurnal yang berkaitan dengan pokok permasalahan. Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Membuat asumsi yang melibatkan parameter dan variabel.
2. Mengidentifikasi parameter dan variabel yang digunakan dalam model:

Tabel 3.1. Parameter dan Variabel model

Parameter dan Variabel	**Keterangan**
S	Subpopulasi virus rentan
E	Subpopulasi virus terjangkit
I	Subpopulasi virus terinfeksi
R	Subpopulasi virus sembuh
μ	Laju kematian
β	Laju kontak di perhatikan
δ	Laju perubahan populasi dari kelas terjangkit menjadi terinfeksi
γ	Laju perubahan populasi dari kelas terinfeksi menjadi sembuh

3. Menentukan titik ekuilibrium dari model SEIR pada virus komputer yaitu titik ekuilibrium bebas virus dan titik ekuilibrium endemik virus.
4. Menganalisa kestabilan dari titik ekuilibrium endemik virus yang di dapat.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dalam penelitian ini telah dikembangkan sebuah model matematika mengenai virus komputer yang dikembangkan dalam bentuk SEIR. Virus komputer merupakan program komputer yang biasanya berukuran kecil yang dapat menyebabkan gangguan atau kerusakan pada sistem komputer (Adi, 2006). Pada penelitian ini diperoleh yaitu:

1. Model SEIR terhadap virus computer diperoleh pada Persamaan (4.1) dengan titik ekuilibrium nya ada 2 yaitu titik ekuilibrium bebas virus $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I})$ dan titik ekuilibrium endemik (S^*, E^*, I^*).
2. Kestabilan titik *ekuilibrium bebas virus* dan Kestabilan *titik ekuilibrium endemik virus* dapat dilihat pada Teorema 4.1 dan Teorema 4.2.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini membahas tentang kestabilan titik ekuilibrium model SEIR terhadap virus komputer. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada masalah ini untuk menambahkan simulasi pada model SEIR atau pembaca bisa menggunaka metode yang berbeda untuk menyelidiki model SEIR terhadap virus komputer.

DAFTAR PUSTAKA

Adi. *Model Epidemic Pada Penyebaran Virus Komputer*. Program Studi Matematika FMIPA Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta. 2006.

Anton, H. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga. 1987.

Clark. *Analysis, Calculus, and Differential Equations.* Georgia: University of Georgia. 1999.

Fan. *Study of Virus Propagation Model in Cloud Environment.* ISchool of Information Science and Technology , Shijiazhuang Tiedao University , Shijiazhuang ,050043, China. 2013.

Mishra, A. *Differensial Epidemic Model of Virus and Worm in Computer Network.* Departement of Applied Mathematic , Birla Institute of Technology, University Polytechnic Mesra, Ranchi, 835 215, India. 2012.

Mishra, S. *Mathematical Models On Computer Viruses* . Birla Institute of Technology and Science, Mathematics Group , Pilani 333 031, India. 2006.

Perko, L. *Differential Equations Dynamika System*. New York: Springed-Verlag. 1991.

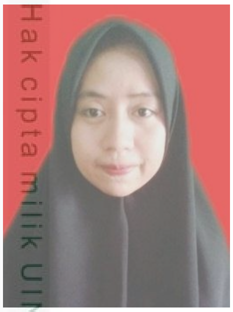
Piquiera. *A Modified epidemiological model for computer viruses.* Escola Politecnica da Universidade de Sao Paulo, Avenida Prof. Luciano Gualberto, travessa 3, n. 158,05508-900, Sao Paulo, SP Brazil. 2009.

Sari, R. *Literasi Matematika: Apa, Mengapa dan Bagaimana?*. Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta. 2015.

Strogatz. *Nonlinear Dynamics And Chaos.* Cambridge: Harvard University. 1994. Subiono. *Matematika Sistem*. Surabaya: Jurusan Matematika, FMIPA-ITS. 2010.

Widodo. *Pengantar Model Matematika*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada. 2007.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis lahir pada tanggal 5 Juli 1995 di Ranah, sebagai anak ke tujuh dari tujuh bersaudara dari pasangan Bapak Syafrudin dan Ibu Nur Asma. Penulis memulai pendidikan dasarnya di Sekolah Dasar Negeri 020 Ranah kec. Kampar pada tahun 2001 dan menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar pada tahun 2007. Kemudian pada tahun 2010 penulis menyelesaikan pendidikan di Sekolah Menengah Pertama Negeri 1 Kampar, dan menyelesaikan pendidikan di Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Kampar pada tahun 2013 dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA). Setelah menyelesaikan pendidikan di SMA, pada tahun 2013 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau Pekanbaru di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika.

Pada tahun 2016 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama dua bulan di desa Meranti Kec. Pangkalan Kuras Kabupaten Pelalawan. Kemudian pada tanggal 10 Januari tahun 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Dinas Komunikasi Informatika dan Persandian, dengan judul "**Estimasi Pengeluaran Dana SPJ-Belanja Dinas Komunikasi Informatika dan Persandian Tahun 2018 Menggunakan Penduga Rasio**" yang dibimbing oleh Ibuk Corry Corazon Marzuki, M.Si dan Ibuk Rohati Yahya, pada tanggal 10 Januari s/d 10 Februari 2018 dan diseminarkan pada tanggal 12 Juli 2018.

Pada tanggal penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul tugas akhir "**Kestabilan Titik Ekuilibrium Model Seir Terhadap Virus Komputer**" di bawah bimbingan Ibu Irma Suryani, M.Sc